

# Розрахунок електричних кіл змінного струму символічним (комплексним) методом

Як ми бачили раніше, розрахунок кіл змінного струму потребував використання векторних діаграм (ВД). – **Кожен має ясно усвідомити причину.**

Для розрахунку складних кіл побудова ВД стає складною процедурою. В якості приклада розглянемо коло на Рис. 1. Вважаємо, що задані  $R$ ,  $x_L = \omega L$ ,  $x_C = 1/\omega C$ , та  $U$ , наприклад  $U=220$  В.

Потрібно знайти:  $I_R, I_L, I, U_{RL}$ .

Оскільки ми ще **не** знаємо символічного (комплексного) метода, то у пригоді може стати **метод пропорційних величин**. В гілці, найбільш віддаленій від джерела ( $U$ ) задаються деяким значенням струму або напруги. Для зручності розрахунків зазвичай це 1А або 1В. Нехай  $U'_{RL} = 1$  В (вектор  $\vec{U}'_{RL}$  розташовуємо горизонтально). Символ  $\vec{\phantom{U}}$  означає, що це значення є згодним ("предполагаемым" - рос.).

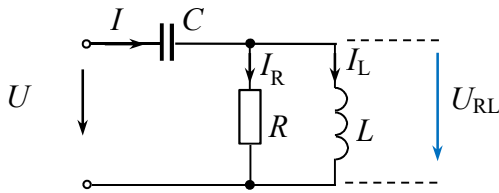


Рис. 1.

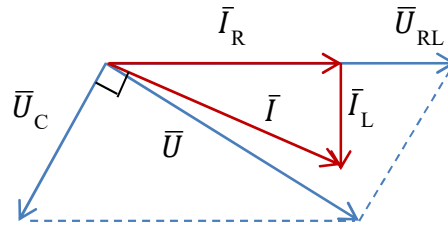


Рис. 2.

Вектори на Рис. 2 будуємо в такій послідовності:

1)  $I'_R = U'_{RL} / R$ ;  $I'_L = U'_{RL} / x_L$ ;  $I' = \sqrt{I'^2_R + I'^2_L}$

2)  $\vec{U}'_C$  відстає від  $\vec{I}'$  на  $\pi/2 = 90^\circ$ .

3) Вектор  $\vec{U}$  можна побудувати по правилу трикутника або паралелограма (додаванням векторів  $\vec{U}'_{RC}$  і  $\vec{U}'_C$ ). Розрахунок завершується визначенням коефіцієнту пропорційності,  $k = U/U'$  і множенням всіх проміжних ("промежуточных" - рос.) значень з символом  $\vec{\phantom{U}}$  на  $k$ .

## Основи символічного методу

Кожному вектору  $\vec{A}$  на площині, незалежно від його фізичного змісту (наприклад  $\vec{U}, \vec{I}, \vec{E}$ ) може бути поставлене у відповідність комплексне число  $\dot{A}$  (тобто, відповідно,  $\dot{U}, \dot{I}, \dot{E}$ ).

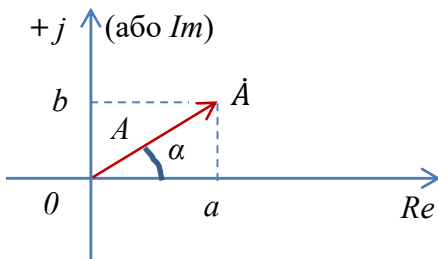


Рис. 1. Комплексна площина.

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$  – модуль  $\dot{A}$ ;

$\alpha = \arctg b/a$  – аргумент  $\dot{A}$ .

Три форми комплексного числа  $\dot{A}$ :

1)  $\dot{A} = a + jb$  – алгебраїчна форма,

2)  $\dot{A} = A \cos(\alpha) + jA \sin(\alpha)$  – тригонометрична

3)  $\dot{A} = A e^{j\alpha}$  – показова форма

Комплексні числа  $\dot{A} = a + jb = A e^{j\alpha}$  та  $\dot{A}^* = a - jb = A e^{-j\alpha}$  називаються *сполученими* ("сопряженными" – російською). Їх добуток є *дійсним* числом  $a^2 + b^2$  або  $A^2$ . Це можна також довести записавши добуток  $A e^{j\alpha} \times A e^{-j\alpha} = A^2$ .

$e^{\pm j\alpha} = \cos(\alpha) \pm j \sin(\alpha)$  - формула Ейлера. Звідки,  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ , а  $\frac{1}{j} = -j$ .

