ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

Аналіз та синтез багатомірних систем автоматичного управління

Опорний конспект лекцій

Професор Олександр Петренко
Старший викладач Дмитро Астахов

ПЕРЕДМОВА

Опорний конспект лекцій з дисципліни «Теорія автоматичного управління», розділ «Аналіз та синтез багатомірних систем автоматичного управління» призначений для студентів старших курсів технічних вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології».

В навчальному посібнику висвітлюються основні поняття та положення методу простору станів для аналізу та синтезу багатомірних систем автоматичного управління. Розглянуто математичний апарат, який використовується для опису багатомірних систем. Розглянуто поняття керованості та спостерігаємості багатомірних систем та наведено критерії керованості та спостерігаємості.

Детально розглянуто методики вирішення задач модального управління та аналітичного конструювання оптимальних регуляторів. Вирішення цих задач передбачає використання зворотних зв’язків за вектором станів системи. Вирішення задачі модального управління забезпечує бажане розміщення полюсів замкненої системи на комплексній площині. Вирішення задачі оптимального конструювання забезпечує функціонування замкненої системи в умовах мінімізації інтегрального квадратичного критерію якості.

Неконтрольовані випадкові перешкоди, які діють на об’єкти управління пропонується розглядати в термінах сигналів хвильової структури. При цьому випадкові перешкоди запропоновано розглядати як вихід певної динамічної системи, параметри якої змінюються випадковим, кусково-безперервним чином в випадкові моменти часу..

Надано основні положення конструювання спостерігаючих пристроїв для отримання оцінок векторів станів системи і неконтрольованих випадкових перешкод. Отримані оцінки векторів станів системи та неконтрольованих випадкових перешкод можуть бути використані в законах управління при вирішенні задач модального управління та аналітичного конструювання оптимальних регуляторів.

У додатку наведені типові характеристичні поліноми, які можна використовувати при синтезі замкнених систем, у тому числі при розробці асимптотичних спостерігаючих пристроїв.

Навчальний посібник може бути корисним для аспірантів і науковців, які займаються розробкою та дослідженням багатомірних систем автоматичного управління.

ЗМІСТ

Вступ

У попередніх розділах курсу «Теорія автоматичного управління» були розглянуті класичні підходи та методи аналізу і синтезу систем автоматичного управління, яким властиві наступні особливості:

Сфера застосування: одномірні, лінійні, динамічні системи.

Математичний апарат:

- Лінійні диференційні рівняння.
- Перетворення Лапласа $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$.
- Передаточні функції $W(s) = M_m(s)/N_n(s)$, m – порядок чисельника, n – порядок знаменника, $n > m$.
- $N_n(s)$ – характеристичний поліном системи.
- Частотні характеристики - $A(\omega), \varphi(\omega), W(j\omega)$.
- Використання типових ланок та правила перетворення структурних схем.

Задачі, які вирішуються: визначення стійкості систем автоматичного управління; використання алгебраїчних (Гурвіца, Рауса) та частотних (Михайлова, Найквіста-Михайлова) критеріїв стійкості систем; визначення передавальних функцій за управляючим та перешкоджаючим впливами на систему; побудова перехідних процесів системи та ін.

Більш складною задачею є дослідження систем з декількома вхідними та вихідними змінними та зворотними зв'язками, або *багатомірних систем*.

Багатомірними системами називаються автоматичні системи керування, в яких є декілька вхідних та вихідних змінних. Відповідно до цього, об'єкти, що мають декілька вихідних змінних, називають *багатомірними об'єктами*. При вивченні багатомірних систем треба враховувати їх певні особливості:

Сфера застосування: багатомірні, лінійні, динамічні системи, які працюють в умовах дії неконтрольованих випадкових перешкод.

Математичний апарат:

- Системи лінійних диференційних рівнянь.
- Матричні диференційні рівняння. Операції з матрицями.
- Використання матричної експоненти.
- Використання поняття керованості та спостерігаємості системи.

Задачі, які вирішуються:

- Аналіз систем: визначення, чи має система властивості керованості та спостерігаємості; визначення динамічних характеристик системи.
- Синтез систем: а) вирішення задачі модального управління; б) вирішення задачі аналітичного синтезу оптимального регулятора.
- Отримання математичних моделей неконтрольованих випадкових перешкод в просторі станів.
- Проектування спостерігаючого пристрою, який забезпечує отримання оцінки вектору станів системи та діючих на об'єкт випадкових перешкод.

1. Математичний апарат для опису багатомірних систем.

В основі аналізу та синтезу багатомірних систем автоматичного управління лежить *метод простору станів системи*. Багатомірний об'єкт управління в загальному вигляді можна представити, як показано на рис. 1.1. Вхідні змінні (управляючі сигнали) $u_1(t)$, $u_2(t)$, …, $u_m(t)$ утворюють *вектор вхідних змінних* ***u(t)***, де m – кількість входів.

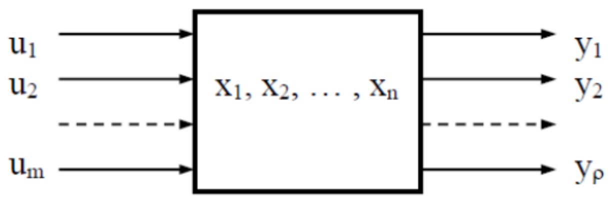

Рис. 1.1. Багатомірний об'єкт автоматичного управління

Вихідні змінні (вихідні сигнали) $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_p(t)$ утворюють *вектор вихідних змінних* ***y(t)***, де p – кількість виходів.

Метод простору станів системи полягає в тому, що для характеристики внутрішнього стану системи вводять деякі певні змінні системи $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, з початковими умовами $x_1(0)$, $x_2(0)$, …, $x_n(0)$, за допомогою яких з урахуванням дії вхідних сигналів u_1, u_2, …, u_m та динамічних властивостей системи можна однозначно визначити динамічні процеси, які відбуваються у системі, та визначити вектор вихідних змінних y_1, y_2, …, y_p.

Внутрішні змінні багатомірної x_1, x_2, …, x_n утворюють *вектор станів системи* ***x(t)***, де n – порядок системи. Поточний стан системи у довільний момент часу однозначно визначається вектором станів системи ***x(t).***

При застосуванні методу простору станів виділяють поняття простору керувань, простору вихідних змінних, простору стану системи та простору збурень.

Слід відзначити, що одномірні об'єкти та системи автоматичного управління є окремим випадком багатомірної системи у випадку, коли $m = p = 1$.

При використанні методу простору станів математичну модель багатомірної системи представляють, як правило, системою диференційних рівнянь у нормальній формі Коші. Це така форма представлення диференційних рівнянь, коли вони представлені у вигляді системи диференційних рівнянь першого порядку у наступному вигляді:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t) u_j(t) \text{ , } i=1,\dots,n, \tag{1.1}$$

де: n – порядок системи; m – кількість входів системи;

$u_j(t)$ – вхідні змінні системи; $x_j(t)$ – змінні станів системи.

