

Міністерство світи і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
фізико-технічний факультет
кафедра радіоелектронної автоматики

В.Б.Мазуренко

РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

Конспект лекцій

Дніпро

2018

Наведено конспект лекцій з курсу «Радіотехнічні кола та сигнали», який розроблено у відповідності до освітньо-професійної програми «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та освітньо-професійної програми «Кібербезпека». Для студентів фізико-технічного факультету ДНУ, що навчаються за спеціальностями 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та 125 «Кібербезпека».

Укладач: доцент кафедри радіоелектронної автоматики фізико-технічного факультету Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара Мазуренко Валерій Борисович.

ЛЕКЦІЯ №1

Тема: Визначення сигналу. Класифікація сигналів. Енергія і потужність сигналу

Зміст

Визначення сигналу	2
Класифікація сигналів	2
Типи сигналів	2
Класи сигналів.....	3
Окремі види сигналів.....	4
Енергія і потужність сигналу.....	7
Контрольні питання по темі.....	8
Рівень модуля	8
Рівень курсу.....	8

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергієнко А.Б. Цифрова обробка сигналів.

Визначення сигналу

В цьому курсі «Радіотехнічні кола та сигнали» сигналом ми називаємо залежність електричної напруги або струму від часу. З математичної точки зору сигнал є функцією часу.

Класифікація сигналів

Типи сигналів

Розрізняють *детерміновані* і *випадкові* сигнали.

Детермінованим називається сигнал, миттєве значення якого в будь-який момент часу можна точно визначити, тобто передбачити з імовірністю одиниця. Прикладом детермінованих сигналів можна вважати імпульси або пакети імпульсів, форма, амплітуда і знаходження в часі яких відомі.

До **випадкових** відносять сигнали, миттєві значення яких заздалегідь невідомі і можуть бути передбачені лише з певною ймовірністю, меншою одиниці. Такими сигналами є, наприклад, електрична напруга, що відповідає мові або музиці, послідовність знаків телеграфного коду під час передачі різного тексту.

Наступний важливий тип сигналів - сигнали з **обмеженою енергією**, або інакше – «сигнали з інтегрованим квадратом». Для таких сигналів $s(t)$ виконується співвідношення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty$$

Багато важливих співвідношень теорії сигналів отримані в припущенні щодо скінченності енергії аналізованих сигналів.

Ще одна ознака класифікації сигналів, що істотно впливає на методи їх аналізу, це періодичність. Для **періодичного** сигналу з періодом T виконується співвідношення

$$s(t + nT) = s(t)$$

при будь-якому t , де n - довільне ціле число. Якщо величина T є періодом сигналу $s(t)$, то періодами для нього будуть й кратні їй значення: $2T$, $3T$ і т. д. Як правило, говорячи про період сигналу, мають на увазі мінімальний з можливих періодів.

Неперіодичний сигнал подібних властивостей не має.

Величина, зворотна періоду, називається частотою сигналу, або в строгому формулюванні – «частотою повторення» сигналу: $f = \frac{1}{T}$. В теорії сигналів також часто використовується поняття кругової $\omega = 2\pi f$ частоти, вимірюваної в радіанах в секунду. Для ω також часто використовують назву «циклічна частота», або «кутова частота». Всі ці назви рівнозначні.

Зрозуміло, що будь-який безперервний періодичний сигнал (за винятком сигналу, тотожне рівного нулю) має нескінченну енергію.

Наступний клас - сигнали **скінченної тривалості** (їх ще називають **фінітними** сигналами). Такі сигнали відмінні від нуля тільки на обмеженому проміжку часу. Іноді кажуть, що сигнал існує на скінченному тимчасовому інтервалі.

Вочевидь, сигнал скінченної тривалості матиме і скінченну енергію – якщо тільки він не містить розривів другого роду (з гілками функції які йдуть в нескінченність).

Класи сигналів

Сигнали можуть бути безперервними і **дискретними**. У зв'язку з цим сигнали можна розділити на наступні класи:

- а) довільні за величиною і безперервні за часом (рис. 1.1, а);
- б) довільні за величиною і дискретні за часом (рис. 1.1, б);
- в) квантовані за величиною і безперервні за часом (рис. 1.1, в);
- г) квантовані за величиною і дискретні за часом (рис. 1.1, г).

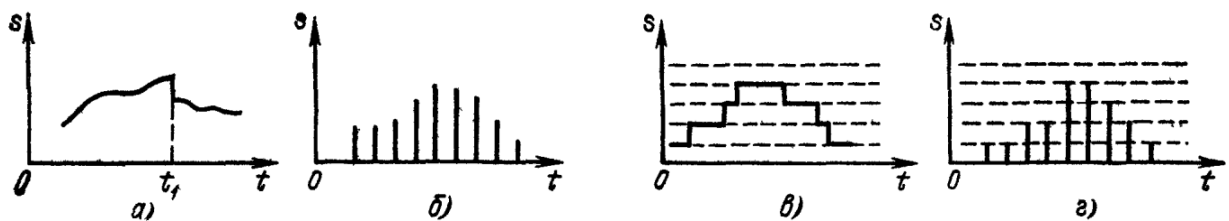


Рис. 1.1. Сигнали довільні за величиною і за часом (а), довільні за величиною і дискретні за часом (б), квантовані за величиною і безперервні за часом (в), квантовані за величиною і дискретні за часом (г)

Сигнали першого класу (рис. 1.1 а) називають **аналоговими** або безперервними, так як вони задаються по осі часу на незліченній множині точок. Такі множини називають континуальними. При цьому по осі ординат сигнали можуть приймати будь-яке значення в певному інтервалі. Ці сигнали можуть мати розриви, як, наприклад, на рис. 1.1а.

На рис. 1.1б представлено сигнал, заданий на дискретних значеннях часу t (на зліченій множині точок); величина ж сигналу в цих точках може приймати будь-яке значення в певному інтервалі по осі ординат (як і на рис. 1.1а). Таким чином, термін **дискретний** характеризує не самий сигнал, а спосіб задавання його на часовій осі. Дискретні сигнали можуть створюватися безпосередньо джерелом інформації (наприклад, дискретними датчиками в системах керування або телеметрії), або утворюватися в результаті дискретизації континуальних сигналів.

Сигнал на рис. 1.1в заданий на всій часовій осі, проте його величина може приймати лише дискретні значення. У подібних випадках говорять про сигнал, квантованим за рівнем.

Надалі термін дискретний буде застосовуватися тільки по відношенню до дискретизації по часу; дискретність за рівнем буде позначатися терміном квантування.

Квантування використовують при поданні сигналів в цифровій формі за допомогою цифрового кодування, оскільки рівні можна пронумерувати числами з кінцевим числом розрядів. Тому дискретний за часом і квантований за рівнем сигнал (рис. 1.1г) називається цифровим.

Таким чином, можна розрізнити: аналогові (рис. 1.1а), дискретні (рис. 1.1б), квантовані (рис. 1.2В) і цифрові (рис. 1.2Г) сигнали. Кожному з цих класів сигналів можна поставити у відповідність аналогові, дискретні або цифрові кола.

Окремі види сигналів

Далі представлено основні види сигналів, що застосовуються для дослідження радіотехнічних кіл.

А. **Потенційний** сигнал або сигнал постійного рівня.

Б. Дуже важливу роль в техніці обробки сигналів грають **гармонійні** коливання, які в узагальненому вигляді записуються наступним чином:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Гармонійний сигнал повністю визначається трьома числовими параметрами: амплітудою A , частотою ω і початковою фазою φ .

Гармонійний сигнал є одним з найбільш поширених тестових сигналів, що застосовуються для аналізу характеристик кіл. Крім нього для аналізу кіл використовуються ще дві дуже важливі функції: дельта-функція і функція одиничного стрибка.

В. Дельта-функція $\delta(t)$, або **функція Дірака**, являє собою нескінченно вузький імпульс з нескінченною амплітудою, розташований при нульовому значенні аргументу функції. «Площа» імпульсу проте дорівнює одиниці:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Сигнал у вигляді дельта-функції неможливо реалізувати фізично, проте ця функція дуже важлива для теоретичного аналізу сигналів і систем.

На графіках дельта-функція зазвичай зображується жирної стрілкою, висота якої пропорційна множнику, що стоїть перед дельта-функцією (рис. 1.2).

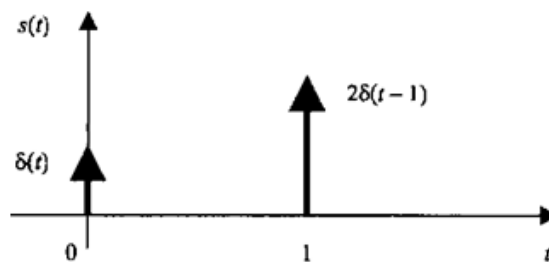


Рис. 1.2 – Графік сигналу $s(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1)$

Одна з важливих властивостей дельта-функції – так зване *фільтрувальна* властивість. Вона полягає в тому, що якщо дельта-функція присутня під інтегралом в якості множника, то результат інтегрування буде дорівнює значенню решти підінтегрального виразу в тій точці, де зосереджений дельта-імпульс:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Межі інтегрування не обов'язково повинні бути нескінченними, головне, щоб в інтервал інтегрування потрапляло значення t_0 ; в іншому випадку інтеграл буде дорівнює нулю.

З того факту, що інтеграл від дельта-функції дає безрозмірну одиницю, витікає, що розмірність самої дельта-функції обернена до розмірності її аргументу. Наприклад, дельта-функція часу має розмірність 1/с, тобто розмірність частоти.

Г. Функція **одиничного стрибка** $\sigma(t)$, вона ж **функція Хевісайда**, вона ж функція включення, дорівнює нулю для негативних значень аргументу і одиниці – для позитивних. При нульовому значенні аргументу функцію вважають або невизначеною, або рівною $\frac{1}{2}$:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

На графіку функція Хевісайда представляється в такий спосіб:

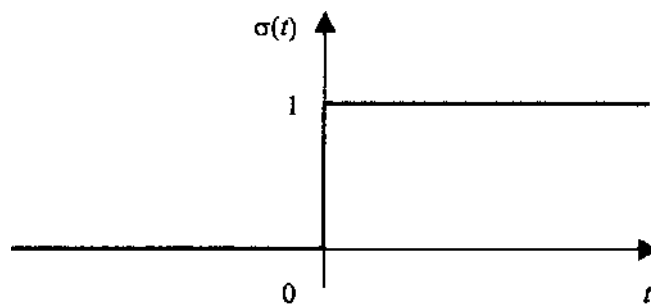


Рис 1.3 Функція одиничного стрибка

Функцію Хевісайда також називають «одинична ступінчаста функція» або «включена одиниця».

Д. Прямокутний імпульс:

$$S(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t - t_0))$$

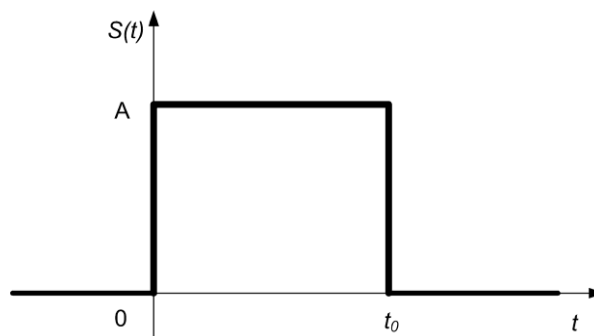


Рис. 1.4 Прямокутний імпульс

Енергія і потужність сигналу

Основними енергетичними характеристиками сигналу $s(t)$ є його потужність та енергія. Миттєва потужність визначається як квадрат миттєвого значення $s(t)$:

$$p(t) = s^2(t)$$

Якщо $s(t)$ - напруга або струм, то $p(t)$ є миттєва потужність, що виділяється на опорі в 1 Ом.

Енергія сигналу на інтервалі t_2, t_1 визначається як інтеграл від миттєвої потужності:

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

Співвідношення

$$\frac{\mathcal{E}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = \overline{s^2(t)}$$

має значення середньої на інтервалі t_2, t_1 потужності сигналу.

Реальні сигнали мають скінченну тривалість та обмежену за величиною миттєву потужність. Енергія таких сигналів скінченна. В теорії сигналів часто розглядаються функції часу, задані на всій осі часу $-\infty < t < +\infty$ за скінченної величини середньої потужності. Говорити про енергію подібних сигналів, що звертається в нескінченно велику величину, не має сенсу.

Контрольні питання по темі

Рівень модуля

1. Що розуміється під терміном «сигнал»?
2. Як визначається поняття «детермінований сигнал»?
3. Що являє собою випадковий сигнал?
4. Що таке сигнал з обмеженою енергією?
5. Дати визначення періодичного сигналу.
6. Що таке частота сигналу?
7. Що таке кругова частота?
8. Які інші назви застосовуються для кругової частоти?
9. Що таке фінітний сигнал?
10. Які сигнали називаються аналоговими?
11. Як визначаються дискретні за часом сигнали?
12. Що являють собою квантовані сигнали?
13. Що таке цифрові сигнали?
14. Дати визначення потенційного сигналу.
15. Дати визначення гармонійного сигналу.
16. Що являє собою дельта-функція.
17. Як математично виражається фільтрувальна властивість дельта-функції?
18. Дати визначення функції Хевісайда.
19. Записати вираз для миттєвої потужності сигналу.
20. Записати вираз для енергії сигналу.
21. Записати вираз для середньої потужності сигналу на інтервалі.

Рівень курсу

1. Визначення сигналу. Основні типи сигналів.
2. Безперервні і дискретні сигнали. Квантування і дискретизація.
3. Основні види сигналів, що застосовуються для дослідження радіотехнічних кіл.

ЛЕКЦІЯ № 2

Тема: Розкладання періодичної функції в ряд Фур'є. Синусно-косинусна та дійсна форми подання ряду Фур'є.

Зміст

Розкладання в ряд Фур'є математичної функції	2
Поняття ортогональності функцій	3
Властивості ряду Фур'є для періодичних функцій, що мають симетрією.	5
Контрольні питання по темі.....	7
Рівень модуля	7
Рівень курсу	7

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Розкладання в ряд Фур'є періодичної функції

З курсу математики відомо, що будь-яку періодичну функцію $f(x)$ з періодом 2π , яка задовольняє умовам Діріхле, можна розкласти в ряд Фур'є.

Умови Діріхле:

- а) не повинно бути розривів другого роду (з гілками функції, що йдуть у нескінченність);
- б) число розривів першого роду (стрибків) має бути кінцевим;
- в) число екстремумів має бути кінцевим (як приклад функції, яка на кінцевому інтервалі має нескінченне число екстремумів, можна привести функцію $\sin(1/x)$ в околиці нуля).

Ряд Фур'є записують так:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + \dots \\ \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \dots, \quad (2.1)$$

де a_0 – постійна складова; a_1 – амплітуда косинусної (тобто такої, що змінюється згідно із законом косинуса) складової першої гармоніки; b_1 – амплітуда синусної (що змінюється за законом синуса) складової першої гармоніки; a_2 – амплітуда косинусної складової другої гармоніки, b_2 – амплітуда синусної складової другої гармоніки і т. д. . Гармонічні функції \cos та \sin , що входять у формулу (2.1) і відповідно мають період $\frac{2\pi}{k}$, (оскільки аргумент цих функцій – kx , тобто в k разів більший за x , а це означає, що він змінюється в k разів швидше, ніж сам x) називаються гармоніками; гармоніки нумеруються відповідно до їх індексу k .

В загальному вигляді:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.2)$$

Тут

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (2.3)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx, \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx \\ \dots \dots \dots \quad (2.4)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

k – номер гармоніки.

Завдяки тому, що відповідно до тригонометричних правил

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = A_k \cos(kx + \varphi_k), \quad (2.5)$$

де

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k}, \quad (2.6)$$

ряд Фур'є (2.1) для функції $f(x)$ можна записати також в іншій формі:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 \cos(x + \varphi_1) + A_2 \cos(2x + \varphi_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k), \end{aligned} \quad (2.7)$$

де A_k – амплітуда, а φ_k – початкова фаза k – тої гармоніки ряду Фур'є.

Проте і запис (2.1), і запис (2.7) є одним й тим же самим рядом Фур'є для однієї й тієї ж функції $f(x)$. Тобто це – одне й теж, просто це різні форми запису ряду Фур'є. Коефіцієнти першої форми (2.1), яку називають «синусно косинусною формою «ряду Фур'є, і другої форми, яку називають «дійсною», пов'язані між собою співвідношеннями (2.6). Ці співвідношення можна переписати й в зворотному напрямку:

$$a_k = A_k \cos \varphi_k, \quad b_k = A_k \sin \varphi_k \quad (2.8)$$

Гармоніки, для яких k – непарне число, називають непарними; для яких k – парне число, називають парними.