Нехай вектору  $\dot{A}$  (див. Рис. 2 = or Fig. 2) відповідає (corresponds) число

$$\dot{A} = A e^{j\alpha} = A \cos(\alpha) + j A \sin(\alpha). \tag{1}$$

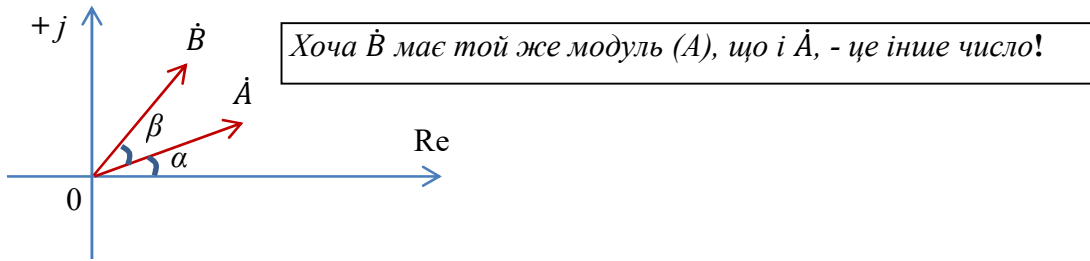


Рис. 2. Пояснення поняття "оператор повороту"  $e^{j\beta}$ .

Якщо повернути вектор  $\dot{A}$  на кут  $\beta$ , то отримаємо *новий* вектор  $\dot{B}$ , якому, згідно до (1), відповідає комплексне число

$$\dot{B} = A \cos(\alpha + \beta) + j A \sin(\alpha + \beta) = A e^{j(\alpha + \beta)}. \tag{2}$$

Але  $A e^{j(\alpha + \beta)} = A e^{j(\alpha)} e^{j(\beta)} = \dot{A} e^{j\beta}$ . (3)

Тобто повороту вектора на кут  $\beta$  відповідає множення відповідного комплексу на  $e^{j\beta}$  який називають *оператором повороту*.

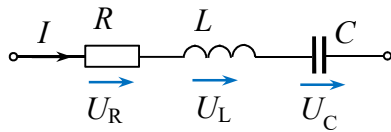
Як ми вже бачили вище, з формули Ейлера витікає, що  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ , тобто повороту вектора на кут  $\frac{\pi}{2}$  відповідає множення відповідного комплексу на  $j$ . Ясно, що повороту на вектора кут  $\pi = 180^\circ$  відповідає множення комплексу на  $j^2$ . Але поворот вектора кут  $180^\circ$  означає його множення на  $-1$ . Тобто  $j^2 = -1$ , а  $j = \sqrt{-1}$  (уявна одиниця). Це є числом, що при піднесенні до квадрату дає від'ємну одиницю:  $j^2 = -1$ .

### Закони Ома і Кірхгофа в символічній формі. Розрахунок активної і повної потужності (теж в символічній формі)

Положення векторів на комплексній площині визначається їх початковими фазами. При розрахунках початкова фаза одного з векторів ("базового" вектора) обираються довільно (arbitrarily – eng.), наприклад, вважається нульовою. Тим самим базовий вектор розташовується на вісі дійсних чисел (для зручності малювання).

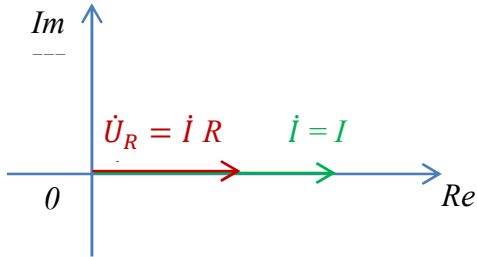
Зображення в символічній формі опорів електричного кола ( $R, x_L, x_C$ ) визначається характером впливу (воздействия – рос., impact – eng.) цих опорів на зсув фази між векторами  $\dot{I}$  і  $\dot{U}$  (тобто  $\dot{I}$  і  $\dot{U}$ ).

Розглянемо фрагмент (деяку гілку) кола із струмом  $\dot{I}$  (Рис. 3). Його зображення  $\dot{I}$  може вважатися *дійсним* числом  $I$  (оскільки ми розташували його точно на вісі дійсних чисел, див. Рис. 4, 5, 6).



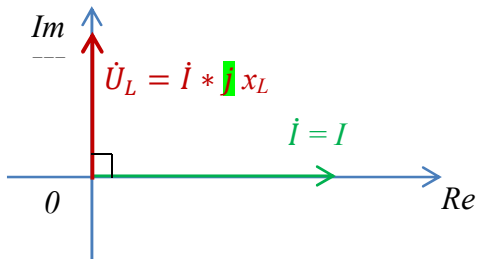
**Рис. 3.** Гілка із струмом  $I$  (він є спільним для всіх трьох елементів).

1) Закон Ома для **активного опору  $R$**  (в символічній формі)



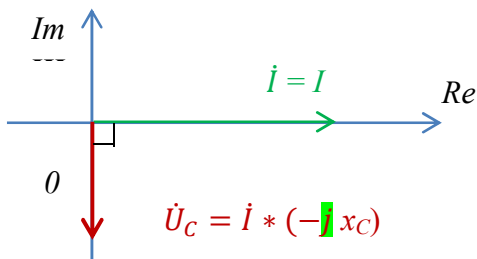
**Рис. 4.** Помноження комплексу  $i$  на  $R$  **не змінює** положення отриманого комплексного числа  $\dot{U}_R = i R$  на комплексній площині, що відповідає тому факту, що вектори  $\vec{I}$  і  $\vec{U}$  на активному опорі  $R$  **співпадають** по фазі.