Рівняння (1.1) у матричній формі можна представити у наступному вигляді:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{1.2}$$

де $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \cdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix}$;

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

При використанні моделі системи у вигляді (1.2) вектор вихідних змінних ***y(t)*** розглядається, як лінійна комбінація компонентів вектору станів системи ***x(t)***:

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t), \tag{1.3}$$

де $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_p \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}$.

Таким чином, математична модель багатомірної системи складається с двох рівнянь (1.2), (1.3), перше з яких називається рівнянням динаміки системи, а друге – рівнянням вимірювання, або спостереження.

Для системи автоматичного управління, динамічні властивості якої визначаються рівнянням (1.2), можна отримати вираз для характеристичного поліному системи у такому вигляді:

$$N(s) = det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}], \tag{1.4}$$

де s – змінна Лапласа; $\boldsymbol{I}$ – одинична матриця; $\boldsymbol{A}$ – матриця динаміки системи.

Приклад 1.1.

Побудувати математичну модель системи у просторі станів для одномірної системи, яка описується диференційним рівнянням

$$0{,}5\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 0{,}8\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2{,}4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 3u(t).$$

Рішення.

Введемо позначення: $x_1 = y$; $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$; $x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y}$.

Після введення позначень диференційне рівняння 3-го порядку можна записати у вигляді нормальної форми Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -2(0{,}8x_3 + 2{,}4x_2 + 4x_1) + 6u \end{cases}.$$

В результаті отримуємо систему матричних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases},$$

де $\boldsymbol{u}(t) = u(t)$; $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -4{,}8 & -1{,}6 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{C}$ **=** **[**1 0 0**].**

Приклад 1.2.

Побудувати математичну модель системи, яка представлена на рис. 1.2, у просторі станів. Система складається з двох підсистем. Одна підсистема представлена у вигляді аперіодичної ланки другого порядку з коефіцієнтом передачі k_1 та постійними часу T_1 і T_2. Друга підсистема є аперіодичною ланкою першого порядку з коефіцієнтом передачі k_2 та постійною часу T_1. Виходи підсистем подаються на сумуючий елемент і через ланку k_3 подаються на вихід системи.

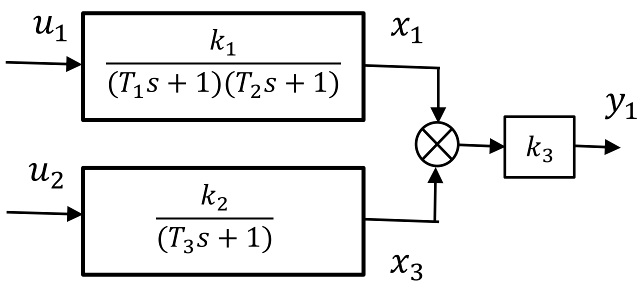

Рис. 1.2. Приклад багатомірної системи

Рішення.

Аналіз системи показує, що вона має порядок n = 3, два входи u_1 і u_2 та один вихід y_1. Для заданої системи запишемо систему диференційних рівнянь у наступному вигляді:

$$\begin{cases} T_1T_2\ddot{x}_1 + (T_1 + T_2)\dot{x}_1 + x_1 = k_1u_1 \\ T_3\dot{x}_3 + x_3 = k_2u_2 \\ y = k_3(x_1 + x_3) \end{cases}$$

Перетворимо отриману систему диференційних рівнянь у наступну форму:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\dot{x}_1 - \frac{1}{T_1T_2}x_1 + \frac{k_1}{T_1T_2}u_1 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_3}x_3 + \frac{k_2}{T_3}u_2 \\ y = k_3(x_1 + x_3) \end{cases}.$$

Вводячи позначки $\dot{x}_1 = x_2$, можемо записати:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_1T_2}x_1 - \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}x_2 + \frac{k_1}{T_1T_2}u_1 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_3}x_3 + \frac{k_2}{T_3}u_2 \\ y = k_3(x_1 + x_3) \end{cases}.$$

З отриманої системи диференційних рівнянь та одного алгебраїчного рівняння отримуємо матриці системи в просторі станів:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases},$$

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix}$;

$\boldsymbol{C} = [c_{11} \quad 0 \quad c_{13}]$

де $a_{21} = -\frac{1}{T_1T_2}$; $a_{22} = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$; $a_{33} = -\frac{1}{T_3}$;

$b_{21} = \frac{k_1}{T_1T_2}$; $b_{32} = \frac{k_2}{T_3}$, $c_{11} = c_{13} = k_3$.

2. Математична модель системи в просторі станів в умовах дії випадкових перешкод.

Реальні системи автоматичного управління завжди функціонують в умовах дії неконтрольованих випадкових перешкод. Математична модель системи в просторі станів в умовах дії випадкових перешкод має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

де $\boldsymbol{x}(t)$ – вектор стану системи, який повністю характеризує поточний стан системи;

$\boldsymbol{y}(t)$ – вектор вихідних змінних системи, який безпосередньо забезпечує досягнення мети управління;

$\boldsymbol{u}(t)$ – вектор управляючих сигналів, які подаються на виконавчі органи системи управління;

$\boldsymbol{w}(t)$ – вектор неконтрольованих випадкових перешкод, які впливають на об'єкт керування, і викликають відхилення вектору вихідних змінних $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ від заданих значень;

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{F}$ - матриці коефіцієнтів математичної моделі об'єкту, які можуть бути отримані при вирішенні задач структурної і параметричної ідентифікації об'єкту управління.

Вектор випадкових перешкод $\boldsymbol{w}(t)$ можна розглядати, як вихід певної уявної динамічної системи, математична модель якої має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Dz}(t) + \boldsymbol{\alpha i \Delta i}(t-\tau) \\ \boldsymbol{w}(t) = \mathbf{Hz}(t) \end{cases} \qquad (2.2)$$

де $\boldsymbol{z}(t)$ - вектор "стану" перешкод, які діють на об'єкт управління;

$\boldsymbol{w}(t)$ – еквівалентні сигнальні перешкоди, які при подачі на вхід системи викликають відповідні відхилення вектору вихідних змінних $\boldsymbol{y}(t)$ від завданих значень;

$\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ - матриці коефіцієнтів математичної моделі неконтрольованих випадкових перешкод, структура і параметри яких залежать від характеру реально діючих на об'єкт перешкод і можуть бути визначені на основі експериментальних досліджень;

$\boldsymbol{\Delta}_{i}$ - вектор послідовності δ-функцій з ваговими коефіцієнтами α_i, які змінюються випадковим, кусочно-постійним шляхом у випадкові моменти часу.

Структурну схему математичних моделей (2.1), (2.2) наведено на рис. 2.1.

При синтезі систем автоматичного управління важливим є питання щодо можливості отримати завдані динамічні властивості замкненої системи шляхом введення негативних зворотних зв'язків.