Поняття ортогональності функцій

Коефіцієнти a_k та b_k при відповідних гармоніках $\cos kx$ та $\sin kx$ в розкладанні (2.2) насправді показують ступінь схожості вигляду функції $f(x)$ на функції косинуса та синуса, які мають період $\frac{2\pi}{k}$. Формули (2.4) для розрахунку a_k та b_k вказують саме на цей факт. Коефіцієнти a_k та b_k – це інтеграл, розрахований на періоді 2π , та поділений на цю саму тривалість 2π . Тобто – це середнє значення ступеню схожості функції $f(x)$ на функцію $\cos kx$ (або $\sin kx$) на періоді 2π . Схожість функцій ми виявляємо шляхом їх множення.

Цікаво задатися питанням, як схожі між собою самі гармонічні функції, наприклад $\cos x$ та $\sin x$, або $\cos x$ та $\cos 2x$, або $\cos x$ та $\sin 5x$? Для відповіді на це питання треба в формули (2.4) замість $f(x)$ підставити $\cos kx$ або $\sin kx$.

Якщо ми це зробимо, та використаємо при цьому відомі тригонометричні співвідношення

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}\end{aligned}\quad (2.9)$$

то виявиться, що для будь яких двох функцій $\cos nx$ або $\sin mx$, де m і n – будь які цілі числа, всі інтеграли будуть рівні нулю:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx &= 0\end{aligned}\quad (2.10)$$

Наприклад:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x) dx + \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [\sin((m+n)x)]_0^{2\pi} + [\sin((m-n)x)]_0^{2\pi} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin(2\pi(m+n)) - \sin 0 + \sin(2\pi(m-n)) - \sin 0 \right\} = 0\end{aligned}\quad (2.11)$$

Під час виведення враховано, що для будь яких цілих m і n їхня різниця, так само як і їх сума, – це також ціле число. Це означає, що

$$\begin{aligned}\sin(2\pi(m+n)) &= 0 \\ \sin(2\pi(m-n)) &= 0\end{aligned}\quad (2.12)$$

Значення інших інтегралів в (2.10) можна так само легко вивести.

Таким чином, функції $\cos nx$ та $\sin mx$, що входять в ряд Фур'є, не мають ніякої схожості між собою – інтеграл від їх добутку на інтервалі 2π рівний нулю. Функції, які мають такі властивості, називають ортогональними. В загальному вигляді ортогональність двох функцій $f(x)$ та $g(x)$ на інтервалі від x_1 до x_2 сформулюється наступним чином:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx = 0 \quad (2.13)$$

Функції, для яких справедливе співвідношення (2.13) називають **ортогональними на інтервалі** $[x_1, x_2]$.

Отож виявляється, що в розкладанні Фур'є всі функції ортогональні. Кажуть так: функції $\cos kx$ та $\sin kx$ (де k – ціле число) утворюють **ортогональний базис функцій**, а саме розкладання в ряд Фур'є є розкладанням функції $f(x)$ по ортогональному базису.

Геометричною аналогією цьому є розкладання тримірного вектору по ортогональному базису векторів вздовж осей x, y, z .

Властивості ряду Фур'є для періодичних функцій, що мають симетрію.

На рисунках 2.1 і 2.2 зображені три криві, що мають деякі специфічні властивості. Функція $f(x)$, що зображена у вигляді кривої на рис. 2.1а, відповідає такій умові:

$$f(x + \pi) = -f(x) \quad (2.14)$$

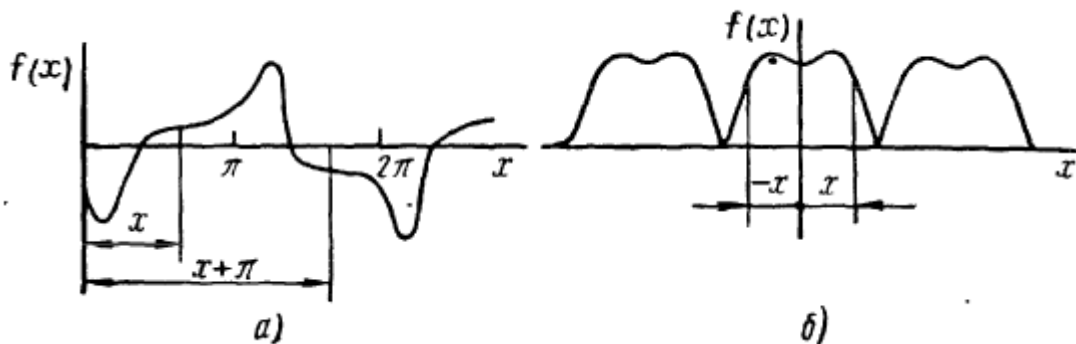


Рис. 2.1

Криві, які відповідають умові (2.14), називають симетричними відносно осі абсцис. Якщо криву рис. 2.1а змістити по осі x на пів періоду і дзеркально відобразити щодо осі x , то отримана крива буде збігатися з кривою $f(x)$.

При розкладанні таких кривих в ряд Фур'є відсутні постійна складова і парні гармоніки, тобто дорівнюють нулю коефіцієнти $a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \dots = 0$

Тому криві типу кривої рис. 2.1а розкладають в ряд:

$$f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + a_5 \cos 5x + b_5 \sin 5x + \dots \quad (2.15)$$

Кожне складова цього ряду задовольняє умові $f(x + \pi) = -f(x)$, наприклад, $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

Крива, подібна кривій на рис. 2.1б, має симетрію щодо осі ординат і задовольняє умові $f(-x) = f(x)$. Функції такого роду називають *парними*. Якщо криву, що лежить лівіше осі ординат, дзеркально відобразити щодо осі ординат, то отримана крива збігається з кривою, що правіше осі ординат. При розкладанні таких кривих в ряд Фур'є відсутні синусні складові, тобто присутні лише косинусні і постійна складові.

Таким чином, криві типу кривої рис. 2.1б можна розкласти в ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + a_5 \cos 5x + \dots \quad (2.16)$$

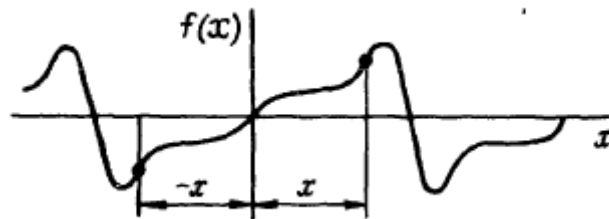


Рис. 2.2

Криві типу кривої рис. 2.2 задовольняють умові $f(-x) = -f(x)$, їх називають кривими, симетричними відносно початку координат або *непарними* функціями. Їх розкладання в ряд Фур'є має такий вигляд:

$$f(x) = a_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x + \dots \quad (2.17)$$

Контрольні питання по темі

Рівень модуля

1. Запишіть ряд Фур'є для функції $f(x)$, яка має період 2π , в загальному вигляді (в синусно-косинусній формі).
2. Що являє собою нульовий член розкладання в ряді Фур'є?
3. Які складові відсутні в ряді Фур'є при розкладанні парних функцій?
4. Які складові відсутні в ряді Фур'є при розкладанні непарних функцій?
5. Якщо в розкладанні відсутні парні гармоніки, то який вигляд має функція, яка була розкладена в ряд Фур'є?

Рівень курсу

1. Розкладання періодичної функції в ряд Фур'є.
2. Поняття ортогональності функцій.
3. Властивості ряду Фур'є для періодичних функцій, що мають симетрією.

ЛЕКЦІЯ № 3

Тема: Подання сигналу рядом Фур'є. Синусно-косинусна і дійсна форми подання.

Зміст

Розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є	2
Синусно-косинусна форма.....	2
Дійсна форма	3
Спектральна діаграма періодичного сигналу.....	4
Контрольні питання по темі.....	5
Рівень модуля	5
Рівень курсу.....	5

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є

Перейдемо до сигналів. Математична функція, яка описує періодичний електричний сигнал $s(t)$, являє собою розглянуту в попередній лекції звичайну функцію $f(x)$, в якій змінна величина x пов'язана з часом t співвідношенням

$$x = \omega \cdot t = 2\pi f \cdot t = \frac{2\pi}{T} t \quad (3.1)$$

де T – період повторення сигналу $s(t)$ в часі, $f = \frac{1}{T}$ – частота зміни сигналу $s(t)$, $\omega = 2\pi f$ – так звана **кругова** частота (інші назви: циклічна частота або кутова частота) сигналу $s(t)$.

Таким чином, період функції по x дорівнює 2π , а період тієї ж функції по часу дорівнює T .

Як і будь-яка періодична функція, періодичний сигнал може бути розкладений в ряд Фур'є. **Всі періодичні функції, з якими мають справу в радіотехніці, умовою Діріхле задовольняють** (щодо умов Діріхле – дивись попередню лекцію). Тому проводити перевірку на виконання умов Діріхле не потрібно.

Якщо сигнал представлено у вигляді суми гармонійних коливань з різними частотами, то кажуть, що здійснено спектральне розкладення цього сигналу. Окремі гармонійні компоненти сигналу утворюють його спектр.

Синусно-косинусна форма

В разі розкладання періодичного сигналу з періодом T (нагадаємо, що в лекції №2 розкладанню в ряд Фур'є піддавалися тільки ті функції, період яких складав 2π , в даному випадку період може бути будь-яким) ряд Фур'є (формула 2.2 лекції 2) приймає наступний вигляд:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \quad (3.2)$$

Можна записати і по-іншому:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (3.3)$$

Тут $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота, відповідна періоду повторення сигналу, рівному T . Гармонічні коливання з частотою $k\omega$, що входять у формулу (3.3) й кратні частоті сигналу ω , називаються гармоніками; гармоніки нумеруються відповідно до індексу k , частота $k\omega$ називається частотою k -ї гармоніки сигналу. Коливання з номерами $k = 2, 3, \dots$ зазвичай називають вищими гармоніками. Коефіцієнти ряду a_k і b_k розраховуються за формулами:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(k\omega t) dt \quad (3.4)$$

Константа a_0 розраховується за загальною формулою для a_k . Заради цієї спільності і введена форма запису постійної складової з поділом на два. Ця складова являє собою середнє значення сигналу на періоді:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt, \quad (3.5)$$

Границі інтегрування не обов'язково повинні бути такими, як в наведених вище формулах (від $-T/2$ до $T/2$). Інтегрування може проводитися на будь-якому інтервалі довжиною T – результат від цього ніяк не зміниться. Конкретні межі вибираються з міркувань зручності обчислень: наприклад, може виявитися зручніше виконувати інтегрування від 0 до T або від $-T$ до 0 .

Якщо $s(t)$ є парною функцією, то всі b_k дорівнюватимуть нулю і в формулі ряду Фур'є будуть присутні тільки косинусні складові. Якщо $s(t)$ є непарною функцією, дорівнюють нулю будуть, навпаки, косинусні коефіцієнти a_k і в формулі залишаться лише синусні складові. Якщо розкладанню підлягає сигнал, симетричний відносно осі абсцис, то в його спектрі будуть відсутні всі парні гармоніки.

Дійсна форма

Деяка незручність синусно-косинусної форми ряду Фур'є полягає в тому, що для кожного значення індексу підсумовування k (тобто для кожної гармоніки з частотою $k\omega$ в формулі фігурують дві складові – синус та косинус. Skorиставшись формулами тригонометричних перетворень, суму цих двох складових можна трансформувати в косинус тієї ж частоти з іншою амплітудою і певною початковою фазою:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_k) \quad (3.6)$$

Або та ж сама формула з використанням кругової частоти ω :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (3.7)$$

Якщо $s(t)$ є парною функцією, фази φ_k можуть приймати тільки значення 0 і π , а якщо $s(t)$ - функція непарна, то можливі значення для фази рівні $\pm \pi/2$.

Коефіцієнти синусно-косинусної форми і дійсної форм розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є пов'язані тими самими тригонометричними співвідношеннями, що були вказані в лекції №2, а саме:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k}, \quad (3.8)$$

Складова $\frac{a_0}{2}$ дійсної форми представлення ряду Фур'є являє собою ту ж величину, що і в синусно-косинусній формі, тобто середнє значення сигналу на періоді. Його значення точно так само розраховується за формулою (3.5). Іноді суму (3.7) записують також в такому вигляді:

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (3.9)$$

Співвідношення (3.8) при цьому залишаються в силі.

Спектральна діаграма періодичного сигналу

Спектральною діаграмою періодичного сигналу прийнято називати графічне зображення коефіцієнтів ряду Фур'є для конкретного сигналу. Розрізняють амплітудні і фазові спектральні діаграми (рис. 1).

Тут по горизонтальній осі в деякому масштабі відкладені частоти гармонік, а по вертикальній осі представлені їх амплітуди і початкові фази.

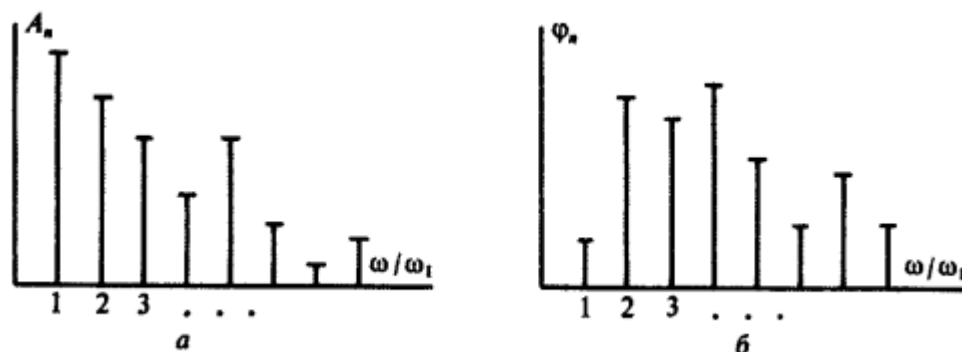


Рис. 1. Спектральні діаграми деякого періодичного сигналу:
а - амплітудна; б - фазова

Особливо цікавляться амплітудною діаграмою, яка дозволяє судити про процентний вміст тих чи інших гармонік в спектрі періодичного сигналу.

Різні сигнали розрізняються перш за все швидкістю зменшення амплітудних коефіцієнтів з ростом номера гармонік.

Контрольні питання по темі

Рівень модуля

1. Чи можна стверджувати, що сигнали завжди задовольняють умовам Діріхле?
2. Запишіть формулу представлення сигналу ряду Фур'є в синусно-косинусній формі.
3. Запишіть формулу розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є в синусно-косинусній формі.
4. Запишіть формулу представлення сигналу рядом Фур'є в дійсній формі.
5. Як пов'язані коефіцієнти ряду Фур'є синусно-косинусної форми представлення та дійсної форми представлення?
6. Якщо сигнал $s(t)$ є парною функцією, то які значення фази гармонік можуть бути?
7. Якщо сигнал $s(t)$ – непарна функція, то які можливі значення фази гармонік?
8. Що називають спектральною діаграмою періодичного сигналу?
9. Які два спектра відображають представлення періодичного сигналу рядом Фур'є?

Рівень курсу

1. Розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є. Синусно-косинусна форма.
2. Розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є. Дійсна форма.
3. Спектральна діаграма періодичного сигналу.

ЛЕКЦІЯ № 4

Тема: Подання періодичного сигналу комплексним рядом Фур'є. Спектральна діаграма.

Зміст

Комплексна форма представлення ряду Фур'є	2
Отримання комплексної форми представлення ряду Фур'є на основі дійсної форми подання.	2
Отримання комплексної форми представлення ряду Фур'є на основі синусно-косинусній форми подання.	5
Формули прямого розрахунку коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є	7
Спектральна діаграма періодичного сигналу.....	8
Контрольні питання по темі.....	10
Рівень модуля	10
Рівень курсу	10

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Комплексна форма представлення ряду Фур'є

Комплексна форма представлення ряду Фур'є є найбільш уживаною. Її можна отримати як з дійсної, так і синусно-косинусної форми подання періодичного сигналу рядом Фур'є. Перехід до комплексної форми відбувається за рахунок застосування формули Ейлера:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (4.1)$$

Формула Ейлера дає наступне представлення функцій косинуса і синуса через комплексні експоненти, якими ми також будемо користуватися:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (4.2)$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (4.3)$$

Отримання комплексної форми представлення ряду Фур'є на основі дійсної форми подання.