2) Закон Ома для **індуктивності  $L$**  (в символічній формі)



**Рис. 5.** Помноження комплексу  $i$  на  $x_L$  перетворює його на напругу. Але (щоб повернути  $i * x_L$  на  $90^\circ$  проти годинникової стрілки) добуток  $i * x_L$  слід помножити на  $j$ .

2) Закон Ома для **ємності  $C$**  (в символічній формі)



**Рис. 6.** Помноження комплексу  $i$  на  $x_C$  перетворює його на напругу. Але (щоб повернути  $i * x_C$  на  $90^\circ$  за годинниковою стрілкою – clockwise, CW, eng.) добуток  $i * x_C$  слід помножити на  $j$ .

Таким чином, в комплексній формі опори  $R$ ,  $x_L$ ,  $x_C$  мають записуватися як  $R$ ,  $+jx_L$ , та  $-jx_C$ .  
Неувага до  $\pm j$  зробить результати розрахунку неприйнятними!!!

Щодо законів Кірхгофа, то:

**I. Для вузла** з трьома (наприклад) струмами  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$ , Рис. 7, **перший закон Кірхгофа** (закон струмів Кірхгофа) є справедливим для *миттєвих* значень:  $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ . Цей закон є також справедливим для *векторних* значень (вміти пояснити чому),

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad (4)$$

а отже і для їх комплексних зображень:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0. \quad (5)$$

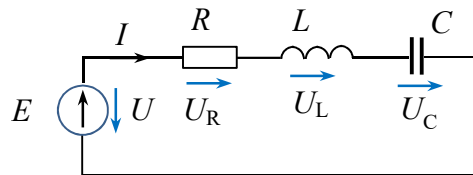
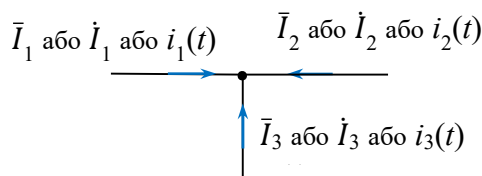


Рис. 7. До 1-го закону Кірхгофа в символічній формі.

Рис. 8. До 2-го закону Кірхгофа в символічній формі.

**II. Для контура** з трьома (наприклад) елементами, Рис. 8, з напругами  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$ ,  $u_C(t)$  **другий закон Кірхгофа** (закон напруг Кірхгофа) є справедливим для *миттєвих* значень:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t). \quad (6)$$

Цей закон є також справедливим для *векторних* значень (пояснити чому), а отже їх комплексних зображень:

$$\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{E}. \quad (7)$$

або

$$\dot{I} R + \dot{I} jx_L + \dot{I} (-jx_C) = \dot{E}. \quad (8)$$

Звідси витікає закон Ома в символічній формі

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + jx_L - jx_C} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}},$$

де  $\underline{Z} = R + jx_L - jx_C = z^* e^{j\varphi}$  – повний опір кола (контура) в символічній (комплексній) формі.

Його модуль  $z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$  – це знайомий нам вираз, отриманий раніше за допомогою ВД.

Підсумовуючи, закони Кірхгофа в символічній формі можна записати у вигляді:

$$\sum \dot{I}_k = 0 \quad (\text{I закон Кірхгофа, закон для вузла}); \quad \sum \dot{E}_k = \sum \dot{U}_k \quad (\text{II закон Кірхгофа, закон для контура}).$$

Як витікає з наведених формул, розрахунок сталих процесів символічним методом може бути виконаний тими ж методами, що і розрахунок кіл постійного струму (якщо не забувати про  $j$  в виразах для опорів  $+jx_L$  та  $-jx_C$ ).

## Розрахунок потужності в символічній (комплексній) формі

Виходячи з аналогії розрахунку кіл змінного струму (*символічним методом!*) і кіл постійного струму, комусь може здатися, що повна потужність  $S$ , споживана пасивним двополюсником, знаходиться як  $\dot{U} * \dot{I}$ . Як ми зараз побачимо, такий прийом є помилковим.

Нехай комплекси  $\dot{U}$  і  $\dot{I}$  на затискачах двополюсника  $\Pi$  (Рис. 9) записані як

$$\dot{U} = U e^{j\alpha}, \quad \dot{I} = I e^{j\beta}$$

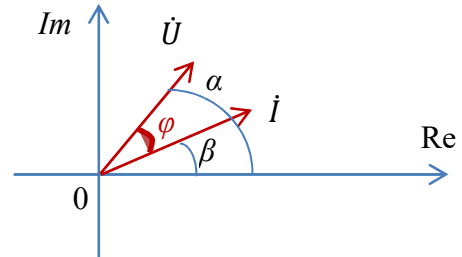
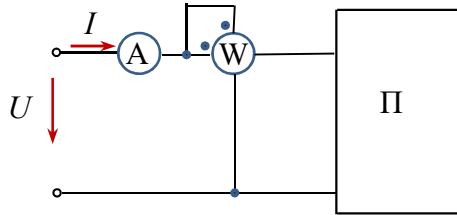


Рис. 9. Ватметр вимірює активну потужність кола за ним. Рис. 10. Комплекси  $\dot{U}$  і  $\dot{I}$  на затискачах.

$$\text{Тоді } \dot{U} * \dot{I} = U * I * e^{j(\alpha + \beta)} = UI \cos(\alpha + \beta) + jUI \sin(\alpha + \beta). \quad (9)$$

Можна побачити, що обидва доданки в (9) не мають фізичного змісту (сенсу). Дійсно, перший з них,  $UI \cos(\alpha + \beta)$ , став би активною потужністю  $P$ , якщо б в дужках була **не** сума, а **різниця** фаз  $\alpha$  і  $\beta$ , що традиційно позначається буквою  $\varphi$  ( $= \alpha - \beta$ ).