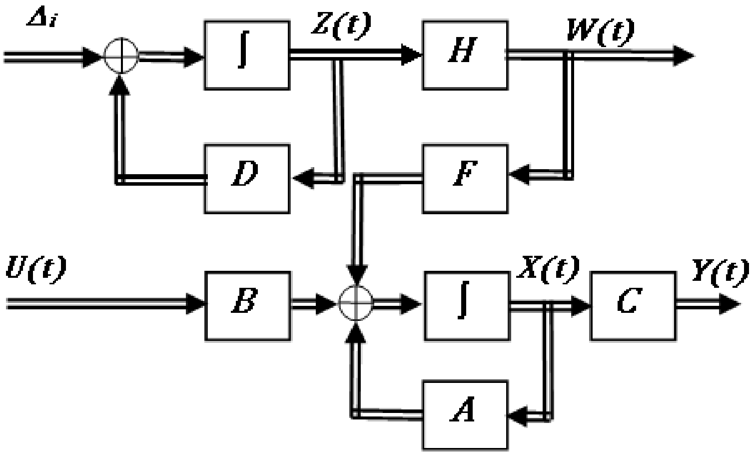

Рис. 2.1. Структура математичної моделі системи в просторі станів з врахуванням дії випадкових перешкод

Для отримання відповіді на поставлене питання введено поняття *повної керованості системи*.

3. Поняття керованості лінійної динамічної системи, критерій керованості.

Поняття *повної керованості* для системи (1.2) полягає у відповіді на питання щодо можливості шляхом введення зворотних зв'язків за вектором станів системи

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{3.1}$$

забезпечити бажане значення всіх компонентів вектору станів системи $\boldsymbol{x}(t)$.

Поняття повної керованості системи безпосередньо пов'язане з можливістю шляхом введення зворотних зв'язків розмістити корні характеристичного поліному системи на комплексній площині певним чином.

Критерієм повної керованості системи (1.2) є рівність рангу її матриці керованості $\boldsymbol{Q}_{к}$ порядку n системи:

$$rank\ \boldsymbol{Q_k} = n,$$

де матриця керованості визначається через матриці математичної моделі системи таким чином:

$$\boldsymbol{Q}_{\text{у}} = \left[\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \mathbf{A^2B},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{B}\right]. \tag{3.1}$$

Приклад 3.1.

Визначити, чи має властивості повної керованості система, яка була розглянута у прикладі 2.1. Матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ системи мають вид:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix}.$$

Рішення.

Оскільки система має порядок $n = 3$, то матриця керованості має вигляд:

$$\boldsymbol{Q}_{\text{у}} = \left[\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \mathbf{A^2B}\right].$$

Визначимо матриці, які входять до складу матриці керованості:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} & 0 \\ a_{22}b_{21} & 0 \\ 0 & a_{33}b_{32} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{21}a_{22} & a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A^2B} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{21}a_{22} & a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}b_{21} & 0 \\ a_{22}^2b_{21} & 0 \\ 0 & a_{33}^2b_{32} \end{bmatrix};$$

Підставляємо отримані матриці в матрицю керованості:

$$\boldsymbol{Q_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{21} & 0 & a_{22}b_{21} & 0 \\ b_{21} & 0 & a_{22}b_{21} & 0 & a_{22}^2b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & a_{33}b_{32} & 0 & a_{33}^2b_{32} \end{bmatrix}.$$

Якщо з отриманої матриці керованості можна сформувати такий визначник, який не дорівнює нулю, то система має властивості повної керованості. Зокрема, якщо взяти перші три стовпчики, то маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{21} \\ b_{21} & 0 & a_{22}b_{21} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{vmatrix} = -b_{21}\begin{vmatrix} 0 & b_{21} \\ b_{32} & 0 \end{vmatrix} = b_{21}b_{21}b_{32} \neq 0.$$

Таким чином, оскільки визначник, отриманий з матриці керованості, не дорівнює нулю, можна стверджувати, що система має властивості повної керованості.

4. Вирішення задачі модального управління.

Вирішення *задачі модального управління* полягає у тому, щоб розмістити корені характеристичного поліному замкненої системи на комплексній площині бажаним чином та мінімізувати вплив випадкових перешкод на вектор вихідних змінних шляхом реалізації закону управління такого виду:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K_1}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{K_2}\boldsymbol{w}(t), \tag{4.1}$$

де $\boldsymbol{K_1}$ **-** матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків, яка забезпечує бажане розміщення полюсів замкненої системи на комплексній площині;

$\boldsymbol{K_2}$ - матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків, яка забезпечує повну компенсацію впливу випадкових перешкод ***w(t)*** на вектор вихідних змінних ***y(t).***

Структурна схема замкненої системи, в якій реалізовано закон управління (4.1), має вигляд, як показано на рис. 4.1. Оскільки математичні моделі (2.1) і (2.2) є лінійними приближеннями, визначення чисельних значень елементів матриць $\boldsymbol{K_1}$ та $\boldsymbol{K_2}$ може бути проведено незалежно.

Для визначення елементів матриці зворотних зв'язків $\boldsymbol{K_1}$ при вирішенні задачі модального управління необхідно записати рівняння замкненої системи для системи (2.1) з врахуванням закона керування (4.1) в наступному вигляді:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = [\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K_1}][\boldsymbol{x}(t)]. \tag{4.2}$$

При вирішенні задачі модального управління шляхом вибору матриці $\boldsymbol{K_1}$ зворотних зв'язків системи можна отримати довільне бажане розміщення полюсів замкненої системи на комплексній площині. Для визначення чисельних значень елементів матриці $\boldsymbol{K_1}$ необхідно прирівняти характеристичний поліном замкненої системи бажаному характеристичному поліному:

$$det[\,s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K_1}] = \varphi_б(s), \tag{4.3}$$

де s – змінна Лапласа;

$\boldsymbol{I}$ – одинична матриця;

$\varphi_б(s)$ - бажаний характеристичний поліном замкненої системи.

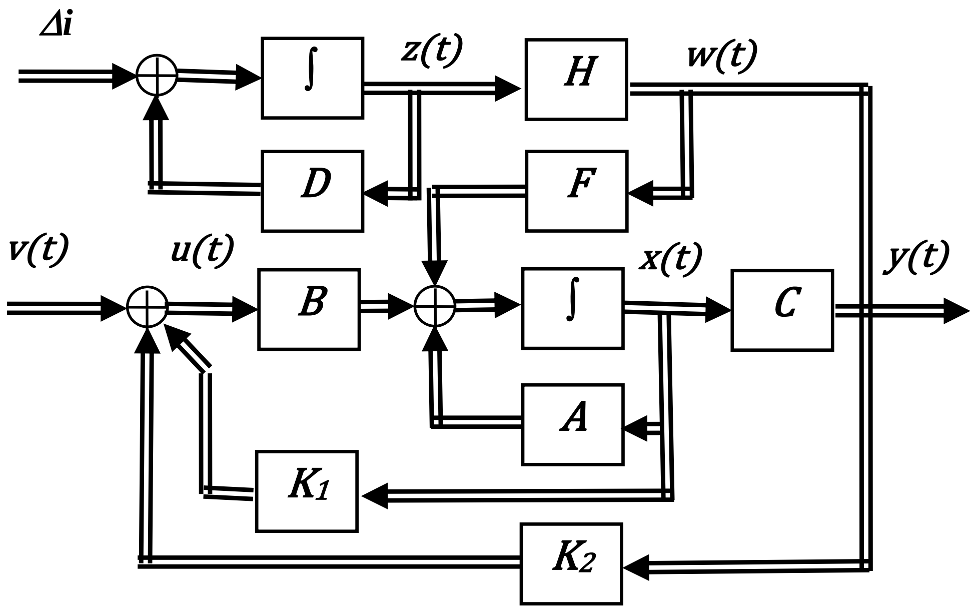

Рис. 4.1. Структура математичної моделі замкненої системи
при вирішенні задачі модального управління

Шляхом вибору бажаного характеристичного поліному замкненої системи та вибору ступеню віддалення полюсів замкненої системи від уявної осі $\omega_{0,}$ з (4.3) отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення чисельних значень елементів матриці зворотних зв’язків $\boldsymbol{K_1}$.