Для початку виведемо комплексне представлення ряду Фур'є з дійсної форми. Дійсна форма розкладання **періодичного** сигналу $s(t)$, кутова частота якого $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (де f - звичайна частота, T - період повторення сигналу за часом), має вигляд:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (4.4)$$

Ця формула була отримана в попередній лекції (дивись формулу 3.7 лекції 3). Нагадаємо, що k – це ціле число, яке представляє собою номер гармоніки.

Переходимо безпосередньо до виведення і насамперед замінимо у формулі (4.4) косинус на його представлення відповідно до формули Ейлера (4.2), після чого виконаємо алгебраїчні перетворення отриманого виразу:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(k\omega t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega t + \varphi_k)}}{2} = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} \left[e^{j(k\omega t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega t + \varphi_k)} \right] = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j(k\omega t + \varphi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j(k\omega t + \varphi_k)} = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-jk\omega t}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

В останній складовій формули ми бачимо, що коли йде підсумовування, індекс k змінюється від одиниці до нескінченності, тобто індекс k під час підсумовування – це ціле позитивне число. В той же час число e зводиться в негативну ступінь. Можна уявити цю суму протилежним чином, проте нічого не змінюється: будемо вважати, що k – це негативне число, а під час підсумовування воно змінюється від мінус нескінченності до мінус одиниці, в той час, як число e зводиться в позитивну ступінь. Одночасно прибираємо знак мінус перед фазою, та приймаємо, що для негативних значень k фаза має те ж значення, що і для позитивних, але з протилежним знаком. Математично, сказане вище виражається наступним чином:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} \tag{4.6}$$

$$A_{-k} = A_k, \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k$$

З урахуванням (4.6) вираз в останньому рядку (4.5) переписуємо наступним чином:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{k=-1} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} \tag{4.7}$$

Ми отримали ряд, в якому відбувається підсумовування по цілому числу k , а саме число k пробігає всі цілі значення від $-\infty$ до -1 , потім приймає значення 0 і далі знову пробігає всі цілі значення від 1 до $+\infty$. Представимо сказане, трохи переставивши складові у формулі (4.7):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} \tag{4.8}$$

$$k = \text{від } -\infty \text{ до } -1 \quad k = 0 \quad k = \text{від } 1 \text{ до } +\infty$$

Таким чином, k під час підсумовування пробігає всі цілі значення від $-\infty$ до $+\infty$, включаючи нульове значення. Це означає, що формулу можна записати таким чином:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{jk\omega t} \quad (4.9)$$

Введемо позначення:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \quad (4.10)$$

і отримуємо остаточну формулу для комплексної форми подання розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t} \quad (4.11)$$

Дана форма надзвичайно зручна. Інформація про гармоніки представлена різними елементами формули: інформація про амплітуду і фазу гармоніки зберігається в амплітуді та фазі комплексного числа – коефіцієнта \dot{C}_k , а інформація про частоту гармоніки – в співмножнику $e^{jk\omega t}$, точніше в показнику експоненти $k\omega$. Такого чіткого поділу інформації в інших формах подання немає. Наприклад, в дійсній формі аргумент косинуса складається і з частоти гармоніки, і з її фази: $\cos(k\omega t + \varphi_k)$. В синусно-косинусній формі значення амплітуди і фази явно не присутні; амплітуду, наприклад, треба знаходити по теоремі Піфагора через a_k та b_k (дивись формулу 3.8 лекції 3). Іншою перевагою комплексної форми подання є її компактність.

Найголовніше: комплексна форма подання розкладання сигналу в ряд Фур'є служить основою для переходу до перетворення Фур'є, яке буде вивчатися в наступних лекціях.

Комплексні коефіцієнти ряду пов'язані з амплітудами A_k , і фазами φ_k , що фігурують в дійсній формі записи ряду Фур'є, наступними нескладними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \\ A_k &= 2|\dot{C}_k|, \quad \varphi_k = \arg(\dot{C}_k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Індекс k в комплексній формі представлення під час проведення підсумовування членів ряду Фур'є пробігає всі цілі значення від мінус

нескінченності до плюс нескінченності. Він може бути як позитивним, так і негативним. Відповідно, половина коефіцієнтів \dot{C}_k мають негативний індекс k , інша половина – позитивний. Коефіцієнти \dot{C}_k - це комплексні числа. Те, що $A_{-k} = A_k$ и $\varphi_{-k} = -\varphi_k$, означає, що коефіцієнти з рівними, але протилежними за знаком індексами \dot{C}_k і \dot{C}_{-k} , являють собою два комплексно-сполучених числа: амплітуди їх однакові, а фази протилежні:

$$\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^* \quad (4.13)$$

І звичайно ж, є нульовий коефіцієнт \dot{C}_0 – це чисто дійсне число, його фаза дорівнює нулю $\varphi_0 = 0$, а амплітуда дорівнює $A_0 = \frac{a_0}{2}$, тобто дорівнює середньому значенню сигналу на періоді T (дивись лекцію 3).

Отримання комплексної форми представлення ряду Фур'є на основі синусно-косинусній форми подання.

Отримані вище вирази (4.10) – (4.12) необхідно доповнити формулами для прямого розрахунку коефіцієнтів \dot{C}_k на основі форми сигналу $s(t)$. Необхідно відповісти на питання: яким чином комплексні коефіцієнти розкладання в ряд Фур'є пов'язані з самим періодичним сигналом $s(t)$, що розкладається. Цей зв'язок ми отримаємо шляхом використання синусно-косинусної форми. Зараз ми виведемо ту ж саму формулу, що була отримана раніше (4.11), але вже на основі синусно-косинусної форми ряду Фур'є (дивись лекцію 3, формула 3.3):

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (4.14)$$

Йдемо тим самим шляхом, що і в попередньому випадку: замінимо у формулі (4.14) косинус і синус їх поданням відповідно до формули Ейлера (4.2), після чого виконаємо алгебраїчні перетворення отриманого виразу:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} \right) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} e^{jk\omega t} + \frac{a_k}{2} e^{-jk\omega t} + \frac{b_k}{2j} e^{jk\omega t} - \frac{b_k}{2j} e^{-jk\omega t} \right) = \quad (4.15) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} e^{jk\omega t} + \frac{a_k}{2} e^{-jk\omega t} - j \frac{b_k}{2} e^{jk\omega t} + j \frac{b_k}{2} e^{-jk\omega t} \right) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \right) e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + j \frac{b_k}{2} \right) e^{-jk\omega t}
\end{aligned}$$

Тепер зробимо з останньою складовою теж саме, що й в попередньому випадку (4.6): будемо вважати, що k – це негативне число, і під час підсумовування воно змінюється від мінус нескінченності до мінус одиниці, а число e зводиться в позитивну ступінь. Одночасно прибираємо знак мінус перед коефіцієнтом b_k , та приймаємо, що для негативних k цей коефіцієнт має те ж саме значення, що і для позитивних, але з протилежним знаком. Запишемо це:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + j \frac{b_k}{2} \right) e^{-jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} \left(\frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \right) e^{jk\omega t} \quad (4.16)$$

$$a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k$$

Перепишемо вираз (4.15) з урахуванням (4.16).

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \right) e^{jk\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{k=-1} \left(\frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \right) e^{jk\omega t} \quad (4.17)$$

Ми знову отримали ряд, в якому відбувається підсумовування по цілому числу k , а число k пробігає всі цілі значення від $-\infty$ до -1 , потім приймає значення 0 і далі знову пробігає всі цілі значення від 1 до $+\infty$. Це означає, що ми знову можемо весь ряд записати у вигляді однієї суми:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left(\frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \right) e^{jk\omega t} \quad (4.18)$$

В результаті ми отримали формулу для точно тієї ж комплексної форми подання розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є (4.11), в якій

коефіцієнти \dot{C}_k пов'язані з коефіцієнтами синусно-косинусної форми наступними співвідношеннями:

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \quad (4.19)$$

$$a_k = 2\operatorname{Re}(\dot{C}_k), \quad b_k = -2\operatorname{Im}(\dot{C}_k) \quad (4.20)$$

У групі виразів зазначено (4.16), що $a_{-k} = a_k$, $b_{-k} = -b_k$. Це означає, що коефіцієнти розкладання з рівними, але протилежними за знаком індексами \dot{C}_k і \dot{C}_{-k} , являють собою два комплексно-сполучених числа: дійсні частини їх однакові, а уявні протилежні. Цей той самий висновок, що ми отримали раніше (4.13).

Формули прямого розрахунку коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є

Отримана нами формула (4.19) дає можливість знайти формули для прямого розрахунку коефіцієнтів \dot{C}_k комплексного ряду Фур'є розкладання сигналу $s(t)$. Нагадаємо, що $s(t)$ – періодичний сигнал з періодом повторення по часу T , частотою $f = \frac{1}{T}$ і кутовою частотою $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$. Для отримання цієї формули ми підставимо в формулу (4.19) формули розрахунку коефіцієнтів з в попередній лекції (дивись формули 3.4 і 3.5 лекції 3), і до того ж замінимо функції синуса і косинуса формулами Ейлера (4.2) і (4.3):

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} = \frac{2}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(k\omega t) dt - j \frac{2}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(k\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[s(t)e^{jk\omega t} + s(t)e^{-jk\omega t} - s(t)e^{jk\omega t} + s(t)e^{-jk\omega t} \right] dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)e^{-jk\omega t} dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

Таким чином, остаточне вираз для обчислення коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є має вигляд:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (4.22)$$

Сукупність амплітуд гармонік ряду Фур'є часто називають амплітудним спектром, а сукупність їх фаз – фазовим спектром.

Спектральна діаграма періодичного сигналу

Спектральною діаграмою періодичного сигналу прийнято називати графічне зображення коефіцієнтів ряду Фур'є для конкретного сигналу. Розрізняють амплітудні і фазові спектральні діаграми (рис. 1).

По горизонтальній осі в деякому масштабі відкладають частоти гармонік, а по вертикальній осі – їх амплітуди і початкові фази. По горизонтальній осі можуть відкладатись звичайні частоти f , або кутові частоти ω . Горизонтальна вісь так само може бути проградуєвана в номерах гармонік. Саме таке градуєвання ми бачимо на рис.1. Часто на горизонтальній осі одночасно відкладають як частоти гармонік, так й номери гармонік.

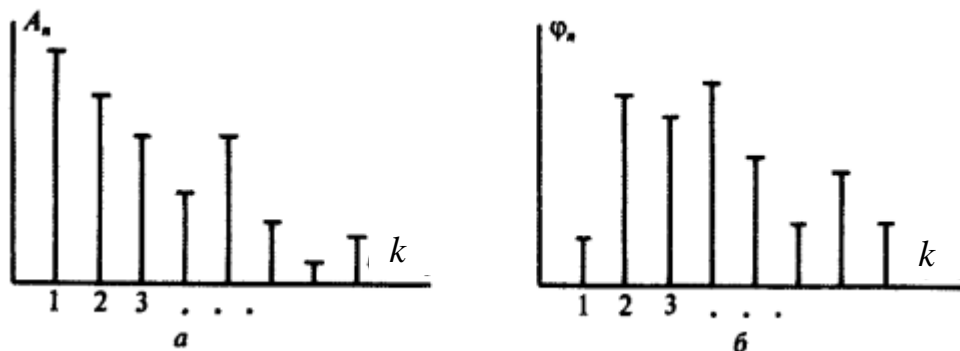


Рис. 1. Спектральні діаграми деякого періодичного сигналу:
а - амплітудна; б - фазова

Що стосується вертикальної осі, то зазвичай вздовж неї відкладають коефіцієнти A_k дійсної форми розкладання сигналу в ряд Фур'є. Але так само використовують спектральні діаграми, коли вздовж вертикальної осі відкладені модулі коефіцієнтів $|\dot{C}_k|$ комплексної форми розкладання сигналу в ряд Фур'є. В цьому випадку горизонтальна вісь направлена в обидві сторони від нульової позначки: вліво до $-\infty$ та вправо до $+\infty$. Таку спектральну діаграму ми можемо бачити на рисунку 2. В зв'язку з тим, що коефіцієнти \dot{C}_k на негативних та позитивних номерах гармонік пов'язані між собою співвідношенням (4.13), тобто це два комплексно-сполучених числа, то амплітудна діаграма завжди симетрична відносно вертикальної осі, а фазова діаграма завжди симетрична відносно початку координат.

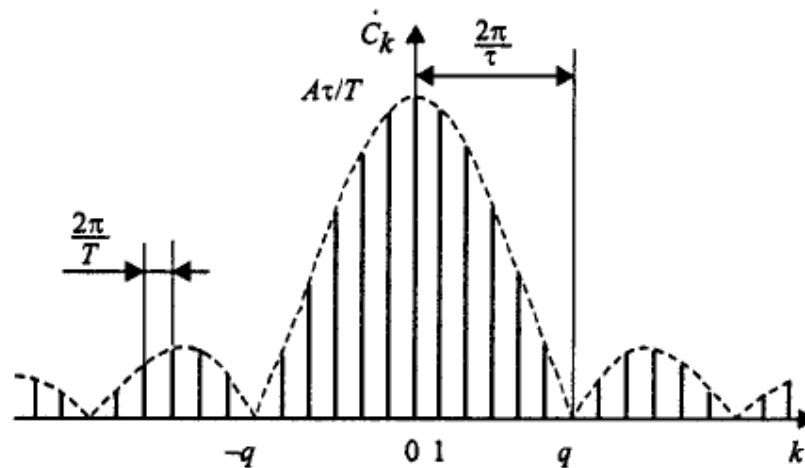


Рис. 2 Приклад спектральної діаграми на основі коефіцієнтів комплексної форми розкладання сигналу в ряд Фур'є

Особливо цікавляться амплітудною діаграмою, яка дозволяє судити про процентний вміст тих чи інших гармонік в спектрі періодичного сигналу.

Різні сигнали розрізняються перш за все швидкістю зменшення амплітудних коефіцієнтів з ростом номера гармонік.

Контрольні питання по темі

Рівень модуля

1. Що являє собою нульовий член розкладання в ряді Фур'є?
2. Запишіть формулу представлення сигналу рядом Фур'є в синусно-косинусній формі.
3. Запишіть формулу представлення сигналу рядом Фур'є в дійсній формі.
4. Запишіть формулу представлення сигналу рядом Фур'є в комплексній формі.
5. Запишіть формулу Ейлера.
6. Запишіть формули, що пов'язують коефіцієнти ряду Фур'є в дійсній і комплексній формі.
7. Запишіть формули, що пов'язують коефіцієнти ряду Фур'є в комплексній і синусно-косинусній формі.
8. Що називають спектральною діаграмою періодичного сигналу?
9. Які два спектра відображають представлення періодичного сигналу рядом Фур'є?

Рівень курсу

1. Отримання комплексної форми представлення ряду Фур'є на основі дійсної форми представлення.
2. Отримання комплексної форми представлення ряду Фур'є на основі синусно-косинусної форми представлення.
3. Формули прямого розрахунку коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є.
4. Спектральна діаграма періодичного сигналу.

ЛЕКЦІЯ № 5

Тема: Перетворення Фур'є. Зв'язок з рядом Фур'є. Окремі властивості.

Зміст

Зв'язок перетворення Фур'є з рядом Фур'є	2
Властивості перетворення Фур'є	5
Лінійність	5
Зміна масштабу осі часу	5
Контрольні питання за темою	7
Рівень модуля	7
Рівень курсу	7

Джерела:

1. Гоноровскій І. С. Радиотехнічні цепи и сигнали: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифрова обробка сигналів.

Зв'язок перетворення Фур'є з рядом Фур'є

Перетворення Фур'є (Fourier transform) є інструментом спектрального аналізу неперіодичних сигналів.

Проілюструємо наочно перехід від ряду Фур'є до перетворення Фур'є. Уявіть собі періодичну послідовність імпульсів довільного виду та давайте сформуємо ряд Фур'є для неї. Потім, не змінюючи форми одиночних імпульсів, збільшимо період їх повторення (заповнивши проміжки нульовим значенням) і знову розрахуємо коефіцієнти ряду Фур'є. Формула

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (5.1)$$

для розрахунку коефіцієнтів ряду показує, що нам доведеться обчислити той самий інтеграл, але для більш тісно розташованих частот $\omega_k = k\omega = k \frac{2\pi}{T}$.