З метою отримання  $P$  в першому доданку в (9) і  $Q$  в другому доданку, використовують штучний прийом, а саме розраховують "S з тильдою" як  $\tilde{S} = U * I^*$ , де  $I^*$  є комплексне число, *сполучене* до  $\dot{I}$ , тобто  $I^* = I e^{-j\beta}$ . Тоді

$$\tilde{S} = U * I^* = U * I * e^{j(\alpha - \beta)} = UI \cos(\alpha - \beta) + jUI \sin(\alpha - \beta) \quad \text{або}$$

$$\tilde{S} = U * I^* = UI \cos(\varphi) + jUI \sin(\varphi) \quad \text{або}$$

$\tilde{S} = U * I^* = P + jQ$ , де  $P$  – активна, а  $Q$  – реактивна потужність тієї частини кола, що знаходиться **поза** ватметром.

## Заступні схеми (схеми замещення – рос.) двополюсника на заданій частоті

По-перше нагадаємо, що загальний опір *послідовного* з'єднання є сумою **опорів** окремих елементів, а при *паралельному* з'єднання елементів сумують їх **провідності**.

Нагадаємо також про те, що (з урахуванням  $1/j = -j$ ) провідність індуктивності ( $\underline{b}_L$ ) і ємності ( $\underline{b}_C$ ):

$$\underline{b}_L = \frac{1}{\underline{x}_L} = \frac{1}{jx_L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jb_L$$

$$\underline{b}_C = \frac{1}{\underline{x}_C} = \frac{1}{-jx_C} = j \frac{1}{x_C} = jb_C$$

Нехай на заданій частоті  $\omega$  *вхідний* опір двополюсника

$$\underline{Z} = R + jx \quad (10)$$

Два простих питання:

А) Яке це з'єднання (послідовне чи паралельне)? Б) Які елементи з'єднані?

Зараз подивимось яка у цього двополюсника *вхідна провідність*.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jx_L} = \frac{R - jx_L}{R^2 + x_L^2} = \frac{R}{R^2 + x_L^2} - j \frac{x_L}{R^2 + x_L^2} = g - jb_L$$

Тобто послідовному з'єднанню активного і індуктивного опорів відповідає паралельне з'єднання (також) активного і (також) індуктивного елементів, що характеризуються їх провідностями

$$g = \frac{R}{R^2 + x_L^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{z^2} \quad (11)$$

$$b_L = \frac{x_L}{R^2 + x_L^2} = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega L}{z^2} \quad (12)$$

Звернемо увагу на те, що  $g$  і  $b_L$  в отриманих формулах залежать від частоти  $\omega$ .

Це означає, що фізично існуючим  $R$  і  $L$  на різних частотах будуть відповідати різні  $g$  і  $b_L$ , тобто  $L$ , що визначаються за формулами (11) і (12).

В якості вправи, розглянемо паралельне з'єднання  $R$  і  $L$ , тобто

$$\underline{Y} = g - jb_L; \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g - jb_L} = \frac{g + jb_L}{g^2 + b_L^2} = \frac{g}{g^2 + b_L^2} + j \frac{b_L}{g^2 + b_L^2} = r + jx_L$$

Знову бачимо з'єднання (послідовне на цей час) активного і індуктивного опорів. І знову еквівалентні  $r$  і  $x_L$  залежать від частоти:

$$r = \frac{g}{g^2 + b_L^2} = \frac{g}{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad x_L = \frac{b_L}{g^2 + b_L^2} = \frac{\frac{1}{\omega L}}{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Приклад розрахунку електричного кола, показаного на Рис. 11, надається нижче.

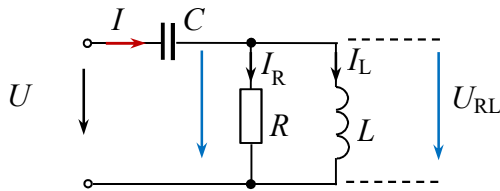


Рис. 11

Еквівалентний комплексний опір паралельних  $R$  і  $L$ , позначимо як  $\underline{Z}_2$  і знайдемо як

$$\underline{Z}_2 = \frac{R \cdot jx_L}{R + jx_L} = \frac{R \cdot jx_L (R - jx_L)}{(R + jx_L)(R - jx_L)} = \frac{R \cdot jx_L (R - jx_L)}{R^2 + x_L^2} = \frac{Rx_L^2 + jR^2x_L}{R^2 + x_L^2} = R_2 + jx_2$$

Вхідний опір кола:  $\underline{Z} = -jx_C + R_2 + jx_2 = R_2 + jx$ , де  $x = x_2 - jx_C$

Вхідний струм – знайти самостійно.