Треба відмітити, що задача модального управління однозначно вирішується тільки для систем з одним входом. Питання щодо вибору форми бажаного характеристичного поліному $\varphi_б(s)$, а також ступеню віддалення полюсів замкненої системи від уявної вісі важко піддаються формалізації і в значній мірі залежать від кваліфікації та досвіду розробника системи. Ось чому процес вирішення задачі модального управління безпосередньо пов'язаний з необхідністю математичного моделювання системи, в тому числі з використанням пакету MATLAB.

5. Побудова математичної моделі випадкових перешкод, які впливають на систему.

Неконтрольовані випадкові перешкоди, які діють на систему, можуть бути представлені у вигляді зваженої суми певних типових сигналів, параметри яких змінюються випадковим, кусково-постійним чином. Такі перешкоди можна представити у вигляді:

$$w(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_m f_m(t) \tag{5.1}$$

Випадковий сигнал (5.1) можна розглядати, як зважену комбінацію відомих базисних функцій, які мають невідомі вагові коефіцієнти. Якщо в якості базових функцій прийняти ступінчасті, лінійні та квадратичні сигнали, то вираз (5.1) можна представити у вигляді:

$$w(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2. \tag{5.2}$$

Динамічна модель, виходом якої є поліноміальний сигнал (5.2), може бути представлена у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) + \alpha_1 \cdot \delta_1(t - \tau_1) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) + \alpha_2 \cdot \delta_2(t - \tau_2) \\ \dot{z}_3(t) = \alpha_3 \cdot \delta_3(t - \tau_3) \end{cases} \tag{5.3}$$

Динамічну модель (5.3) можна представити у матричній формі

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\alpha i \Delta i}(t - \tau) \\ \boldsymbol{w}(t) = \mathbf{HZ}(t) \end{cases}, \tag{5.4}$$

де $\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ – вектор «станів» перешкод;

$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $H = [1 \quad 0 \quad 0]$, матриці, елементи яких можуть бути визначені на основі аналізу випадкових перешкод, які діють на об'єкт управління.

6. Визначення матриці зворотних зв'язків, яка забезпечує компенсацію впливу випадкових перешкод на систему.

Для визначення матриці коефіцієнтів зворотних зв'язків $\boldsymbol{K_2}$, яка забезпечує повну компенсацію впливу випадкових перешкод $\boldsymbol{w}(t)$ на вектор вихідних змінних системи $\boldsymbol{y}(t)$, представимо рішення системи рівнянь (2.1) у вигляді:

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{C}\int\left[\boldsymbol{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{FHz}(\tau)\right]d\boldsymbol{\tau}. \qquad (6.1)$$

Для того, щоб неконтрольовані випадкові перешкоди $\boldsymbol{w}(t)$, які діють на об'єкт, не впливали на вектор вихідних змінних $\boldsymbol{y}(t)$ необхідно і достатньо, щоб другий елемент (6.1) дорівнював нулю. Цього можна досягти у тому разі, якщо найдеться така матриця $\boldsymbol{K_2}$, для якої буде виконуватись умова:

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{BK_2} + \boldsymbol{FH} = 0,$$

відкіля отримуємо, що матриця $\boldsymbol{K_2}$ повинна задовольняти наступній умові:

$$\boldsymbol{BK_2} + \boldsymbol{FH} = \boldsymbol{0}. \qquad (6.2)$$

Якщо чисельні значення матриць ***B, F, H*** математичної моделі об'єкту керування визначені, матрицю $\boldsymbol{K_2}$ зворотних зв'язків можна визначити зі співвідношення (6.2).

7. Вирішення задачі аналітичного конструювання оптимального регулятора. Рівняння Ріккаті.

Якщо об'єкт управління лінійної системи (1.2) має властивості повної керованості, то корені характеристичного поліному замкненої системи шляхом відповідного вибору матриці $\boldsymbol{K}_1$ можна розмістити довільним шляхом на комплексній площині. Таким чином можна забезпечити будь-яку динаміку замкненої системи.

Однак, формальне вирішення задачі модального управління призводить до значного збільшення амплітуди управляючих сигналів. В любій практичній задачі синтезу замкненої системи автоматичного управління амплітуда управляючих сигналів $\boldsymbol{u}(t)$ обмежена, що накладає певні обмеження на можливе розміщення полюсів замкненої системи на комплексній площині.

Врахування такого обмеження призводить до постановки *задачі аналітичного конструювання оптимального регулятора*. При вирішенні цієї задачі вибір коефіцієнтів матриці зворотних зв'язків $\boldsymbol{K}_1$ передбачає оптимізацію інтегрального квадратичного критерію якості, який враховує одночасно і якість перехідного процесу системи, і величину управляючих сигналів.

Для об'єктів управління виду (1.2) закон управління виду

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K_1}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{7.1}$$

забезпечує мінімізацію інтегрального квадратичного критерію якості наступного виду:

$$\boldsymbol{I} = \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t_k}} \boldsymbol{x^T}(t)\boldsymbol{Q_1}(t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{dt} + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t_k}} \boldsymbol{u^T}(t)\boldsymbol{Q_2}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{dt} + \boldsymbol{x^T}(t_k)\boldsymbol{Q_0}\boldsymbol{x}(t_k), \tag{7.2}$$

де $\boldsymbol{x}(t)$ - вектор станів системи;

$\boldsymbol{u}(t)$ - вектор управляючих сигналів;

$\boldsymbol{Q_0}, \boldsymbol{Q_1}, \boldsymbol{Q_2}$ – завдані матриці вагових коефіцієнтів.