Заміна границь інтегрування не грає ролі – адже на доданому між імпульсами просторі сигнал має нульове значення. Єдина додаткова зміна полягає у зменшенні загального рівня гармонік через ділення результату інтегрування на збільшений період T .

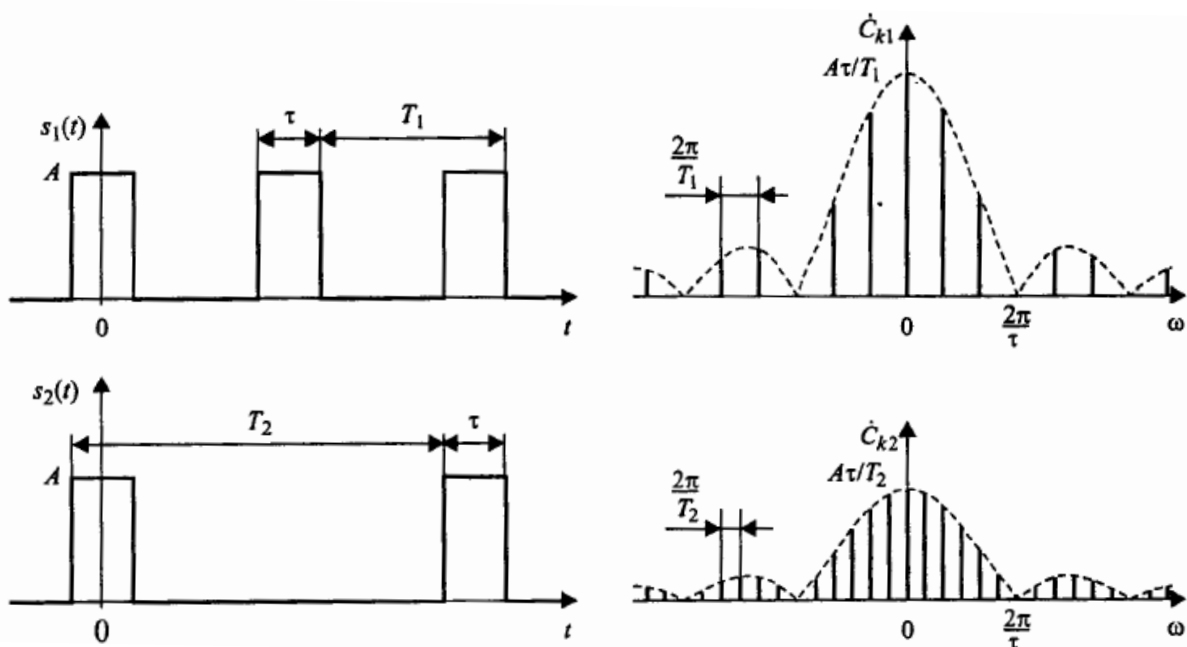


Рис. 5.1. Змінення спектра послідовності імпульсів при дворазовому збільшенні періоду їх слідування

На рис. 5.1 згадані зміни ілюструються на прикладі дворазового збільшення періоду проходження прямокутних імпульсів. Зверніть увагу на те,

що горизонтальна вісь спектральних графіків проградуєвана в значеннях частот, а не номерів гармонік.

Отже, зі зростанням періоду проходження імпульсів гармоніки розташовуються ближче один до одного по частоті, а загальний рівень спектральних складових стає все менше. При цьому вигляд інтеграла (5.1) не змінюється.

Нарешті, якщо спрямувати період до нескінченності (перетворивши тим самим періодичну послідовність в одиночний імпульс), гармоніки спектра будуть щільно займати всю частотну вісь, а їх амплітуди впадуть до нуля (стануть нескінченно малими). Однак взаємне співвідношення між рівнями гармонік залишається незмінним і визначається тим самим інтегралом (5.1). Тому при спектральному аналізі неперіодичних сигналів формула для розрахунку коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є модифікується в такий спосіб:

- а) частота перестає змінюватися дискретно і стає безперервним параметром перетворення (тобто $k\omega$ у формулі (5.1) замінюється на ω);
- б) видаляється множник $1/T$;
- в) результатом обчислень замість нумерованих коефіцієнтів ряду C_k стає функція частоти $S(\omega)$ – *спектральна функція* сигналу $s(t)$. Іноді її називають також *спектральною щільністю*.

В результаті вказаних модифікацій формула (5.1) перетворюється в формулу прямого перетворення Фур'є:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5.2)$$

У формулі самого ряду Фур'є підсумовування, природно, замінюється на інтегрування (і, крім того, перед інтегралом з'являється поділ на 2π). Отриманий вираз називається зворотним перетворенням Фур'є:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (5.3)$$

Якщо ж використовувати не кутову частоту ω , а звичайну частоту $f = \omega/2\pi$, то формули прямого і зворотного перетворення Фур'є стають ще більш симетричними, відрізняючись лише знаком в показнику експоненти:

$$\begin{aligned}\dot{S}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(f)e^{j2\pi ft} df\end{aligned}\quad (5.4)$$

Для того, щоб перетворення Фур'є можна було б застосовувати, сигнал повинен відповідати таким вимогам:

- а) повинні виконуватися умови Діріхле;
- б) сигнал повинен бути абсолютно інтегрованим. Це означає, що інтеграл від його модуля повинен бути кінцевою величиною:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

Обидві ці умови виконуються абсолютно для усіх сигналів, що зустрічаються в природі та техніці. Умови Діріхле не виконуються для деяких абстрактних сигналів, що відображаються математичними формулами й в природі не існують, але широко застосовуються в теорії радіотехнічних кіл та сигналів. Проте із залученням математичного апарату узагальнених функції стає можливим виконання Фур'є-аналізу навіть для деяких сигналів, які не задовольняють цим вимогам (наприклад, для дельта-функції).

Якщо сигнал $s(t)$ – дійсна функція (електричні сигнали – виключно дійсні функції), то відповідна спектральна функція $\dot{S}(\omega)$ є «сполучено-симетричною» щодо нульової частоти. Це означає, що значення спектральної функції на частотах ω і $-\omega$ є комплексними числами, сполученими один до одного:

$$\dot{S}(-\omega) = S^*(\omega) \quad (5.5)$$

Якщо $s(t)$ – парна функція, то, як і в випадку ряду Фур'є, спектр буде виключно дійсним. Якщо, навпаки, $s(t)$ – функція непарна, то спектральна функція $\dot{S}(\omega)$ буде чисто уявною.

Модуль спектральної функції часто називають *амплітудним спектром*, а її аргумент – *фазовим спектром*. Зважаючи на те, що спектральна функція матеріального сигналу $\dot{S}(\omega)$ є «сполучено-симетричною» щодо нульової частоти (формула (5.5)), то очевидним є те, що для матеріального сигналу амплітудний спектр є парною, а фазовий – непарною функцією частоти:

$$\begin{aligned} |\dot{S}(-\omega)| &= |\dot{S}(\omega)| \\ \varphi_s(-\omega) &= -\varphi_s(\omega) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Отже, перетворення Фур'є (5.2) ставить у відповідність сигналу, заданому в часі $s(t)$, його спектральну функцію $\dot{S}(\omega)$. При цьому здійснюється перехід з часової області в частотну. Перетворення Фур'є є взаємно-однозначним, тому представлення сигналу в частотній області (спектральна функція $\dot{S}(\omega)$) містить рівно стільки ж інформації, скільки й сигнал $s(t)$, заданий в часовій області.

Властивості перетворення Фур'є

Під властивостями перетворення Фур'є розуміють взаємну відповідність трансформацій сигналів та їх спектрів. Гарне знання властивостей перетворення Фур'є дозволяє прогнозувати приблизний (а іноді й точний) вигляд спектру сигналу і таким чином контролювати правдоподібність результату, що видається комп'ютером.

Надалі ми будемо розглядати два абстрактних сигнали $f(t)$ і $g(t)$, і будемо вважати, що ці сигнали мають спектральні функції $\dot{F}(\omega)$ і $\dot{G}(\omega)$ відповідно.

Лінійність

Перетворення Фур'є є лінійним інтегральним перетворенням. Лінійність є властивістю перетворення Фур'є. Сенс лінійності можна сформулювати так: спектр суми дорівнює сумі спектрів. Використовуючи мову математики це положення можна сформулювати наступним чином: лінійна комбінація сигналів має спектр у вигляді такої самої (з тими самими коефіцієнтами) лінійної комбінації їх спектральних функцій. Якщо $s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$, то $\dot{S}(\omega) = \alpha \dot{F}(\omega) + \beta \dot{G}(\omega)$.

Зміна масштабу осі часу

Існує загальне правило: чим коротше сигнал, тим ширше його спектр. Поглянемо на це правило зі строгих теоретичних позицій. Якщо змінити тривалість сигналу $f(t)$, зберігаючи його форму, то новий сигнал $s(t)$ слід записати таким чином:

$$s(t) = f(\alpha t)$$

Якщо $\alpha > 1$, то сигнал стискається. Якщо $\alpha < 1$, то розтягується. Якщо ж $\alpha < 0$, то додатково відбувається дзеркальне відображення сигналу щодо вертикальної осі. Подивимося, як таке перетворення позначається на спектрі:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-j\frac{\omega}{\alpha} \alpha t} d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (5.7)$$

Таким чином, зміна тривалості сигналу призводить до зміни ширини спектра в протилежну сторону (аргумент t на α множиться, а ω ділиться) в поєднанні зі збільшенням (при розтягуванні, $\alpha < 1$), або зменшенням (при стисканні, $\alpha > 1$) рівня спектральних складових.

Отримана формула справедлива для $\alpha > 0$. Для $\alpha < 0$ використання заміни змінної $t \rightarrow \alpha t$ викликає перестановку границь інтегрування і, як наслідок, зміну знаку в його результаті:

$$\dot{S}(\omega) = -\frac{1}{\alpha} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha < 0 \quad (5.8)$$

Об'єднавши обидва випадки, замість двох формул (5.7) та (5.8) можна записати одну формулу

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0 \quad (5.9)$$

В окремому випадку, коли $\alpha = -1$ отримана формула дає наступне:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{F}(-\omega) = \dot{F}^*(\omega) \quad (5.10)$$

Тобто, дзеркальне відображення сигналу відносно початку відліку часу призводить до дзеркального відображення спектра щодо нульової частоти. Для дійсного сигналу (а тільки такі й існують в природі та техніці) це відповідає комплексному сполученню спектра. Тобто амплітудний спектр не змінюється, а фазовий віддзеркалюється відносно осі ординат.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Перетворення Фур'є є інструментом спектрального аналізу неперіодичних чи періодичних сигналів?
2. Яким чином представлено частоту в перетворенні Фур'є і в чому відмінність представлення частоти в перетворенні Фур'є від представлення частоти в ряді Фур'є?
3. Що відбувається з множником $1/T$ при переході від ряду Фур'є до перетворення Фур'є.
4. Як називається функція, яка є результатом перетворення Фур'є?
5. Запишіть формулу прямого перетворення Фур'є.
6. Запишіть формулу зворотного перетворення Фур'є.
7. Які математичні умови до сигналу для застосування перетворення Фур'є?
8. Як пов'язані значення спектральної функції на частотах ω і $-\omega$?
9. Що називають амплітудним спектром?
10. Що називають фазовим спектром?
11. Сформулюйте властивість лінійності перетворення Фур'є?
12. Як змінюється вигляд спектральної функції сигналу під час зміни масштабу осі часу («стискання» і «розтягування» сигналу)?

Рівень курсу

1. Перехід від ряду Фур'є до прямого та зворотного перетворення Фур'є.
2. Властивості перетворення Фур'є: лінійність та зміна масштабу часу.

ЛЕКЦІЯ № 6

Тема: Властивості перетворення Фур'є. Фур'є-аналіз неінтегровних сигналів.

Зміст

Властивості перетворення Фур'є (повторення лекції 6)	2
Лінійність (повторення лекції 6)	2
Зміна масштабу осі часу (повторення лекції 6)	2
Фур'є-аналіз неінтегровних сигналів	3
Дельта-функція.....	3
Постійний в часі сигнал (константа).....	4
Властивості перетворення Фур'є (продовження).....	5
Диференціювання сигналу.....	5
Інтегрування сигналу.....	6
Контрольні питання за темою.....	7
Рівень модуля	7
Рівень курсу.....	7

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Властивості перетворення Фур'є (повторення лекції 6)

Під властивостями перетворення Фур'є розуміють взаємну відповідність трансформацій сигналів та їх спектрів. Гарне знання властивостей перетворення Фур'є дозволяє прогнозувати приблизний (а іноді й точний) вигляд спектру сигналу і таким чином контролювати правдоподібність результату, що видається комп'ютером.

Надалі ми будемо розглядати два абстрактних сигнали $f(t)$ і $g(t)$, і будемо вважати, що ці сигнали мають спектральні функції $\dot{F}(\omega)$ і $\dot{G}(\omega)$ відповідно.

Лінійність (повторення лекції 6)

Перетворення Фур'є є лінійним інтегральним перетворенням. Лінійність є властивістю перетворення Фур'є. Сенс лінійності можна сформулювати так: спектр суми дорівнює сумі спектрів. Використовуючи мову математики це положення можна сформулювати наступним чином: лінійна комбінація сигналів має спектр у вигляді такої самої (з тими самими коефіцієнтами) лінійної комбінації їх спектральних функцій. Якщо $s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$, то $\dot{S}(\omega) = \alpha \dot{F}(\omega) + \beta \dot{G}(\omega)$.

Зміна масштабу осі часу (повторення лекції 6)

Існує загальне правило: чим коротше сигнал, тим ширше його спектр. Поглянемо на це правило зі строгих теоретичних позицій. Якщо змінити тривалість сигналу $f(t)$, зберігаючи його форму, то новий сигнал $s(t)$ слід записати таким чином:

$$s(t) = f(\alpha t)$$

Якщо $\alpha > 1$, то сигнал стискається. Якщо $\alpha < 1$, то розтягується. Якщо ж $\alpha < 0$, то додатково відбувається дзеркальне відображення сигналу щодо вертикальної осі. Подивимося, як таке перетворення позначається на спектрі:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-j\frac{\omega}{\alpha} \alpha t} d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (6.1)$$

Таким чином, зміна тривалості сигналу призводить до зміни ширини спектра в протилежну сторону (аргумент t на α множиться, а ω ділиться) в поєднанні зі збільшенням (при розтягуванні, $\alpha < 1$), або зменшенням (при стисканні, $\alpha > 1$) рівня спектральних складових.

Отримана формула справедлива для $\alpha > 0$. Для $\alpha < 0$ використання заміни змінної $t \rightarrow \alpha t$ викликає перестановку границь інтегрування і, як наслідок, зміну знаку в його результаті:

$$\dot{S}(\omega) = -\frac{1}{\alpha} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha < 0 \quad (6.2)$$

Об'єднавши обидва випадки, замість двох формул (6.1) та (6.2) можна записати одну формулу

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0 \quad (6.3)$$

В окремому випадку, коли $\alpha = -1$ отримана формула дає наступне:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{F}(-\omega) = \dot{F}^*(\omega) \quad (6.4)$$

Тобто, дзеркальне відображення сигналу відносно початку відліку часу призводить до дзеркального відображення спектру щодо нульової частоти. Для дійсного сигналу (а тільки такі й існують в природі та техніці) це відповідає комплексному сполученню спектра. Тобто амплітудний спектр не змінюється, а фазовий віддзеркалюється відносно осі ординат.

Таким чином, розглянута властивість відображає загальне правило: чим коротше сигнал, тим ширше його спектр.

Отже, при інтегруванні вихідного сигналу високі частоти послаблюються, а низькі посилюються. Фазовий спектр сигналу зміщується на -90° для позитивних частот і на 90° для негативних. Множник називають оператором інтегрування в частотній області.

Фур'є-аналіз неінтегрованих сигналів

У попередній лекції були вказані умови застосовності перетворення Фур'є: виконання умов Діріхле і абсолютна інтегрованість сигналу. Однак в ряді випадків можна застосувати перетворення Фур'є і до сигналів, які не задовольняють цим умовам.

Скористаємося перетворенням Фур'є для спектрального аналізу таких сигналів, до яких воно формально не застосовується.