## Резонанс в складному електричному колі

Загальний метод знаходження резонансної частоти полягає в знаходженні такої  $\omega_0$ , на якій вхідний опір двополюсника  $\underline{Z}$  (або його вхідна провідність  $\underline{Y}$ ) є **чисто активними**.

Розглянемо двополюсник на Рис. 12, де гілки 1 і 2 з'єднані паралельно. Вхідна провідність  $\underline{Y}$  кола знаходиться як сума провідностей цих гілок:

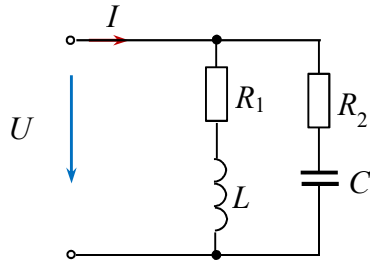


Рис. 12. Приклад складного кола.

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Групуючи дійсні та уявні складові, отримуємо:

$$\underline{Y} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - j \left( \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) = g - jb.$$

Прирівнюючи  $b = 0$ , знаходимо:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  тільки якщо  $R_1 = R_2$ .

Частота  $\omega_0$  є дійсним числом, тобто резонанс існує, якщо одночасно

$$R_1 < \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ і } R_2 < \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{або} \quad R_1 > \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ і } R_2 > \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Найбільш цікавим є випадок, коли  $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R$

В цьому випадку  $b = 0$ , тобто резонанс існує на будь-якій частоті, а вхідний опір  $R$  є незмінним (незалежним від частоти).

## Розрахунок електричних кіл змінного струму з магнітними зв'язками (взаємними індуктивностями)

У випадку відокремленого контура 1 із струмом  $i_1$  та (власною) індуктивністю  $L_1$  (Рис. 1) **потокозчеплення** з цим контуром

$$\Psi_{11} = L_1 i_1$$

===== Вставка (Термін потокозчеплення) =====

Термін **потокозчеплення** — повний магнітний потік [Вб - Вебер], який перетинає всі витки котушки (магнітний потік, «зчеплений» з усіма витками, Рис. 2).

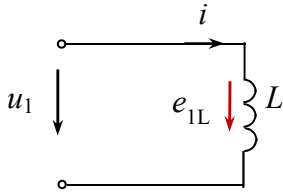
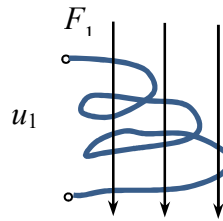


Рис. 1. Умовні додатні напрями обирають однаковими, в такому разі їх знаки збігаються.



$$\Psi_{11} = \phi_1 1 + \phi_2 2 + \phi_3 3 \text{ [Вб]}$$

Рис. 2. До визначення потокозчеплення.

ЕРС самоіндукції (при  $L_1 = const.$ )

$$e_{1L}(t) = -\frac{d}{dt} \Psi_{11} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Величина  $L_1$  є суттєво додатною, оскільки  $\Psi_{11}$  і  $i_1$  пов'язані правилом правого гвинта.

Нехай тепер в просторі присутня ще одна котушка **2** із струмом  $i_2$ . Якщо магнітна проникність  $\mu$  середовища не залежить від напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}$ , то на основі принципу накладання (суперпозиції) повне **потокозчеплення** контура 1

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} \tag{1}$$

Звернімо увагу на індекси при  $\Psi_{11}$  і  $\Psi_{12}$ : перший індекс вказує номер контура (котушки), а другий – струм, який обумовлює дане потокозчеплення.

Із досвіду відомо, що при  $\mu = const$  потокозчеплення взаємної індукції

$$\Psi_{12} = M_{12} i_2$$

де  $M_{12}$  – взаємна індуктивність контурів 1 і 2 (вимірюється в Гн, як і власна індуктивність).

Аналогічно, повне **потокозчеплення** контура 2:

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} \tag{2}$$



де  $\Psi_{22} = L_2 i_2$ ;  $\Psi_{21} = M_{21} i_1$ .

Можна показати (див. підручники ТОЕ), що  $M_{21} = M_{12} = M$ .

Таким чином,

$$\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \quad (3)$$

$$\Psi_2 = L_2 i_2 \pm M i_1$$

В системі (3) величина  $M$  вважається додатною, а згодний або зустрічний напрямок магнітних потоків враховувався знаком ( $\pm$ ).

Систему (3) можна також переписати у вигляді

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad (4)$$

$$\Psi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

Тоді величина  $M$  вважається алгебраїчною.

### **Коефіцієнт зв'язку $k$ двох котушок**

По мірі віддалення двох магнітно-зв'язаних котушок їх магнітний зв'язок зменшується і при достатньо великій відстані котушок їх взаємну індуктивність  $M$  можна не враховувати.