При цьому матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків $\boldsymbol{K_1}$ визначається таким чином:

$$\boldsymbol{K_1}(t) = \boldsymbol{Q_2^{-1}}(t)\boldsymbol{B^T}(t)\boldsymbol{R}(t), \tag{7.2}$$

де $\boldsymbol{R}(t)$ – рішення матричного рівняння Риккаті, яке має наступний вид:

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{Q}_{\mathbf{1}}(t) - \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{Q}_{\mathbf{2}}^{-\mathbf{1}}(t)\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{R}(t) \quad (7.3)$$

з кінцевою умовою в точці t_k : $\boldsymbol{R}(t_k) = \boldsymbol{Q}_{\mathbf{0}}$**.**

Для стаціонарних систем, у яких матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ не змінюються в часі, матриця коефіцієнтів оптимального зворотнього зв'язку $t \to \infty$ прагне до сталого значення і вираз (7.2) набуває наступного вигляду:

$$\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{Q}_{\mathbf{2}}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R}, \quad (7.3)$$

де $\boldsymbol{R}$ – позитивно визначене рішення матричного рівняння, яке витікає з рівняння (7.3), і яке набуває такого вигляду:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R} + \mathbf{RA} + \boldsymbol{Q}_{\mathbf{1}} - \mathbf{RBQ}_{\mathbf{2}}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R} = \mathbf{0}. \quad (7.4)$$

Таким чином, матрицю зворотних зв'язків $\boldsymbol{K}_{\mathbf{1}}$ можна визначити двома шляхами. По перше, цю матрицю можна визначити на основі рішення задачі модального управління, а по друге, шляхом вирішення задачі аналітичного конструювання оптимального регулятора. При вирішенні задачі синтезу реальної замкненої системи треба порівнювати отримані результати при використанні двох підходів шляхом математичного моделювання.

Слід відмітити, що програмний пакет MATLAB дозволяє не тільки моделювати динамічні процеси систем, але й підтримує процес рішення задач модального управління і аналітичного конструювання оптимальних регуляторів.

8. Поняття спостерігаємості системи, критерій повної спостерігаємості.

Методики синтезу замкнених систем, які основані як на рішенні задачі модального управління, так і на рішенні задачі аналітичного конструювання оптимального регулятора, передбачають, по перше, наявність математичної моделі об'єкту управління (2.1) і моделі випадкових перешкод (2.2), по друге, припущення, що всі компоненти векторів ***x(t)*** станів об'єкту і ***z(t)*** випадкових перешкод доступні для безпосереднього вимірювання. Ці припущення лежать в основі можливості використання закону управління виду (4.1).

Таким чином, для синтезу реальних систем управління необхідна наявність математичної моделі об’єкту у вигляді ***A, B, C, F***, а також матриць ***D*** та ***H***, які визначають математичну модель випадкових перешкод. Перелічені матриці можуть бути визначені в результаті структурної та параметричної ідентифікації системи на основі теоретичних та експериментальних досліджень.

Що стосується вимірювання компонентів векторів ***x(t)*** и ***z(t)***, то для реальних технічних систем ці вектори недоступні для безпосередніх вимірювань. Ось чому для використання розглянутих законів управління у склад замкненої системи необхідно ввести *спостерігаючий пристрій*, який призначений для отримання *оцінки вектору станів* ***x*(t)*** об’єкту і *оцінки вектору станів випадкових перешкод* ***z*(t)***, які можуть бути використаними в законі управління (4.1).

При використанні методу простору станів поряд із поняттям керованості широко використовується *поняття спостерігаємості*. Якщо система має властивості повної спостерігаємості, то при наявності математичних моделей (2.1) і (2.2) можна побудувати таку динамічну модель системи (спостерігаючий пристрій), який забезпечить отримання *оцінки вектору станів системи* ***x*(t)*** і *оцінку вектору випадкових перешкод,* які впливають на систему ***z*(t)***.

Критерієм повної спостерігаємості системи (2.1) є рівність рангу її матриці спостерігаємості $\boldsymbol{Q}_{\text{сп}}$ порядку n системи, а саме, $rank[\boldsymbol{Q}_{\text{сп}}] = n$, де матриця спостерігаємості визначається таким чином:

$$\boldsymbol{Q}_{\text{сп}} = [\boldsymbol{C^T}, \boldsymbol{A^T C^T}, (\boldsymbol{A^T})^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{C^T} \dots (\boldsymbol{A^T})^{\boldsymbol{n-1}} \boldsymbol{C^T}]. \qquad (2.1)$$

Приклад 8.1.

Визначити, чи має система, розглянута в прикладі 2.1, властивості повної спостерігаємості. Матриці системи мають вигляд:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{C} = [c_{11} \quad 0 \quad c_{13}].$$

Рішення.

Оскільки система 3-го порядку, то матриця спостерігаємості має вигляд

$$\boldsymbol{Q}_{\text{сп}} = [\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}, (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^2\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}].$$

Визначимо матриці, які входять до матриці спостерігаємості:

$$\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ c_{13} \end{bmatrix}; \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{11} \\ a_{33}c_{13} \end{bmatrix};$$

$$(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{21}a_{22} & 0 \\ a_{22} & a_{21} + a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix};$$

$$(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^2\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{21}a_{22} & 0 \\ a_{22} & a_{21} + a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21}c_{11} \\ a_{22}c_{11} \\ a_{33}^2c_{13} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{Q}_{\text{сп}} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & a_{21}c_{11} \\ 0 & c_{11} & a_{22}c_{11} \\ c_{13} & a_{33}c_{13} & a_{33}^2c_{13} \end{bmatrix}.$$

Якщо проаналізувати отриману матрицю спостерігаємості, то очевидно, що її визначник не дорівнює нулю. Таким чином, можна стверджувати, що система, яка розглянута в прикладі 2.1, має властивості повної спостерігаємості.

9. Побудова спостерігаючих пристроїв.

Найпростіший спостерігаючий пристрій. Якщо математична модель об’єкту управління (1.2), (1.3) відома, а саме, матриці ***A, B, C*** визначені, то в якості найпростішого спостерігаючого пристрою можна розглядати цифрову або аналогову модель системи

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}, \tag{9.1}$$

на яку подається той самий вектор управляючих сигналів ***u(t)***, що і на реальний об'єкт, як показано на рис. 9.1.

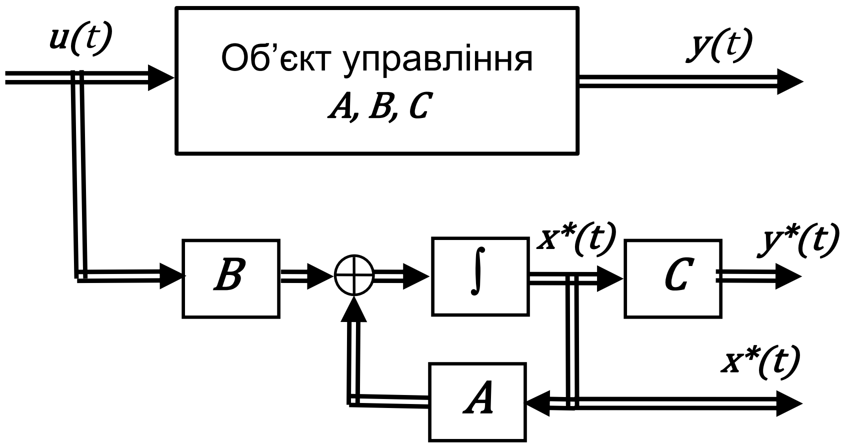

Рис. 9.1. Найпростіший спостерігаючий пристрій

Оскільки спостерігаючий пристрів містить точну математичну модель об'єкту управління, на входи об'єкту і спостерігача подаються однакові управляючі сигнали ***u(t)***, то можна уявити, що вектор станів системи ***x(t)*** і його оцінка на виході спостерігача ***x*(t)*** будут співпадати.