Дельта-функція

Перш за все, обчислимо перетворення Фур'є для сигналу у вигляді дельта-функції (інакше – функції Дірака). Про її властивості йшлося в першій лекції. Фільтрувальна властивість дельта-функції буде використано нами для знаходження її спектральної функції. Нагадаємо, що фільтрувальна властивість дельта-функції полягає в тому, що якщо дельта-функція присутня під інтегралом в якості множника, то результат інтегрування буде дорівнює

значенню решти підінтегрального виразу в тій точці, де зосереджений дельта-імпульс:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Зокрема:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

Таким чином, якщо $s(t) = \delta(t)$, то спектральна функція такого сигналу

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}d\omega = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$

Спектр дельта-функції є константою, тобто він є рівномірним в нескінченній смузі частот. Це цілком узгоджується із загальним співвідношенням між тривалістю сигналу і шириною його спектру: дельта-імпульс має нескінченно малу тривалість, а його спектр нескінченно широкий.

З отриманого результату випливає, що дельта-функцію можна записати у вигляді зворотного перетворення Фур'є в такий спосіб:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (6.5)$$

Додатково напишемо цей самий вираз у різний спосіб, використовуючи ту обставину, що $\delta(x) = \delta(-x)$, що є очевидним. Зокрема:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \quad (6.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(-t) = 2\pi\delta(t) \quad (6.7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (6.8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (6.9)$$

Останнє співвідношення буде використано нами при аналізі наступного сигналу.

Постійний в часі сигнал (константа)

Оскільки спектром дельта-функції є константа, завдяки дуальності перетворення Фур'є можна очікувати, що спектром постійного сигналу, тобто

сигналу у вигляді константи ($s(t)=A$) буде дельта-функція частоти. Перевіримо це, скориставшись тільки що отриманим співвідношенням (6.9):

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = A \cdot 2\pi\delta(\omega) = 2\pi A\delta(\omega) \quad (6.10)$$

В даному прикладі добре простежується зворотна пропорційність між тривалістю сигналу і шириною його спектра: нескінченно протяжний сигнал має нескінченно вузький спектр.

Властивості перетворення Фур'є (продовження)

Диференціювання сигналу

Нехай новий сигнал $s(t)$ утворюється шляхом диференціювання вихідного сигналу $f(t)$, спектральна функція якого $\dot{F}(\omega)$ відома:

$$s(t) = \frac{df(t)}{dt} \quad (6.11)$$

Розглянемо, як впливає диференціювання сигналу у часовій області на його спектр. Для цього скористаємося визначенням поняття похідної через границю (ліміт):

$$s(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} \quad (6.12)$$

Застосуємо до цього виразу перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\varepsilon) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\varepsilon) e^{-j\omega(t+\varepsilon)} e^{j\omega\varepsilon} dt - \dot{F}(\omega)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\varepsilon) e^{-j\omega(t+\varepsilon)} d(t+\varepsilon) - \dot{F}(\omega)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega\varepsilon} \dot{F}(\omega) - \dot{F}(\omega)}{\varepsilon} = \\ &= \dot{F}(\omega) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \dot{F}(\omega) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(e^{j\omega\varepsilon} - 1)'}{(\varepsilon)'} = \dot{F}(\omega) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{j\omega e^{j\omega\varepsilon}}{1} = \dot{F}(\omega) j\omega e^{j\omega \cdot 0} = j\omega \dot{F}(\omega) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Для знаходження границі (ліміту) коли ε прямує до нуля ($\varepsilon \rightarrow 0$) було використано правило Лопіталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Таким чином, спектральну функцію від похідної сигналу по часу отримуємо шляхом множення спектральної функції цього сигналу на $j\omega$:

$$\dot{S}(\omega) = j\omega\dot{F}(\omega) \quad (6.14)$$

При диференціюванні низькі частоти послаблюються, а високі посилюються. Фазовий спектр сигналу зсувається на 90° для позитивних частот і на -90° для негативних. Множник $j\omega$ називають оператором диференціювання сигналу в частотній області.

Інтегрування сигналу

Нехай новий сигнал $s(t)$ утворюється шляхом диференціювання вихідного сигналу $f(t)$, спектральна функція якого $\dot{F}(\omega)$ відома:

$$s(t) = \int f(t)dt \quad (6.15)$$

Інтегрування, як відомо, є операцією, зворотною до диференціювання. Тому спектральна функція сигналу $s(t)$, отриманого шляхом (6.15), може бути записана на основі формули (6.14) у вигляді:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega} \quad (6.16)$$

Проте ця формула справедлива лише для сигналів, що не містять постійної складової (або, інакше кажучи, у яких немає складової спектру на нульовій частоті $\dot{F}(0)$), тобто у яких середнє значення дорівнює нулю:

$$\dot{F}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\cdot 0\cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0 \quad (6.17)$$

У загальному випадку, коли сигнал може містити постійну складову, результат повинен включати додаткову складову у вигляді дельта-функції на нульовій частоті. Множник перед дельта-функцією є пропорційним до постійної складової сигналу $\dot{F}(0)$:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega} + \pi\dot{F}(0)\delta(\omega) \quad (6.18)$$

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Запишіть формулу для знаходження спектральної функції сигналу, який диференційовано за часом.
2. Запишіть формулу для знаходження спектральної функції сигналу після його інтегрування в часовій області.
3. При диференціюванні які частоти посилюються: високі або низькі?
4. При диференціюванні які частоти послаблюються: високі або низькі?
5. При інтегруванні які частоти посилюються: високі або низькі?
6. При інтегруванні які частоти послаблюються: високі або низькі?
7. Намалюйте амплітудний спектр дельта-функції.
8. Намалюйте амплітудний спектр постійного в часі сигналу (константа).
9. З двох сигналів: короткий сигнал і довгий сигнал – який з них має більш широкий спектр?

Рівень курсу

1. Властивості перетворення Фур'є: диференціювання сигналу.
2. Властивості перетворення Фур'є: інтегрування сигналу.
3. Спектральна функція дельта-функції.
4. Спектральна функція постійного в часі сигналу.

ЛЕКЦІЯ № 7

Тема: Перетворення Фур'є для прямокутного імпульсу. Властивості перетворення Фур'є (продовження).

Зміст

Приклад розрахунку перетворення Фур'є	2
Прямокутний імпульс	2
Перетворення Фур'є для інших видів сигналів	3
Фур'є-аналіз неінтегровних сигналів (продовження).....	3
Функція одиничного стрибка.....	3
Гармонійний сигнал.....	3
Властивості перетворення Фур'є (продовження).....	4
Затримка.....	4
Множення сигналу на гармонійну функцію	5
Спектр згортки сигналів.....	7
Спектр добутку сигналів	7
Таблиця перетворення Фур'є для окремих видів сигналів.....	8
Контрольні питання за темою.....	11
Рівень модуля	11
Рівень курсу	11

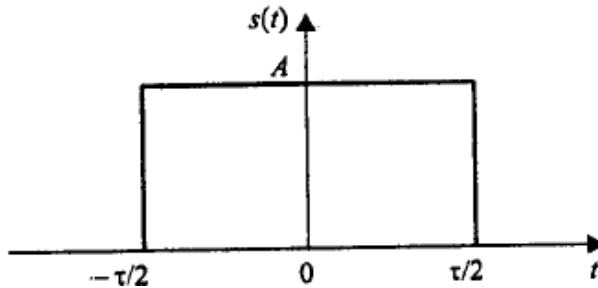
Джерела:

1. Гоноровскнй И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Приклад розрахунку перетворення Фур'є

Прямокутний імпульс

Розглянемо прямокутний імпульс, центрований відносно початку відліку часу (рис. 7.1):



$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad (7.1)$$

Рис. 7.1 Прямокутний імпульс

Обчислюємо спектральну функцію:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = \\ &= \frac{2A}{\omega} \frac{(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2})}{-2j} = \frac{2A}{\omega} \sin(\omega\tau/2) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Таким чином спектральна функція прямокутного імпульсу має вигляд:

$$\dot{S}(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \quad (7.3)$$

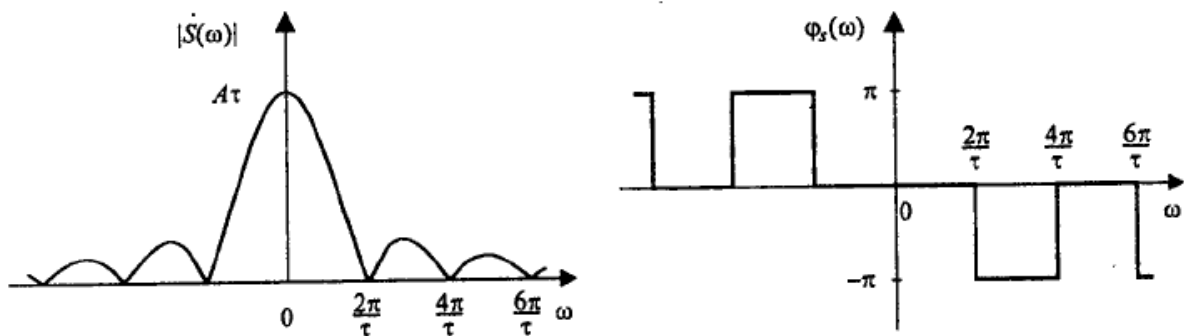


Рис. 7.2 Амплітудний (зліва) і фазовий (праворуч) спектри прямокутного імпульсу

Можна бачити, що спектр являє собою функцію виду $\frac{\sin x}{x}$ (рис. 7.2).

Амплітудний спектр має пелюстковий характер, і ширина пелюсток дорівнює $2\pi/\tau$, тобто обернено пропорційна тривалості імпульсу. Значення спектральної функції на нульовій частоті дорівнює площі імпульсу $A\tau$. Спектральна функція є дійсною, тому фазовий спектр приймає лише два

значення 0 і π , в залежності від знаку функції $\frac{\sin x}{x}$. Значення π та $-\pi$ не розрізняються, проте для фазового спектра при $\omega > 0$ і $\omega < 0$ використовуються різні знаки з метою представити фазовий спектр у вигляді непарної функції.

Перетворення Фур'є для інших видів сигналів

Приклади перетворення Фур'є для інших типових сигналів наведені в «Таблиці перетворення Фур'є для окремих видів сигналів», яка розміщена в кінці цієї лекції. Перетворення Фур'є для різних математичних функцій також можна знайти в відповідних математичних довідниках, або в літературі з теорії керування, теорії кіл та сигналів. В загальному випадку для знаходження в аналітичному вигляді перетворення Фур'є для конкретного виду сигналу необхідно провести інтегрування за формулою (5.2) (див. лекцію 5). Таке інтегрування аналітично далеко не завжди можна виконати, тому для знаходження перетворення Фур'є часто застосовують чисельні методи інтегрування і тоді спектральну функцію сигналу отримують в табличній, або графічній формі.

Усе сказане в попередньому абзаці повною мірою стосується й зворотного перетворення Фур'є.

Фур'є-аналіз неінтегровних сигналів (продовження)

Функція одиничного стрибка

Функція одиничного стрибка (див. лекцію 1) являє собою інтеграл від дельта-функції, тому, відповідно до властивостей перетворення Фур'є, ми отримуємо

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(t) e^{-j\omega t} dt = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (7.4)$$

Оскільки дельта-функція має ненульову (рівну 1) постійну складову, то відповідно до формули (6.18), наведеної для даного випадку в попередній лекції, в спектрі з'являється додаткова складова у вигляді дельта-функції на нульовій частоті.

Гармонійний сигнал

Розрахуємо спектр гармонійного сигналу загального вигляду:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (7.5)$$

Для розрахунку спектральної функції представимо косинус у вигляді напівсуми комплексних експонент і скористаємося формулою (6.9) з попередньої лекції:

$$\begin{aligned}
\dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A \frac{e^{j\omega_0 t + j\varphi_0} + e^{-j\omega_0 t - j\varphi_0}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\
&= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\varphi_0} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\varphi_0} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \frac{A}{2} e^{j\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{A}{2} e^{-j\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \quad (7.6) \\
&= A\pi e^{j\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0)
\end{aligned}$$

Результат являє собою пару дельта-функцій, розташованих на частотах $\pm\omega_0$. Множники при них відображають амплітуду і початкову фазу (тобто комплексну амплітуду) гармонійного сигналу.

Той же результат можна було б отримати, застосувавши до спектру постійного в часі сигналу властивість перетворення Фур'є (7.9), яка стосується множення сигналу на гармонійну функцію.

Властивості перетворення Фур'є (продовження)

Продовжуємо розглядати два абстрактних сигналу $f(t)$ та $g(t)$, спектральні функції яких дорівнюють $\dot{F}(\omega)$ та $\dot{G}(\omega)$ відповідно.

Затримка

Розглянемо, як позначається на спектральній функції затримка сигналу в часі. Нехай τ – час затримки:

$$s(t) = f(t - \tau),$$

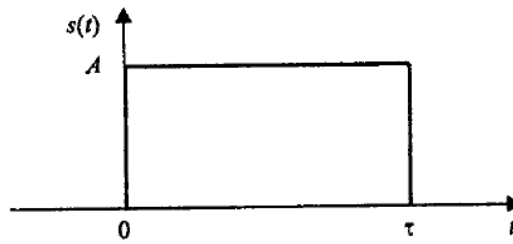
тоді спектральна функція зміниться наступним чином:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} = \dot{F}(\omega) e^{-j\omega\tau} \quad (7.7)$$

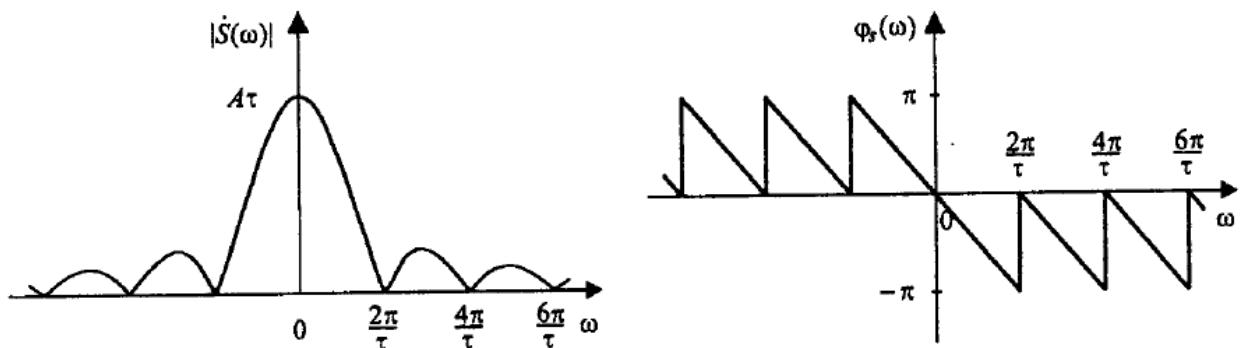
Результат показує, що спектр вихідного сигналу виявився помноженим на комплексну експоненту виду $e^{-j\omega\tau}$. Таким чином, амплітудний спектр сигналу не змінюється, тому що модуль такої комплексної експоненти дорівнює 1. Фазовий спектр отримує додаткову складову $-\omega\tau$, лінійно залежну від частоти.

Зокрема, якщо прямокутний імпульс (рис. 7.1) затримати на час $\tau/2$ так, що отриманий імпульс буде починатися в момент часу 0 і закінчуватися в момент часу τ (рис. 7.3), то його спектральна функція на підставі (7.3) та (7.7) буде мати вигляд:

$$\dot{S}(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2}$$

Рис. 7.3 Прямокутний імпульс, затриманий на час $\tau/2$

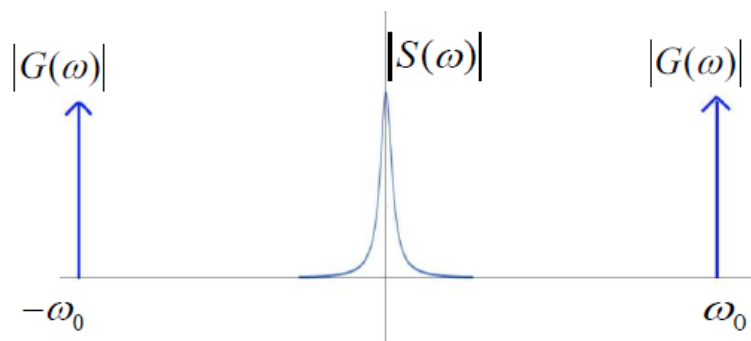
Амплітудний спектр, як щойно було зазначено, не зміниться і збереже вигляд, представлений на рис. 7.2, а фазовий спектр буде лінійно залежати від частоти ω ($\varphi(\omega) = \varphi_{\Pi}(\omega) - \omega\tau/2$), где $\varphi_{\Pi}(\omega)$ – фаза прямокутного імпульса без затримки (рис. 7.2), та в результаті прийме пілкоподібний вид з періодом повторення по циклічній частоті $2\pi/\tau$ (рис. 7.4).