**Ступінь** магнітного зв'язку між контурами (магнітно-зв'язаними котушками  $L_1$ ,  $L_2$ ) характеризується **коефіцієнтом зв'язку  $k$** .

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad (5)$$

або

$$k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}} = \frac{x_M}{\sqrt{x_{L1} \cdot x_{L2}}}$$

Важливо показати, що  $k < 1$ . Для цього запишемо

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = \frac{M_{12} \cdot M_{21}}{L_1 \cdot L_2}$$

Оскільки

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2}; \quad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}; \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1},$$

То

$$k^2 = \frac{M_{12} \cdot M_{21}}{L_1 \cdot L_2} = \frac{\frac{\Psi_{12}}{i_2} \cdot \frac{\Psi_{21}}{i_1}}{\frac{\Psi_{11}}{i_1} \cdot \frac{\Psi_{22}}{i_2}} = \frac{\Psi_{12} \cdot \Psi_{21}}{\Psi_{11} \cdot \Psi_{22}}$$

Оскільки  $\Psi_{12} < \Psi_{22}$  та  $\Psi_{21} < \Psi_{11}$ , то  $k^2 < 1$ , а отже і  $k < 1$ . Якщо, наприклад,  $L_1 = 1$  Гн, а  $L_2 = 4$  Гн, то  $M < \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ , тобто  $M < 2$  Гн. Тобто у випадку дуже доброго магнітного зв'язку, коли  $k$  наближається до одиниці,  $L_1 < M < L_2$ .

В цьому гіпотетичному випадку (коли  $k = 1$ ) весь магнітний потік, що створений струмом в одній котушці, повністю зчіплюється з витками другої котушки. Це може мати місце тільки у випадку, коли обидві котушки займають у просторі одне і те ж положення.

Правильний висновок про взаємний напрямок потоків можна зробити, якщо відомий напрямок намотки котушок та напрямок струмів в магнітно-зв'язаних котушках.

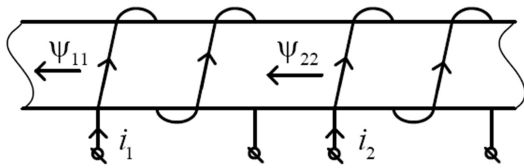


Рис. 3. Магнітні потоки узгоджені.

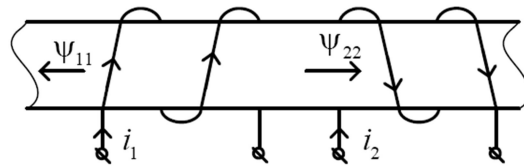


Рис. 4. Магнітні потоки зустрічні.

Потоки можуть бути зустрічними і в випадку на Рис. 3, якщо напрямок струму  $i_1$  або струму  $i_2$  змінити на протилежний. Для врахування напрямків потоків само- і взаємоіндукції по одному із затискачів кожної котушки позначають точками і називають **однойменними**.

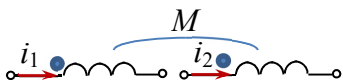


Рис. 5. Потоки узгоджені.

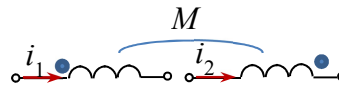


Рис. 6. Потоки зустрічні.

Затискачі звуться **однойменними**, якщо при однаковій орієнтації струмів відносно цих затискачів потоки само- і взаємоіндукції ( $\Psi_{11}$  та  $\Psi_{12}$  або  $\Psi_{22}$  та  $\Psi_{21}$ ) направлені узгоджено.

Якщо індуктивно-зв'язаними є тільки дві котушки, то їх затискачі можна розмістити так, щоб їх взаємна індуктивність  $M$  була би додатною. Якщо індуктивно-зв'язаними є три або більше котушок, то в загальному випадку для кожної окремої пари однойменні затискачі можуть бути позначені різними символами ( $\blacksquare$ ,  $\cdot$ ,  $*$ ), і так далі. Якщо використовується єдиний символ, наприклад точка, то  $M_{kn}$  (взаємна індуктивність котушок  $k$  і  $n$ ) має бути алгебраїчною величиною, тобто мати знак (плюс або мінус).

Нижче розглядаються процеси в двообмоточних системах, наприклад двообмоточних трансформаторах, де всі обмотки розташовані на одному осердді (стрижні) і при їх розмітці можна обійтися єдиним символом (точкою). Тоді всі взаємні індуктивності  $M$  вважаються додатними.

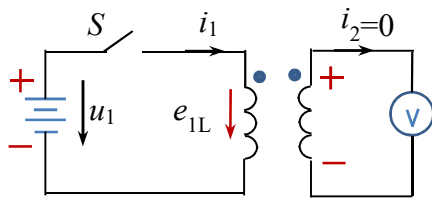
Диференціюючи систему (3) за часом, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= -\frac{d}{dt}\Psi_1 = -L_1 \frac{d}{dt}i_1 \pm M \frac{d}{dt}i_2 = e_{1L} + e_{1M} \\
 e_2 &= -\frac{d}{dt}\Psi_2 = -L_2 \frac{d}{dt}i_2 \pm M \frac{d}{dt}i_1 = e_{2L} + e_{2M}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Явище наведення ЕРС в деякому контурі при зміні струму в іншому контурі зветься взаємною індукцією. Наведену (індуковану) ЕРС ( $e_{1M}$  або  $e_{2M}$ ) називають ЕРС взаємної індукції.