В реальній дійсності ці вектори не співпадають, оскільки об'єкт управління і його математична модель у спостерігачеві мають *різні початкові умови*, і тому навить при використанні точної математичної моделі вектори ***x(t)*** і ***x*(t)*** співпадати не будуть. Ось чому замість спостерігача, представленого на рис. 9.1, використовують *асимптотичний спостерігаючий пристрій*.

Асимптотичний спостерігаючий пристрій. Для забезпечення прагнення оцінки вектору станів системи ***x*(t)*** спостерігача до вектору станів реальної системи ***x(t)*** використовується *асимптотичний спостерігач*. Принцип роботи такого спостерігача полягає в наступному. Вектори вихідних змінних об'єкту управління ***y(t)*** і спостерігача ***y*(t) = Cx*(t)*** порівнюються, а величина різниці сигналів у вигляді сигналу негативного зворотного зв'язку через матрицю ***L*** подається на вхід спостерігача.

Математична модель такого асимптотичного спостерігача має наступний вигляд:

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*(t) - \boldsymbol{y}(t)]\,, \qquad (9.2)$$

де матриця ***L*** зворотних зв'язків спостерігача забезпечує прагнення оцінки ***x*(t) → x(t).***

Структурна схема асимптотичного спостерігаючого пристрою представлена на рис. 9.2

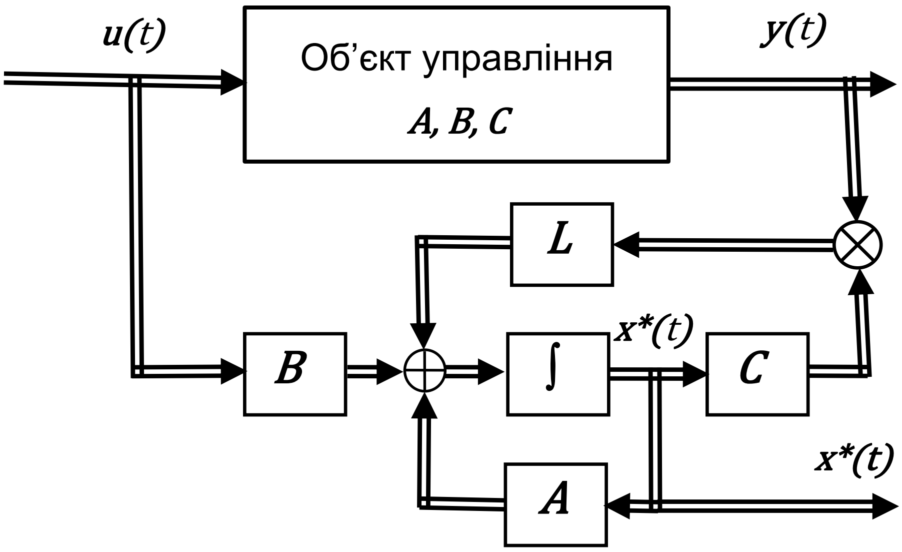

Рис. 9.2. Система з асимптотичним спостерігачем вектору станів системи

Матриця ***L*** зворотних зв'язків спостерігача завдає швидкість процесу оцінювання вектору станів системи. Таким чином, для побудови асимптотичного спостерігача необхідно знати не тільки матриці математичної моделі об'єкту ***A, B, C,*** але й визначити значення елементів матриці ***L***.

Для визначення матриці зворотних зв'язків спостерігача ***L*** представим вираз выражение (9.2) в такому виді:

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t). \qquad (9.3)$$

Відомо, що умова $\boldsymbol{x^*(t)} \rightarrow \boldsymbol{x(t)}$ буде виконуватись, якщо спостерігач, як замкнена динамічна система буде стійкою.

Для визначення чисельних значень елементів матриці зворотних зв'язків $\boldsymbol{L}$ необхідно прирівняти характеристичний поліном, відповідно до рівняння спостерігача, як замкненої системи (9.3), певному бажаному характеристичному полиному

$$det[\, s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}] = \varphi_{ж}(s), \qquad (9.4)$$

де s – змінна Лапласа; $\boldsymbol{I}$ - одинична матриця.

Рекомендації щодо вибору бажаного характеристичного поліному спостерігача наведено в додатках (Д.1 – Д.5).

Із виразу (9.4) отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для отримання чисельних значень елементів матриці $\boldsymbol{L}$**.** Можна сказати, що матриця $\boldsymbol{L}$ спостерігача визначається аналогічно тому, як визначається матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків $\boldsymbol{K}$ при вирішенні задачі модального управління.

Якщо побудувати асимптотичний спостерігаючий пристрій, отримані на його виході оцінки вектору станів системи $\boldsymbol{x^*(t)}$ можна використовувати в законі управління (4.1).

10. Побудова розширеного спостерігаючого пристрою.

В законі управління (4.1) поряд з вектором станів системи $\boldsymbol{x(t)}$ використовується вектор неконтрольованих випадкових перешкод $\boldsymbol{w}\,(t)$, який також недоступний для безпосереднього вимірювання. Тому поряд з отриманням оцінки вектору станів системи $\boldsymbol{x^*(t)}$ необхідно отримати оцінку вектору діючих на об'єкт випадкових перешкод $\boldsymbol{w}^*(t)$**.**

Ця задача вирішується шляхом побудови *розширеного спостерігаючого пристрою,* математична модель якого має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{L_1 C} & \boldsymbol{FH} \\ \boldsymbol{L_2 C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) \\ \boldsymbol{z}^*(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{L_1} \\ \boldsymbol{L_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \,, \qquad (10.1)$$

де $\boldsymbol{L_1}$, $\boldsymbol{L_2}$ - матриці коефіцієнтів зворотних зв’язків спостерігача, які забезпечують прагнення помилки оцінювання вектору станів об’єкту і вектору станів випадкових перешкод до нуля.

Для визначення чисельних значень елементів матриць зворотних зв’язків $\boldsymbol{L_1}$ і $\boldsymbol{L_2}$ спостерігача запишем характеристичний поліном спостерігача і прирівняєм його до певного бажаного характеристичного поліному. Рівняння похибки оцінювання змінних $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{z}(t)$ для спостерігача має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{L_1 C} & \boldsymbol{FH} \\ \boldsymbol{L_2 C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix}. \qquad (10.2)$$

Характеристичний поліном спостерігача у цьому випадку визначається, як

$$\varphi_{сп}(p) = det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{L_1 C} & \boldsymbol{FH} \\ \boldsymbol{L_2 C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} - s\boldsymbol{I} \right). \qquad (10.3)$$

Прирівнюючи коефіцієнти характеристичного поліному спостерігача (10.3) коефіцієнтам певного бажаного характеристичного полінома, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих елементів матриць зворотних зв’язків спостерігача $\boldsymbol{L_1}$ і $\boldsymbol{L_2}$.