Рис. 7.4 Амплітудний (зліва) і фазовий (праворуч) спектри затриманого на час $\tau/2$ прямокутного імпульсу

Множення сигналу на гармонійну функцію

Помножимо сигнал $s(t)$, спектр якого $\dot{S}(\omega)$ нам відомий, на гармонійну функцію $g(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (рис.7.5):

$$f(t) = s(t)g(t) = s(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (7.8)$$

Рис. 7.5 Спектри сигналу $s(t)$ та гармонійного сигналу $g(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ до перемноження

Знайдемо спектральну функцію $\dot{F}(\omega)$ нового сигналу $f(t)$, який є результатом множення сигналу $s(t)$ на гармонійну функцію:

$$\begin{aligned}
 \dot{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{e^{j\omega_0 t + j\varphi_0} + e^{-j\omega_0 t - j\varphi_0}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j\varphi_0} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\varphi_0} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \dot{S}(\omega + \omega_0)
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Спектр «роздвоївся» (рис. 7.6). Він розклався на дві складові вдвічі меншого рівня (множник 1/2), зміщені вправо ($\omega - \omega_0$) і вліво ($\omega + \omega_0$) по осі частот на величину ω_0 . Крім того, при кожній складовій є множник $e^{j\varphi_0}$, або $e^{-j\varphi_0}$, що враховує початкову фазу φ_0 гармонічного коливання.

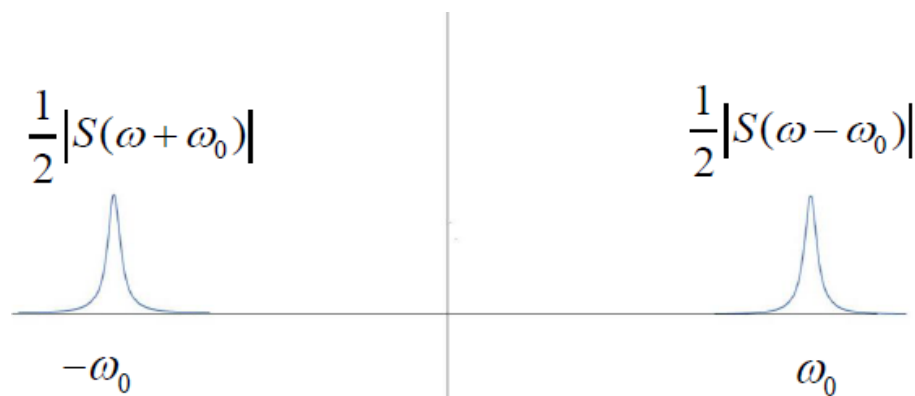


Рис. 7.6 Спектр сигналу $f(t)$, який є результатом множення сигналу $s(t)$ на гармонійний сигнал $g(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Зазначимо, що радіоімпульси отримуються шляхом множення відповідних відеоімпульсів на гармонійний сигнал $g(t) = \cos \omega_0 t$:

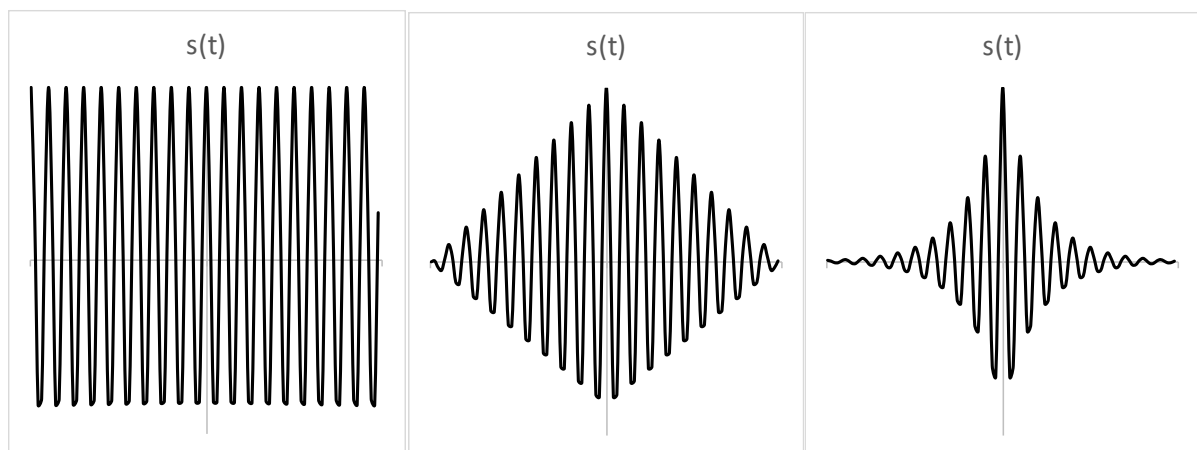


Рис. 7.7 Радіоімпульси

Спектр згортки сигналів

Згортка сигналів є інтегральною операцією, яка дуже часто використовується, оскільки вона описує, зокрема, проходження сигналу через лінійну систему з постійними параметрами:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (7.10)$$

Запровадимо для цієї конструкції перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) = \dot{F}(\omega)\dot{G}(\omega) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Отриманий результат дуже важливий, він часто використовується на практиці: спектр згортки дорівнює добутку спектрів.

Спектр добутку сигналів

Співвідношення (7.11), отримане вище, і дуальність перетворення Фур'є дозволяють передбачити результат. Нехай

$$s(t) = f(t)g(t) \quad (7.12)$$

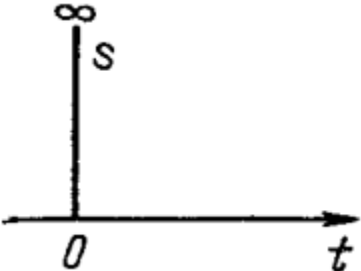
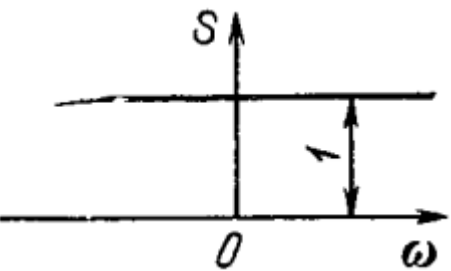
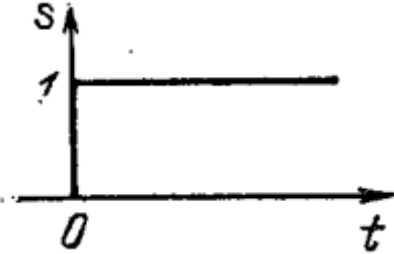
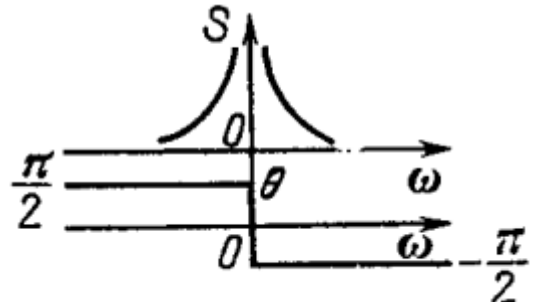
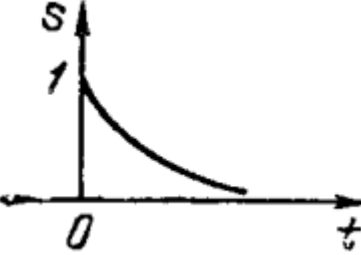
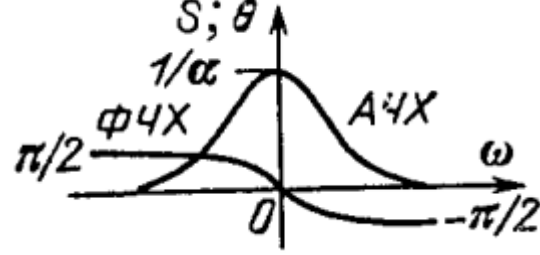
Тоді

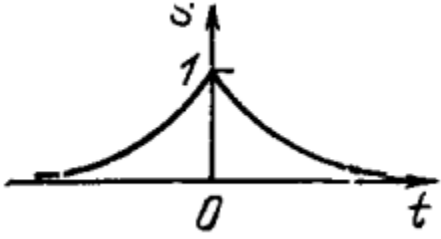
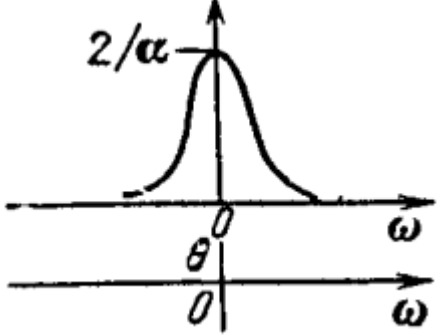
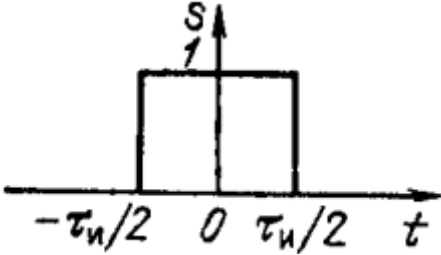
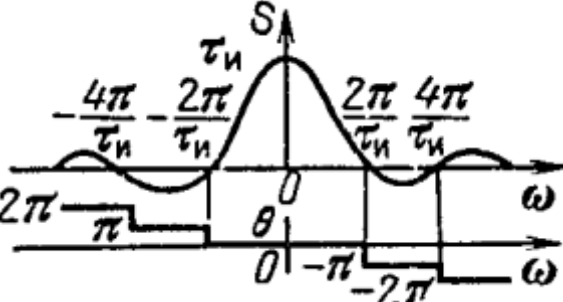
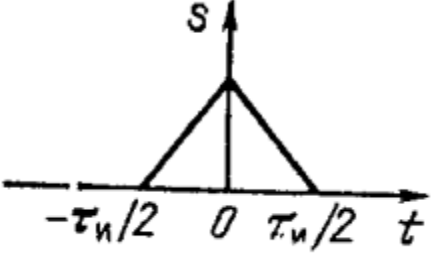
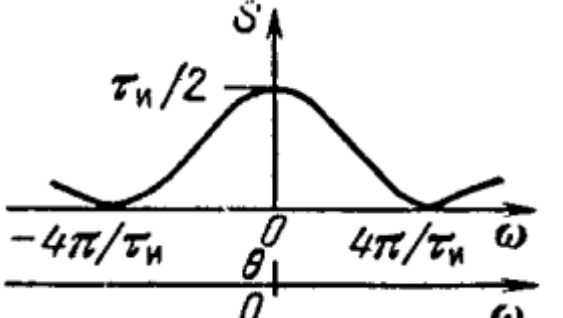
$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{F}(\lambda)e^{j\lambda t} d\lambda \right) g(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{F}(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j(\omega-\lambda)t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{F}(\lambda)\dot{G}(\omega-\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (7.13)$$

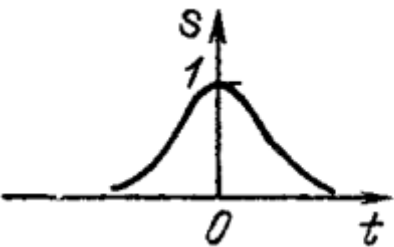
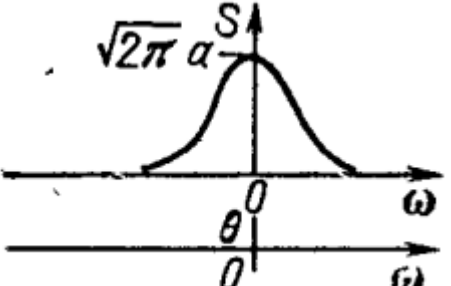
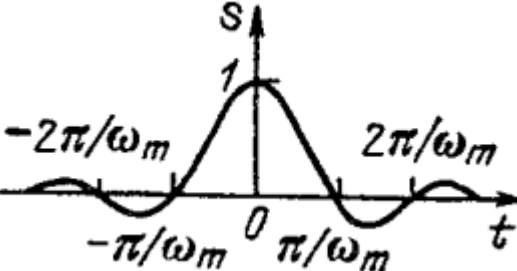
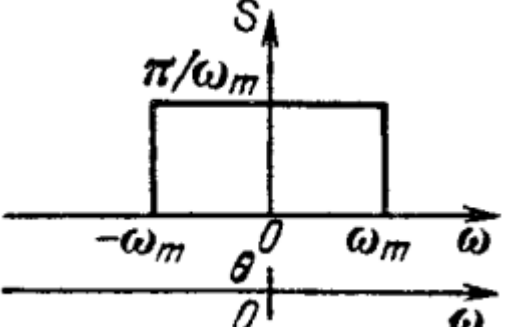
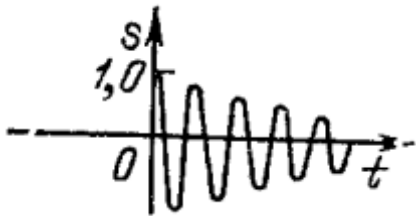
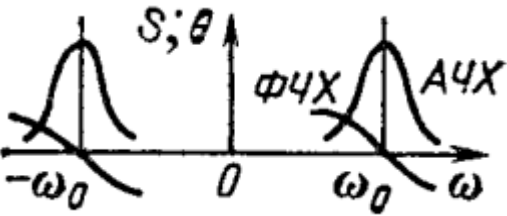
Як й слід було очікувати, спектр добутку є згортка спектрів. Єдиною додатковою тонкістю є множник $1/2\pi$ перед інтегралом згортки.

При виведенні співвідношення ми представили сигнал $f(t)$ за допомогою зворотного перетворення Фур'є від його спектральної функції.

Таблиця перетворення Фур'є для окремих видів сигналів

Сигнал		Спектральна функція	
	$\delta(t)$	$\dot{S}(\omega) = 1$	
	$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{коли } t \geq 0 \\ 0 & \text{коли } t < 0 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
	$s(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{коли } t \geq 0 \\ 0 & \text{коли } t < 0 \end{cases}$ $a > 0$	$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$	

	$s(t) = e^{-a t }, \quad a > 0$	$\dot{S}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	
	$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{коли } t \leq \tau_n/2 \\ 0 & \text{коли } t > \tau_n/2 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \tau_n \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2}$	
	$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau_n/2} & \text{коли } t \leq \tau_n/2 \\ 0 & \text{коли } t > \tau_n/2 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \frac{\tau_n}{2} \left(\frac{\sin(\omega\tau_n/4)}{\omega\tau_n/4} \right)^2$	

	$s(t) = e^{-t^2/2a^2}$	$\dot{S}(\omega) = \sqrt{\pi} a e^{-a^2 \omega^2 / 2}$	
	$s(t) = \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t}$	$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} \pi \omega_m & \text{КОЛИ } \omega < \omega_m \\ 0 & \text{КОЛИ } \omega > \omega_m \end{cases}$	
	$s(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos \omega_0 t, & \text{КОЛИ } t \geq 0 \\ 0 & \text{КОЛИ } t < 0 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Намалуйте амплітудний спектр прямокутного імпульсу.
2. Сигнал $s(t)$ є сигналом $f(t)$, зміщеним за часом на інтервал τ , тобто маємо затримку: $s(t) = f(t - \tau)$. Як буде виглядати спектральна функція сигналу $S(\omega)$, якщо відома спектральна функція $F(\omega)$ сигналу $f(t)$?
3. Запишіть формулу для знаходження спектральної функції згортки сигналів.
4. Запишіть формулу для знаходження спектральної функції добутку сигналів.
5. Запишіть формулу для знаходження спектральної функції сигналу після його множення на гармонійну функцію.
6. Намалуйте амплітудний спектр гармонійного сигналу $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
7. Запишіть формулу спектральної функції одиничного стрибка.

Рівень курсу

1. Властивості перетворення Фур'є: спектральна функція згортки сигналів.
2. Властивості перетворення Фур'є: спектральна функція добутку двох сигналів.
3. Спектральна функція сигналу одиничного стрибка.
4. Спектральна функція гармонійного сигналу.
5. Властивості перетворення Фур'є: множення сигналу на гармонійну функцію.