Знаки "-" перед  $d\Psi_1/dt$  і  $d\Psi_2/dt$  ілюструють принцип електромагнітної інерції (принцип Ленца): *В системі контурів із струмами існує тенденція до збереження незмінних магнітних потоків, що зціпляються з окремими контурами. При будь-якій спробі змінити ці потоки в контурах виникають ЕРС, що намагаються перешкодити цій зміні.*

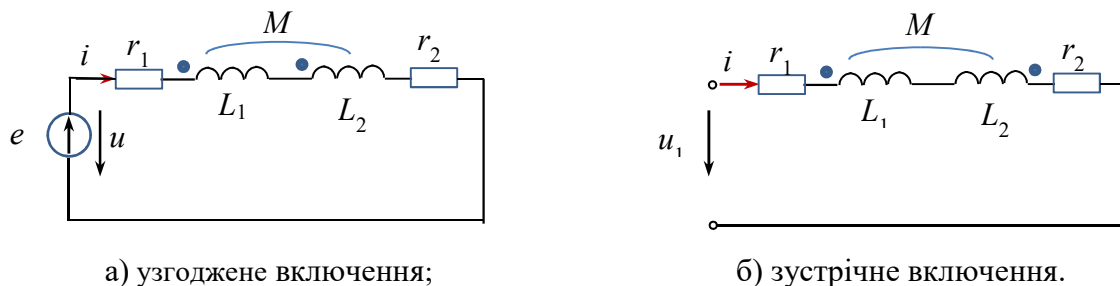
Цей принцип дозволяє експериментально знайти **однойменні** затискачі. Для цього можна скористатися схемою на Рис. 7.



**Рис. 7.** Точку на лівій котушці ставимо довільно, наприклад біля верхнього затискача. Це означає, що після замикання ключа S струм  $i_1$  буде втікати в точку. Відповідно до принципу електромагнітної інерції (*зберігаючи незмінні магнітні потоки незмінними*) струм  $i_2$  буде **втікати** з точки котушки 2. Тобто затискач з точкою котушки 2 відіграє роль додатного полюса і стрілка вольтметра (гальванометра з нулем в середині шкали) відхилиться вправо (якщо точка котушки 2 позначена вірно).

При відхиленні стрілка гальванометра вліво, точкою має бути позначений нижній затискач котушки 2.

З'ясувати положення **однойменних** затискачів можна і простіше. Для цього розглянемо послідовне з'єднання магнітно-зв'язаних котушок (Рис. 8), власні індуктивності і активні опори яких позначені, відповідно, як  $L_1, r_1$  та  $L_2, r_2$ .



**Рис. 8.** Послідовне з'єднання магнітно-зв'язаних котушок при їх узгодженому та зустрічному включенні.

В схемі на Рис. 8(а) струм  $i$  зорієнтований по відношенню однойменних затискачів однаково (втікає). Тому включення котушок Рис. 8(а) є узгодженим. Згідно до II закону Кірхгофа

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$u(t) = ir_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + ir_2 + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \quad (6)$$

Рівняння (6) можна також переписати у вигляді:

$$u(t) = i(r_1 + r_2) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

або

$$u(t) = ir_{\text{екв}} + L_{\text{екв}(+)} \frac{di}{dt}$$

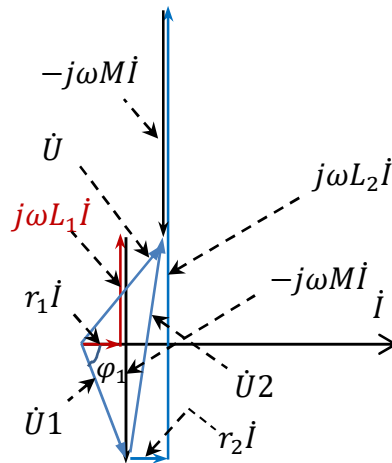
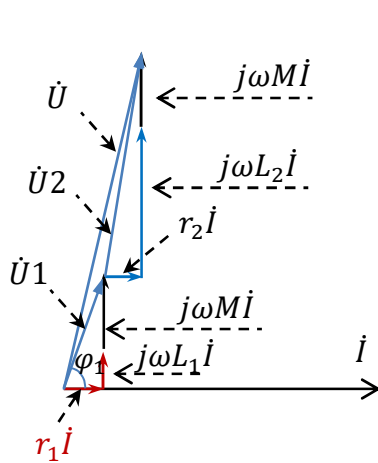
де  $r_{\text{екв}} = r_1 + r_2$ , а  $L_{\text{екв}(+)} = L_1 + L_2 + 2M$ .