Структура розширеного спостерігача і схема його підключення до об’єкту управління представлена на рис. 10.1.

Розширений спостерігаючий пристрій дозволяє отримати оцінки вектору станів системи $\boldsymbol{x}^*(t)$ і оцінку випадкових перешкод $\boldsymbol{w}^*(t)$, які діють на систему. Отримані оцінки можуть бути використані в законі управління (4.1).

Слід відмітити, що при визначенні елементів матриць зворотних зв’язків спостерігача корені його характеристичного поліному слід розміщувати на комплексній площині лівіше розміщення коренів характеристичного поліному замкненої системи. Це дозволяє отримати оцінки відповідних векторів станів системи і перешкод швидше за тривалість перехідного процесу замкненої системи.

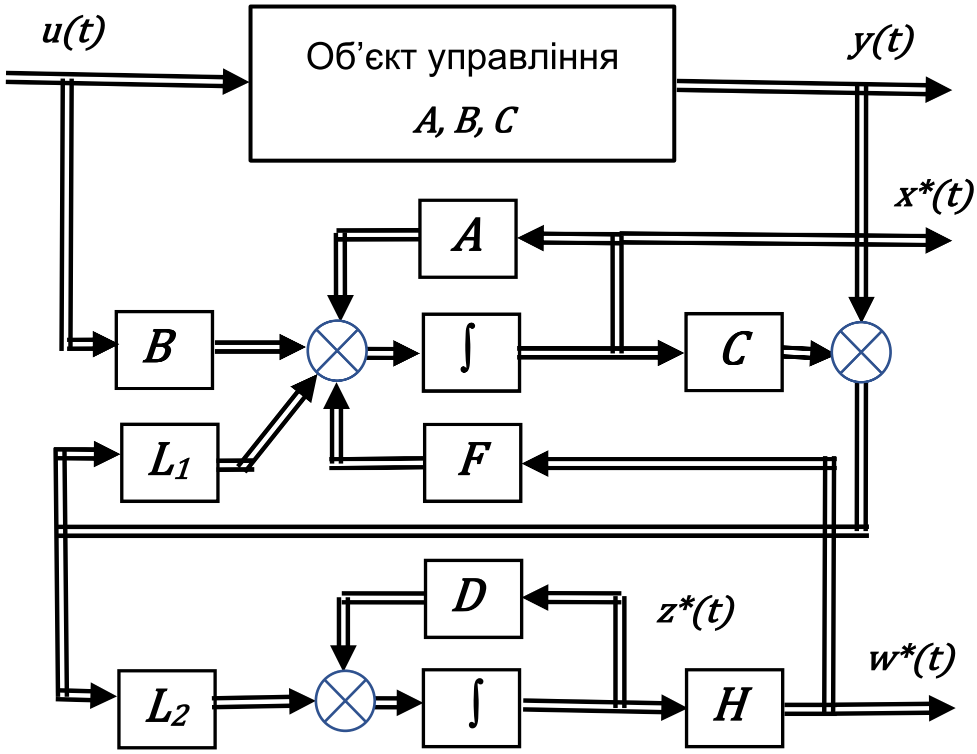

Рис. 10.1. Система з розширеним спостерігачем вектору станів системи і діючих на об'єкт випадкових перешкод

Контрольні питання

1. Матричне диференційне рівняння, яке описує багатомірну систему в просторі станів.
2. Що собою являють вектори вхідних змінних, вихідних змінних, змінних станів лінійної динамічної системи.
3. Які розмірності мають матриці ***A, B, C***, які входять до складу математичної моделі системи в просторі стані.
4. Поняття повної керованості лінійної багатомірної системи.
5. Матриця керованості, критерій керованості системи.
6. Як визначити характеристичний поліном системи з моделі системи в просторі станів?
7. Математична модель випадкових перешкод хвильової структури.
8. Постановка задачі модального управління системи.
9. Методика рішення задачі модального управління.
10. Рекомендації щодо розміщення коренів характеристичного поліному замкненої системи при вирішенні задачі модального управління.
11. Умови повної компенсації перешкод, які діють на вектор вихідних змінних системи.
12. Постановка задачі аналітичного конструювання оптимального регулятора.
13. Методика вирішення задачі аналітичного конструювання оптимального регулятора.
14. Поняття спостерігаємості лінійної динамічної системи. Необхідність отримання оцінки вектору станів системи.
15. Матриця спостерігаємості, критерій спостерігаємості системи.
16. Математична модель, принцип роботи і недоліки найпростішого спостерігача.
17. Математична модель та принцип роботи асимптотичного спостерігача.
18. Методика визначення матриць зворотних зв'язків асимптотичного спостерігача.
19. Математична модель та принцип роботи розширеного спостерігача.
20. Методика визначення матриць зворотних зв'язків розширеного спостерігача.
21. Рекомендації щодо розміщення коренів характеристичного поліному асимптотичного спостерігача.

ДОДАТКИ

Рекомендовані поліноми при вирішенні задач модального управління

1. Характеристичні поліноми з біноміальними коефіцієнтами:

$$N(s) = (s + \omega_0)^n, \quad (Д.1)$$

де n – порядок поліному;

ω_0 – ступінь віддалення коренів характеристичного поліному від уявної вісі.

2. Характеристичні поліноми, який забезпечують мінімум інтегралу квадрату похибки

$$I = \int_0^{\infty} [1(t) - h(t)]^2 dt:$$

$$\begin{aligned}
&N_2(s) = s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2\\
&N_3(s) = s^3 + \omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3\\
&N_4(p) = s^4 + \omega_0 s^3 + 3\omega_0^2 s^2 + 2\omega_0^3 s + \omega_0^4\\
&N_5(p) = s^5 + \omega_0 s^4 + 4\omega_0^2 s^3 + 3\omega_0^3 s^2 + 3\omega_0^4 s + \omega_0^5 \qquad (Д.2)\\
&N_6(p) = s^6 + \omega_0 s^5 + 5\omega_0^2 s^4 + 4\omega_0^3 s^3 + 6\omega_0^4 s^2 + 3\omega_0^5 s + \omega_0^6\\
&N_7(p) = s^7 + \omega_0 s^6 + 6\omega_0^2 s^5 + 5\omega_0^3 s^4 + 10\omega_0^4 s^3 + 6\omega_0^5 s^2 + 4\omega_0^6 p + \omega_0^7\\
&N_8(p) = s^8 + \omega_0 s^7 + 7\omega_0^2 s^6 + 6\omega_0^3 s^5 + 15\omega_0^4 s^4 + 10\omega_0^5 s^3 + 10\omega_0^6 s^2 + 4\omega_0^7 s + \omega_0^8.
\end{aligned}$$