ЛЕКЦІЯ № 8**Тема:** Кореляційний аналіз сигналів**Зміст**

Введення.....	2
Кореляційна функція	2
Взаємна кореляційна функція.....	5
Зв'язок між кореляційними функціями і спектрами сигналів	7
Енергетичні розрахунки в спектральній області	8
Контрольні питання за темою.....	10
Рівень модуля	10
Рівень курсу	11

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Введення

Кореляційний аналіз поряд зі спектральним відіграє велику роль в теорії сигналів. Його сенс полягає в кількісному вимірі *ступеню подібності* різних сигналів. Для цього служать кореляційні функції, з розгляду яких починається цей розділ.

Кореляційна функція

Кореляційною функцією (КФ; англійський термін *correlation function*, CF) детермінованого сигналу з кінцевої енергією є інтеграл (в нескінченних межах) від добутку двох копій сигналу, зсунутих один щодо одного на час τ .

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\tau)dt$$

Кореляційна функція показує ступінь подібності між сигналом і його зрушеною копією: чим більше значення кореляційної функції, тим ця подібність сильніше. Крім того, кореляційна функція має такі властивості:

1. Значення КФ за $\tau = 0$ дорівнює енергії сигналу, тобто інтегралу від його квадрата:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt = E$$

2. КФ є парною функцією свого аргументу τ .

$$B_s(\tau) = B_s(-\tau)$$

3. Значення КФ за $\tau = 0$ є максимально можливим значенням:

$$B_s(\tau) \leq B_s(0)$$

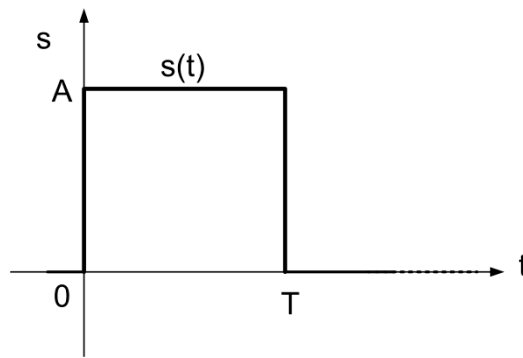
4. З ростом абсолютного значення τ КФ сигналу з кінцевої енергією загасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0$$

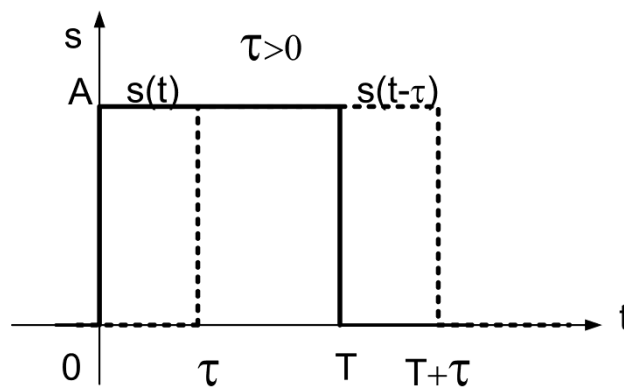
5. Якщо сигнал $s(t)$ не містить особливостей у вигляді дельта-функцій, його КФ не може мати розривів (тобто, повинна бути безперервною функцією).

6. Якщо сигнал – напруга, то розмірність його КФ дорівнює $V^2 \cdot c$.

Як приклад обчислимо КФ прямокутного імпульсу тривалістю T , показаного на рис. 9.1:

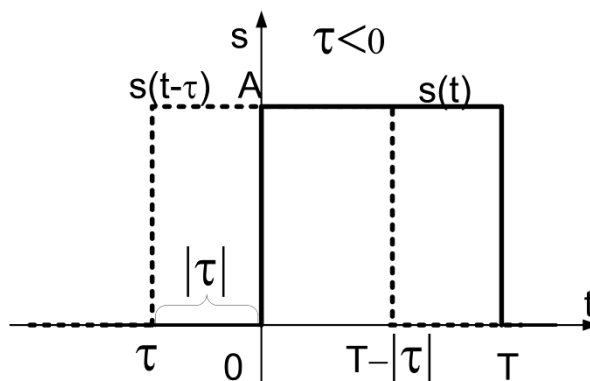
Рис. 9.1 Прямокутний імпульс тривалістю T

- за $0 \leq \tau \leq T$:

Рис. 9.2 Імпульс, зміщений на τ вперед за часом ($\tau > 0$)

$$B_s(\tau) = \int_{\tau}^T A^2 dt = A^2 (T - \tau)$$

- за $-T \leq \tau < 0$:

Рис. 9.3 Імпульс, зміщений на τ назад по часу ($\tau < 0$)

С урахуванням того, що $T - |\tau| = T - (-\tau) = T + \tau$, отримуємо

$$B_s(\tau) = \int_0^{T+\tau} A^2 dt = A^2 (T + \tau)$$

- за $|\tau| > T$:

$$B_s(\tau) = 0$$

Об'єднуючи результати, можна записати

$$B_s(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|), & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$$

Графік КФ прямокутного імпульсу показано на рис. 9.4.

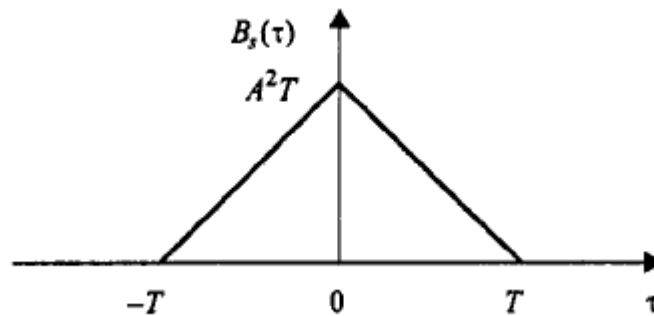


Рис. 9.4. Кореляційна функція прямокутного імпульсу

У разі періодичного сигналу (і взагалі будь-якого сигналу з нескінченною енергією) скористатися наведеним визначенням не вдасться. Тому КФ періодичного сигналу з періодом T обчислюють, усереднюючи добуток зсунутих копій в межах одного періоду:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt$$

Набір властивостей такої КФ дещо змінюється.

1. Значення за $\tau=0$ дорівнює не енергії, а *середній потужності* аналізованого сигналу:

$$B_s(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P_{cp}$$

2. Властивість парності зберігається: $B_s(\tau) = B_s(-\tau)$.

3. Значення КФ за $\tau=0$ так само є максимально можливим: $B_s(\tau) \leq B_s(0)$.

4. КФ періодичного сигналу є періодичною функцією з таким самим періодом, що і сам сигнал: $B_s(\tau+T) = B_s(\tau)$.

5. Якщо сигнал не містить дельта-функцій, його КФ буде безперервною функцією.

6. Розмірність КФ періодичного сигналу – квадрат розмірності сигналу (V^2 , якщо сигнал – напруга).

Як приклад обчислимо КФ гармонійного сигналу з частотою ω_0 :

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Обчислюємо кореляційний інтеграл, враховуючи, що період такого сигналу дорівнює $2\pi/\omega_0$:

$$\begin{aligned}
 B_s(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) A \cos(\omega_0(t - \tau) + \varphi_0) dt = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0 - \omega_0 \tau)}{2} dt = \\
 &= \frac{A^2 \cos(\omega_0 \tau)}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0 - \omega_0 \tau) dt = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)
 \end{aligned}$$

Таким чином, КФ гармонійного сигналу теж є гармонійною функцією. Також дуже важливим є той факт, що отриманий результат не залежить від початкової фази гармонійного сигналу (параметр φ_0 в отриманий вираз не ввійшов). Це прояв загальної властивості всіх КФ, про який піде мова далі в розділі «Зв'язок між кореляційними функціями і спектрами сигналів».

Взаємна кореляційна функція

Якщо КФ показує ступінь подібності між зсунутими копіями одного й того самого сигналу, то взаємна кореляційна функція (ВКФ; англійський термін – cross-correlation function, CCF) дозволяє виміряти аналогічну величину для зсунутих екземплярів двох різних сигналів.

Загальний вигляд формули КФ зберігається, але під інтегралом стоїть добуток двох різних сигналів, один з яких затриманий на час τ :

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt$$

Вочевидь, КФ є окремим випадком ВКФ, коли обидва сигнали однакові: $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$.

Як приклад обчислимо ВКФ прямокутного (див. рис. 9.1) та трикутного імпульсів (див. рис. 9.5):

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, \quad t > T \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, \quad t > T \end{cases}$$

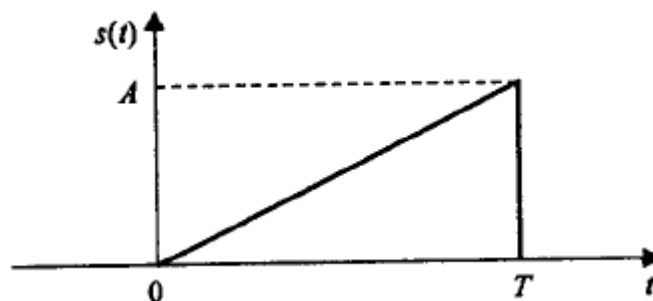


Рис. 9.5 Несиметричний трикутний імпульс

- за $0 \leq \tau \leq T$:

$$B_{12}(\tau) = \int_{\tau}^T A^2 \frac{t - \tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T - \tau)^2$$

- за $-T \leq \tau < 0$:

$$B_{12}(\tau) = \int_0^{T+\tau} A^2 \frac{t-\tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2)$$

▪ за $|\tau| > T$:

$$B_{12}(\tau) = 0$$

Об'єднуючи результати, можна записати

$$B_s(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{2T} (T - \tau)^2, & 0 \leq \tau \leq T \\ \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2), & -T \leq \tau < 0 \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$$

Графік отриманої ВКФ представлено на рис. 9.6.

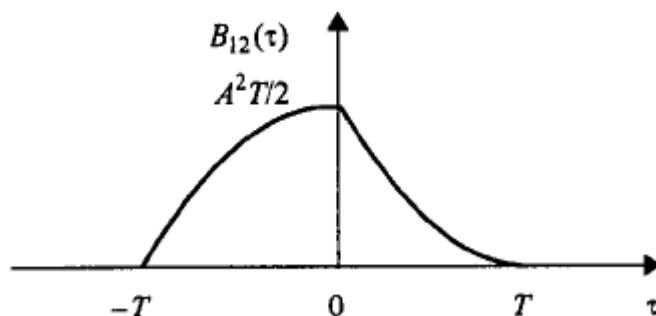


Рис. 9.6. ВКФ прямокутного і трикутного імпульсів

Властивості ВКФ дещо відрізняються від властивостей КФ:

1. $|B_{12}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$ де E_1 та E_2 – енергії сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$.
2. $B_{12}(-\tau) = B_{21}(\tau)$, тобто зміна знаку τ рівнозначна взаємній перестановці сигналів.

3. Значення ВКФ за $\tau=0$ нічим не виділяється; максимум може бути розташований в будь-якому місці осі τ .

4. З ростом абсолютного значення τ ВКФ сигналів з кінцевої енергією загасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_{12}(\tau) = 0$$

5. Якщо сигнали $s_1(t)$ та $s_2(t)$ не містять особливостей у вигляді дельта-функцій, їх ВКФ не може мати розривів (тобто, повинна бути безперервною функцією).

6. Якщо сигнали – напруга, то розмірність їх ВКФ дорівнює $V^2 \cdot c$.

Для періодичних сигналів поняття ВКФ зазвичай не застосовується, хоча воно може бути введено в разі, якщо сигнали $s_1(t)$ та $s_2(t)$ мають однаковий період.

Зв'язок між кореляційними функціями і спектрами сигналів

Оскільки кореляційні функції та спектри є інтегральними перетвореннями аналізованих сигналів, то ці характеристики пов'язані один з одним. Якщо вважати, що сигнали $s_1(t)$ та $s_2(t)$ мають спектральні функції $\dot{S}_1(\omega)$ і $\dot{S}_2(\omega)$, то перетворення Фур'є від взаємної кореляційної функції для сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$ пов'язане з відповідними спектральними функціями наступною формулою:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega)$$

Цей вираз виводиться в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} s_2(t-\tau) e^{j\omega\tau} e^{-j\omega\tau} dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t-\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) dt = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega) \end{aligned}$$

При виведенні ми використовуємо властивість спектральної функції, розглянуте раніше, яке полягає в тому, що $\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$. В цьому випадку:

$$\dot{S}_2^*(\omega) = \dot{S}_2(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{j\omega t} dt$$

Таким чином, взаємна кореляційна функція пов'язана перетворенням Фур'є з так званим взаємним спектром сигналів. Взаємний спектр для сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$ являє собою добуток їх спектральних функцій, одна з яких піддана комплексному сполученню:

$$\dot{S}_{12}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega)$$

Звідси можна зробити дуже важливий висновок: якщо спектри сигналів не перекриваються, то їх взаємний спектр дорівнює нулю на всіх частотах, а значить, дорівнює нулю і їх ВКФ при будь-яких зсувах часу τ . Таким чином, сигнали, спектри яких не перекриваються, є некорельованими.

Прийнявши $s_1(t)=s_2(t)=s(t)$ отримуємо аналогічний результат для кореляційної функції сигналу $s(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2$$

Отже, КФ сигналу пов'язана перетворенням Фур'є з квадратом модуля спектральної функції, або з *енергетичним спектром* сигналу.

Звідси впливає ще один важливий факт: КФ сигналу не залежить від його фазового спектру. Отже, сигнали, амплітудні спектри яких однакові, а фазові розрізняються, матимуть однакову КФ. Ще один наслідок полягає в

тому, що по КФ не можна відновити вихідний сигнал (внаслідок втрати інформації про фазу).

Енергетичні розрахунки в спектральній області

В розділі «Зв'язок між кореляційними функціями і спектрами сигналів» було показано, що ВКФ двох сигналів пов'язана перетворенням Фур'є з їх взаємним спектром. Оскільки існує пряме перетворення Фур'є, то можна записати і зворотне перетворення Фур'є:

$$B_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Тепер підставимо в цю формулу значення $\tau = 0$ і розкриємо вираз для ВКФ і взаємного спектра. Вийде співвідношення, яке називають *теоремою Релея*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2^*(\omega)d\omega$$

Якщо тепер прийняти сигнали однаковими $s_1(t)=s_2(t)=s(t)$, одержимо співвідношення, що дозволяє обчислювати енергію сигналу як в часовій, так і в частотній області, яке називається *рівністю Парсеваля*:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega$$

або

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(f)|^2 df$$

Останнє, на чому слід зупинитися в цій лекції, – це обчислення середньої потужності періодичного сигналу за коефіцієнтами його ряду Фур'є. Запишемо періодичний сигнал $s(t)$ у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

А тепер застосуємо до цього виразу формулу для розрахунку середньої потужності за період:

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \dot{C}_m \int_0^T e^{j\frac{2\pi(k+m)}{T}t} dt$$

Проміжок $0 \dots T$ відповідає цілому числу періодів комплексної експоненти, що стоїть під інтегралом, тому інтеграл буде дорівнює нулю за всіх $k \neq -m$. За $k = -m$ експонента стає константою, інтеграл буде дорівнювати T і тоді:

$$P_{cp} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_k|^2$$

Результат виявляється дуже простим: середня потужність періодичного сигналу дорівнює сумі квадратів модулів всіх коефіцієнтів його ряду Фур'є.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Запишіть математичний вираз, яким визначається кореляційна функція (КФ) неперіодичного сигналу.
2. Що показує кореляційна функція?
3. Що являє собою значення КФ сигналу за $\tau=0$?
4. Як пов'язані між собою значення КФ сигналу за τ і $-\tau$?
5. При якому значенні τ значення КФ сигналу приймає максимально можливе значення?
6. До чого прагне значення КФ сигналу за τ , яке прагне до нескінченності?
7. Намалюйте графік КФ прямокутного імпульсу.
8. У чому полягає спосіб розрахунку КФ періодичного сигналу?
9. Запишіть формулу для розрахунку КФ періодичного сигналу.
10. КФ періодичного сигналу має властивість парності чи ні?
11. Чому дорівнює період КФ періодичного сигналу?
12. Яке умова безперервності КФ сигналу?
13. КФ періодичного сигналу не залежить від частоти сигналу, його фази або його амплітуди?
14. Що показує взаємна кореляційна функція?
15. Запишіть математичний вираз, яким визначається взаємна кореляційна функція (ВКФ) двох сигналів.
16. Намалюйте графік взаємної КФ двох сигналів: прямокутного імпульсу і трикутного імпульсу.
17. Чи існує зв'язок між значеннями взаємної КФ і енергією сигналів для яких вона обчислена? Якщо так, то опишіть цей зв'язок формулою.
18. Як пов'язані між собою значення взаємної КФ сигналу за τ і $-\tau$?
19. Де на осі часу може перебувати максимум взаємної КФ?
20. До чого прагне значення взаємної КФ сигналу за τ , яке прагне до нескінченності?
21. Запишіть вираз, що зв'язує перетворення Фур'є для ВКФ з спектральними функціями сигналів, для яких обчислена ця ВКФ?
22. Як за виглядом спектральних функцій сигналів визначити, корельовані сигнали між собою, чи ні?
23. Що таке енергетичний спектр сигналу? Запишіть формулу зв'язку енергетичного спектра сигналу з його кореляційною функцією.
24. Запишіть формулу, яка виражає теорему Релея.
25. Запишіть рівність Парсеваля.