Вираз (6) переписуємо в символічній формі

$$\dot{U} = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + \dot{I} r_2 + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} \quad (6')$$

і будемо векторну діаграму (ВД) на Рис. 9(а). Вважаємо для визначеності, що

$$L_1 = 1 \text{ Гн}, L_2 = 4 \text{ Гн}, M \approx \sqrt{L_1 L_2} = 2 \text{ Гн}.$$



**Рис. 9(а).** ВД для узгодженого включення. **Рис. 9(б).** ВД для зустрічного включення.

Для зустрічного включення котушок рівняння (6) приймає вигляд

$$u(t) = ir_1 + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + ir_2 + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \quad (7)$$

І може бути переписати у вигляді:

$$u(t) = i(r_1 + r_2) + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}$$

або

$$u(t) = ir_{\text{екв}} + L_{\text{екв}(-)} \frac{di}{dt}$$

де  $r_{\text{екв}} = r_1 + r_2$ , а  $L_{\text{екв}(-)} = L_1 + L_2 - 2M$ .

Тобто, наявність взаємної індукції при послідовному зустрічному підключенні котушок зменшує індуктивність кола.

В символічній формі рівняння для Рис. 8(б) має вигляд

$$\dot{U} = r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \dot{I} r_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} \quad (7')$$

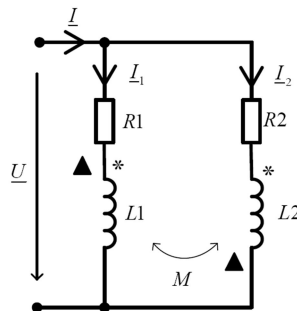
а ВД змінюється відповідно до Рис. 9(б). В цій ВД є прикметним, що при  $M > L_1$  має місце ефект «хибної» ємності  $\varphi_1 < 0$  (напруга  $U_1$  відстає від струму  $I$  – так званий ефект “фіктивної” ємності.)

Оскільки  $L_{\text{екв}(-)} = L_1 + L_2 - 2M$ , а  $L_{\text{екв}(+)} = L_1 + L_2 + 2M$ , то значення  $M$  знаходиться як

$$M = \frac{L_{\text{екв}(+)} - L_{\text{екв}(-)}}{4}$$

### Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок

Розглянемо електричну схему, представлену на Рис. 10.



**Рис. 10.** Електричне коло з паралельно з'єднаними, магнітно-зв'язаними котушками.

$$i = i_1 + i_2$$

$$u = r_1 i_1 + \frac{d}{dt} \Psi_1$$

$$u = r_2 i_2 + \frac{d}{dt} \Psi_2$$

де  $\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$ ;  $\Psi_2 = L_2 i_2 \pm M i_1$ .

В подальшому, **верхній** знак відповідає **однаковій** орієнтації струмів відносно однойменних затискачів (в схемі на Рис. 10 присутні тільки символи \*).

При гармонійних (синусоїдних або косинусоїдних) струмах

$$i = i_1 + i_2$$

$$\dot{U} = r_1 i_1 + j\omega L_1 i_1 \pm j\omega M i_2$$

$$\dot{U} = r_2 i_2 + j\omega L_2 i_2 \pm j\omega M i_1$$

або (розташовуючи в останніх двох рівняннях струми  $i_1$  і  $i_2$  один під одним)

$$i = i_1 + i_2$$

$$\dot{U} = Z_1 i_1 \pm Z_{12} i_2 \quad (8')$$

$$\dot{U} = \pm Z_{21} i_1 + Z_2 i_2 \quad (8'')$$

де  $Z_{12} = Z_{21} = Z_m = j\omega M$  – комплексний опір взаємної індукції.

Згідно правилу Крамера, розв'язок системи (8')-(8'') відносно  $i_1$  та  $i_2$  має вигляд

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U} & \pm Z_m \\ \dot{U} & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 & \pm Z_m \\ \pm Z_m & Z_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{U}(Z_2 \mp Z_m)}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}; \quad i_2 = \frac{\dot{U}(Z_1 \mp Z_m)}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}$$

$$i = i_1 + i_2 = \dot{U} \frac{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_m}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}$$

Таким чином, вхідний опір кола

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{i} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_m^2}{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_m}$$

Нехай для спрощення  $r_1 = r_2 = 0$  і котушки включені узгоджено. Тоді

$$Z_{\text{вх}} = j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

тобто

$$L_{\text{екв}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

Якщо  $L_1 = L_2 = L$ , а  $M = 0.9L$ , то

$$Z_{\text{вх}} = j\omega \frac{L^2 - 0.81L^2}{2L - 1.8L} = j\omega \frac{0.19L}{0.2} \approx j\omega L$$

Зауважимо, що якщо б магнітний зв'язок був відсутній ( $M = 0$ ), то  $Z_{\text{вх}} = 0.5j\omega L$ , тобто магнітний зв'язок збільшує вхідний опір кола.

При зустрічному включенні котушок

$$Z_{\text{вх}} = j\omega \frac{L^2 - 0.81L^2}{2L + 1.8L} = j\omega \frac{0.19L}{3.8} \approx 0.05j\omega L.$$

Ця обставка використовується для виготовлення проволочених резисторів з малою індуктивністю, де використовується так звана біфілярна намотка.