3. Якщо показником якості перехідного процесу є мінімум інтегралу від зваженого модулю похибки

$$I = \int_0^{\infty} t|1(t) - h(t)|dt,$$

то типові характеристичні поліноми мають вид:

$$\begin{aligned}
&N_2(s) = s^2 + 1{,}41\omega_0 s + \omega_0^2\\
&N_3(s) = s^3 + 1{,}75\omega_0 s^2 + 2{,}15\omega_0^2 s + \omega_0^3\\
&N_4(s) = s^4 + 2{,}10\omega_0 s^3 + 3{,}40\omega_0^2 s^2 + 2{,}70\omega_0^3 s + \omega_0^4 \qquad (Д.3)\\
&N_5(s) = s^5 + 2{,}80\omega_0 s^4 + 5{,}0\omega_0^2 s^3 + 5{,}5\omega_0^3 s^2 + 3{,}4\omega_0^4 s + \omega_0^5\\
&N_6(s) = s^6 + 3{,}25\omega_0 s^5 + 6{,}6\omega_0^2 s^4 + 8{,}6\omega_0^3 s^3 + 7{,}45\omega_0^4 s^2 + 3{,}95\omega_0^5 s + \omega_0^6\\
&N_7(s) = s^7 + 4{,}47\omega_0 s^6 + 10{,}24\omega_0^2 s^5 + 15{,}08\omega_0^3 s^4 + 15{,}54\omega_0^4 s^3 + 10{,}64\omega_0^5 s^2 +\\
&\qquad + 4{,}58\omega_0^6 s + \omega_0^7\\
&N_8(s) = s^8 + 5{,}2\omega_0 s^7 + 12{,}8\omega_0^2 s^6 + 21{,}6\omega_0^3 s^5 + 25{,}75\omega_0^4 s^4 + 22{,}2\omega_0^5 s^3 +\\
&\qquad + 13{,}3\omega_0^6 s^2 + 5{,}15\omega_0^7 s + \omega_0^8.
\end{aligned}$$

4. Однією з поширених стандартних форм характеристичного поліному є модель Баттерворта. Корені такого поліному лежать на півколі радіусу ω_0 на комплексній площині. У цьому випадку характеристичні поліноми Баттерворту мають вид:

$$N_2(s) = s^2 + 1{,}41\omega_0 s + \omega_0^2$$
$$N_3(s) = s^3 + 2{,}0\omega_0 s^2 + 2{,}0\omega_0^2 s + \omega_0^3$$
$$N_4(s) = s^4 + 2{,}6\omega_0 s^3 + 3{,}4\omega_0^2 s^2 + 2{,}6\omega_0^3 s + \omega_0^4$$
$$N_5(s) = s^5 + 3{,}24\omega_0 s^4 + 5{,}24\omega_0^2 s^3 + 5{,}24\omega_0^3 s^2 + 3{,}24\omega_0^4 s + \omega_0^5 \qquad (Д.4)$$
$$N_6(s) = s^6 + 3{,}86\omega_0 s^5 + 7{,}46\omega_0^2 s^4 + 9{,}13\omega_0^3 s^3 + 7{,}46\omega_0^4 s^2 + 3{,}86\omega_0^5 s + \omega_0^6$$
$$N_7(s) = s^7 + 4{,}5\omega_0 s^6 + 10{,}1\omega_0^2 s^5 + 14{,}6\omega_0^3 s^4 + 14{,}6\omega_0^4 s^3 + 10{,}1\omega_0^5 s^2 + \\ + 4{,}5\omega_0^6 p + \omega_0^7$$
$$N_8(s) = s^8 + 5{,}12\omega_0 s^7 + 13{,}14\omega_0^2 s^6 + 21{,}84\omega_0^3 s^5 + 25{,}69\omega_0^4 s^4 + 21{,}84\omega_0^5 s^3 + \\ + 13{,}14\omega_0^6 s^2 + 5{,}12\omega_0^7 s + \omega_0^8$$

5. В теорії активних фільтрів широко використовуються фільтри Томсона, які мають лінійну фазочастотну характеристику. Характеристичні поліноми таких фільтрів відносяться до поліномів Бесселя.

Характеристичні поліноми Бесселя-Томсона мають вид:

$$N_2(s) = s^2 + 2{,}20\omega_0 s + 1{,}62\,\omega_0^2$$
$$N_3(s) = s^3 + 3{,}42\omega_0 s^2 + 4{,}87\omega_0^2 s + 2{,}77\,\omega_0^3$$
$$N_4(s) = s^4 + 4{,}73\omega_0 s^3 + 10{,}07\omega_0^2 s^2 + 11{,}12\omega_0^3 s + 5{,}26\,\omega_0^4$$
$$N_5(s) = s^5 + 6{,}18\omega_0 s^4 + 17{,}82\omega_0^2 s^3 + 29{,}37\omega_0^3 s^2 + 27{,}23\omega_0^4 p + 11{,}22\,\omega_0^5$$
$$N_6(s) = s^6 + 7{,}77\omega_0 s^5 + 28{,}74\omega_0^2 + s^4 + 63{,}78\omega_0^3 s^3 + 88{,}48\omega_0^4 s^2 + \\ + 72{,}0\omega_0^5 s + 26{,}63\,\omega_0^6 \qquad (Д.5)$$
$$N_7(s) = s^7 + 9{,}49\omega_0 s^6 + 43{,}0\omega_0^2 s^5 + 121{,}83\omega_0^3 s^4 + 228{,}18\omega_0^4 s^3 + \\ + 278{,}29\omega_0^5 s^2 + 204{,}27\omega_0^6 s + 69{,}21\omega_0^7$$
$$N_8(s) = s^8 + 11{,}3\omega_0 s^7 + 62{,}10\omega_0^2 s^6 + 214{,}73\omega_0^3 s^5 + 506{,}40\omega_0^4 s^4 + \\ + 828{,}27\omega_0^5 s^3 + 912{,}21\omega_0^6 s^2 + 615{,}53\omega_0^7 s + 194{,}08\,\omega_0^8.$$

Всі представлені форми характеристичних поліномів (Д.1 – Д.5) можуть бути використані при вирішенні задач модального управління, а також при синтезі спостерігаючих пристроїв для визначення матриць зворотних зв'язків.

Рекомендована література

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теорія систем автоматичного регулювання, «Наука», 1975
2. Попов Е. П. Теорія лінійних систем автоматичного регулювання та управління. – М.: Наука, 1978
3. Коновалов Г. Ф. Радіоавтоматика. – М.: Вищ. шк.; 1990.
4. Збірник задач з теорії автоматичного регулювання, та управління, під ред. В. А. Бесекерського. – М.: Наука, 1978.
5. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1976. - 424 с.
6. Деруссо П., Рой Р., Клоуз. Пространство состояний в теории управления. Пер. с англ. - М.: Наука, 1970. - 620 с.
7. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977.
8. Джонсон С.Д. Теория регуляторов, приспосабливающихся к возмущениям // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. Под ред. К.Т. Леондеса. - М.: Мир, 1980. - 407 с.
9. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. - М.: Машиностроение, 1976. - 184 с.