26. Як розраховується середня потужність періодичного сигналу на основі коефіцієнтів ряду Фур'є?

Рівень курсу

1. Кореляційна функція сигналу. Її властивості.
2. Взаємна кореляційна функція сигналів. Її властивості.
3. Зв'язок між кореляційними функціями і спектрами сигналів.
4. Енергетичні розрахунки в спектральній області. Теорема Релея і рівність Парсеваля.

ЛЕКЦІЯ № 10

Тема: Класифікація систем. Імпульсна характеристика системи.

Зміст

Фізичні системи та їх математичні моделі	2
Системний оператор	2
Класифікація систем	3
Стаціонарні та нестаціонарні системи	3
Лінійні та нелінійні системи	4
Зосереджені та розподілені системи	5
Імпульсні характеристики лінійних стаціонарних систем	5
Імпульсна характеристика.....	6
Інтеграл Дюамеля.....	6
Умови фізичної реалізованості.....	8
Перехідна характеристика.....	9
Контрольні питання за темою.....	11
Рівень модуля	11
Рівень курсу	11

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.
3. <https://www.youtube.com/watch?v=acAw5WGtzuk>

Фізичні системи та їх математичні моделі

Системи, які застосовуються для обробки, перетворення і передачі сигналів, досить різноманітні за принципами внутрішнього устрою і зовнішніми характеристиками. Для того щоб їх можна було порівнювати і класифікувати, сформулюємо початкові поняття. Електротехнічний пристрій незалежно від свого призначення і рівня складності є *системою*, тобто сукупністю фізичних об'єктів, між якими існують певні взаємодії. У структурі системи можна виділити вхід, на який подається вхідний сигнал, і вихід, звідки знімається вихідний сигнал – тобто перетворений вхідний сигнал.

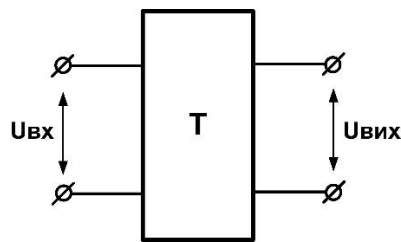


Рис. 1 – Чотириполюсник

Якщо цікавляться лише зв'язком між сигналами на вході та на виході і не описують внутрішні процеси в системі, то кажуть, що система являє собою «чорну скриньку».



Рис. 2 – Система як чорна скринька

Системний оператор

У найбільш простому випадку вхідний сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ та вихідний сигнал $u_{\text{вих}}(t)$ описуються одновимірними функціями часу. Вхідний сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ – це *вхідний вплив* на систему – так його часто й називають. Вихідний сигнал $u_{\text{вих}}(t)$ називають *відгуком* або *вихідною реакцією* системи, оскільки так і є.

Закон зв'язку між сигналами $u_{\text{вх}}(t)$ та $u_{\text{вих}}(t)$ задають системним оператором \mathbf{T} , результатом впливу якого на сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ служить сигнал $u_{\text{вих}}(t)$:

$$u_{\text{вих}}(t) = \mathbf{T}u_{\text{вх}}(t) \quad (10.1)$$

Приклад 10.1. Припустимо, що деяка система перетворює одновимірний вхідний сигнал по закону $u_{\text{вих}}(t) = 15 \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}$

В даному випадку системний оператор може бути записаний таким чином: $\mathbf{T} = 15 \frac{d}{dt}$

З цього виразу безпосередньо впливає структурна схема системи, утворена каскадним з'єднанням ідеального підсилювача з коефіцієнтом підсилювання $k=15$ та ідеальної диференціувальної ланки.

Щоб повністю визначити задачу, слід вказати також область $D_{\text{вх}}$ деякого функціонального простору, яка називається *областю допустимих вхідних впливів*. Завдання цієї області описує характер вхідних сигналів, які можуть бути безперервними або дискретними, детермінованими або випадковими. Подібним же чином повинна бути вказана *область допустимих вихідних сигналів* $D_{\text{вих}}$.

У нашому курсі розглядаються лише системи, на які впливають аналогові сигнали. Перетворення дискретних і цифрових сигналів лінійними системами буде розглянуто в рамках інших курсів, в наступні роки навчання.

Математичною моделлю системи називають сукупність системного оператора \mathbf{T} і двох областей допустимих сигналів $D_{\text{вх}}, D_{\text{вих}}$.

Класифікація систем

Класифікацію систем проводять на підставі істотних властивостей їх математичних моделей.

Стаціонарні та нестаціонарні системи

Прийнято казати, що система *стаціонарна*, якщо її вихідна реакція не залежить від того, в який момент часу надходить вхідний сигнал. Якщо \mathbf{T} - оператор стаціонарної системи, то з рівності

$$u_{\text{вих}}(t) = \mathbf{T}u_{\text{вх}}(t) \quad (10.2)$$

впливає, що

$$u_{\text{вих}}(t \pm t_0) = \mathbf{T}u_{\text{вх}}(t \pm t_0) \quad (10.3)$$

за будь-яке значення t_0 . Стаціонарні системи називають також *системами з постійними в часі параметрами*.

Якщо ж властивості системи не є інваріантними щодо вибору початку відліку часу, то таку систему називають *нестаціонарною*, або *системою зі змінними в часі параметрами*.

Обидва зазначених класи систем широко застосовуються в електротехніці. Однак, в даному курсі будуть вивчатися електричні кола, що представляють собою тільки стаціонарні системи.

Лінійні та нелінійні системи

Один з найважливіших принципів класифікації систем засновано на тому, що різні системи по-різному поведуться в разі подавання на її вхід суми декількох сигналів. Якщо оператор системи такий, що справедливі рівності

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(u_{\text{вх1}}(t) + u_{\text{вх2}}(t)) &= \mathbf{T}u_{\text{вх1}}(t) + \mathbf{T}u_{\text{вх2}}(t) \\ \mathbf{T}(\alpha u_{\text{вх}}) &= \alpha \mathbf{T}u_{\text{вх}} \end{aligned} \quad (10.4)$$

де α – довільне число, то така система називається *лінійною*. Умови (10.4) виражають фундаментальний **принцип суперпозиції**: реакція лінійної системи на суму вхідних сигналів дорівнює сумі реакцій на кожний з цих вхідних сигналів.



Якщо ці умови не виконуються, то кажуть, що система є *нелінійною*.

Приклад 10.2. Певна система виконує обробку вхідного сигналу за законом $u_{\text{вих}}(t) = \left[\frac{d}{dt} + \alpha \right] u_{\text{вх}}(t)$. Чи є вона лінійною?

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що умови (10.4) виконуються. Таким чином, дана система лінійна.

Приклад 10.3. Певна система працює як ідеальний квадратор відповідно до алгоритму $u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх}}^2(t)$.

Подавши на вхід суму двох сигналів $u_{\text{вх1}}(t) + u_{\text{вх2}}(t)$, на виході отримаємо $u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх1}}^2(t) + 2u_{\text{вх1}}(t)u_{\text{вх2}}(t) + u_{\text{вх2}}^2(t)$.

Наявність складової $2u_{\text{вх1}}(t)u_{\text{вх2}}(t)$ вказує на те, що дана система нелінійна.

Строго кажучи, всі фізичні системи, з якими має справу електротехніка, в тій чи іншій мірі нелінійні. Однак існує багато систем, які досить точно описуються лінійними моделями. Так, практично завжди можна знехтувати нелінійністю звичайних резисторів, конденсаторів і деяких індуктивних елементів.

Нелінійні електротехнічні пристрої містять в собі зазвичай такі елементи, як напівпровідникові діоди і транзистори, які мають вольт-амперні характеристики складного виду.

Теорія нелінійних систем виявляється, як правило, досить складною. Далеко не всі результати можуть бути отримані тут аналітичним шляхом. Однак саме за допомогою нелінійних елементів здійснюються найважливіші перетворення електричних сигналів.

Зосереджені та розподілені системи

Інший критерій класифікації електротехнічних систем засновано на зіставленні фізичних розмірів системи і робочої довжини хвилі електричного струму. Якщо характерний розмір системи (наприклад, найбільша довжина сполучних провідників кола) виявляється набагато меншою за довжину хвилі, то ми маємо так звану *зосереджену* систему.

У зосередженого електричного кола завжди можна виділити фізичні області з переважною локалізацією енергії електричного поля (конденсатори) і магнітного поля (індуктивні елементи). Властивості зосереджених кіл слабо залежать від конфігурації сполучних провідників, тому для опису таких кіл прийнято використовувати їх абстрактні моделі, які називаються принциповими схемами.

В електротехніці зосереджені системи широко застосовують аж до робочих частот в кілька сотень мегагерц. Аналіз і розрахунок зосереджених електротехнічних систем проводять за допомогою відомих законів Кірхгофа.

На частотах в декілька тисяч мегагерц, в так званому надвисокочастотному (НВЧ) діапазоні, фізичні розміри більшості пристроїв вже є порівняні з довжиною хвилі електричних коливань, так що стає необхідним урахування скінченного часу поширення сигналу. Звичайні електричні кола в настільки високочастотному діапазоні вже не можуть використовуватися, і на зміну їм приходять *системи з розподіленими параметрами* (або *розподілені системи*). Так, замість з'єднувальних провідників застосовуються відрізки металевих труб – хвилеводи, замість резонансних *LC*-контурів – їх розподілені аналоги, звані об'ємними резонаторами. Теорія, методи аналізу і проектування розподілених систем досить складні та вивчаються в спеціальних електротехнічних дисциплінах.

Закінчивши короткий огляд принципів класифікації систем та кіл, вкажемо, що в рамках даного курсу будуть вивчатися найпростіший їх вид – безперервні (аналогові) лінійні стаціонарні системи з зосередженими параметрами.

Імпульсні характеристики лінійних стаціонарних систем

Головна особливість лінійних систем – справедливості принципу суперпозиції – відкриває прямий шлях до систематичного вирішення задач про проходження різноманітних сигналів через такі системи. Спосіб динамічного подання дозволяє представляти сигнали у вигляді сум елементарних імпульсів. Якщо вдасться тим чи іншим способом знайти реакцію на виході, що виникає під впливом елементарного імпульсу на вході, то остаточним етапом вирішення задачі з'явиться підсумовування таких реакцій.

Намічений шлях аналізу заснований на часовому поданні властивостей сигналів і систем. В рівній мірі можна застосувати аналіз в частотній області, коли сигнали задаються рядами або інтегралами Фур'є. Цей метод в багатьох випадках є набагато більш зручним. Властивості систем в цьому разі описуються їх частотними характеристиками, які вказують закон перетворення елементарних гармонійних сигналів.

Імпульсна характеристика

Нехай певна лінійна стаціонарна система описується оператором T . За визначенням, імпульсною характеристикою системи називається функція $h(t)$, що є відгуком системи на вхідний сигнал у вигляді дельта-функції $\delta(t)$. Це означає, що функція $h(t)$ задовольняє рівнянню

$$h(t) = T\delta(t) \quad (10.5)$$

Оскільки система стаціонарна, аналогічне рівняння буде і в тому разі, коли вхідний вплив зміщено у часі на будь-яку величину t_0 :

$$h(t-t_0) = T\delta(t-t_0) \quad (10.6)$$

Слід ясно уявити собі, що імпульсна характеристика, так само, як і сама дельта-функція, що її породжує, є результатом розумної ідеалізації. З фізичної точки зору імпульсна характеристика наближено відображає реакцію системи на вхідний імпульсний сигнал довільної форми з одиничною площею за умови, що тривалість цього сигналу дуже мала в порівнянні з характерним часовим масштабом системи, наприклад періодом її власних коливань.

Інтеграл Дюамеля

Знаючи імпульсну характеристику лінійної стаціонарної системи, можна формально вирішити будь-яку задачу щодо проходження детермінованого сигналу через таку систему. Дійсно, в першій лекції було вказано на фільтруючу властивість дельта-функції. Користуючись цією властивістю, можна стверджувати, що вхідний сигнал завжди допускає подання в такий спосіб:

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (10.7)$$

Йому відповідає наступна вихідна реакція

$$u_{\text{вих}}(t) = Tu_{\text{вх}}(t) = T \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (10.8)$$

Тепер візьмемо до уваги, що інтеграл – це є сума, тому лінійний оператор \mathbf{T} на підставі принципу суперпозиції може бути внесений під знак інтеграла. Далі, оператор \mathbf{T} «діє» лише на величини, що залежать від поточного часу t , але не від змінної інтегрування τ . Тому з виразу (10.8) випливає, що

$$u_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \mathbf{T} \delta(t - \tau) d\tau \quad (10.9)$$

або остаточно

$$u_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (10.10)$$

Ця формула, що має фундаментальне значення в теорії лінійних систем, називається *інтегралом Дюамеля*. Співвідношення (10.10) свідчить про те, що вихідний сигнал лінійної стаціонарної системи являє собою згортку двох функцій – вхідного сигналу і імпульсної характеристики системи. Вочевидь, формула може бути записана також у такому вигляді:

$$u_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (10.11)$$

Отже, якщо імпульсна характеристика $h(t)$ відома, то подальші етапи рішення зводяться до повністю формалізованих операцій.

Приклад 10.4. Певна лінійна стаціонарна система, внутрішній устрій якої вважаємо несуттєвим, має імпульсну характеристику, що представляє собою прямокутний відеоімпульс тривалістю T . Імпульс виникає за $t = 0$ і має амплітуду A_0 :

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A_0, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

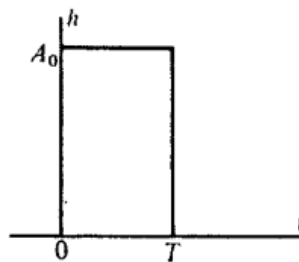


Рис. 3

Визначити вихідну реакцію даної системи за подання на вхід ступеневої сигналу з амплітудою U_0 .

Застосовуючи формулу інтеграла Дюамеля (10.10), слід звернути увагу на те, що вихідний сигнал буде виглядати по різному в залежності від того, перевищує чи ні поточне значення t тривалість імпульсної характеристики. За $0 \leq t \leq T$ маємо

$$u_{\text{вих}}(t) = A_0 U_0 \int_0^t d\tau = A_0 U_0 t$$

Якщо ж $t > T$, то за $\tau > T$ функція $h(t - \tau)$ обертається в нуль, тому

$$u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вих}}(t) = \int_0^T \sigma(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_T^t \sigma(\tau) h(t - \tau) d\tau = A_0 U_0 \int_0^T d\tau = A_0 U_0 T$$

Знайдена вихідна реакція відображається кусочно-лінійним графіком.

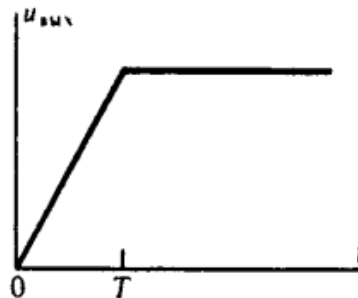


Рис. 4

Умови фізичної реалізованості

Який би не був конкретний вид імпульсної характеристики системи, завжди повинен виконуватися найважливіший принцип: вихідний сигнал, який відповідає імпульсному входному впливу, не може виникнути до моменту появи імпульсу на вході.

Звідси випливає дуже просте обмеження на вид допустимих імпульсних характеристик:

$$h(t) = 0, \quad \text{за } t < 0 \quad (10.12)$$

Такому умові задовольняє, наприклад, імпульсна характеристика системи, розглянутої в прикладі 10.4.

Легко бачити, що для системи, яка існує, або може існувати в нашому дійсному світі, інакше кажучи, для такої системи, що її можна реалізувати фізично, верхня межа у формулі інтеграла Дюамеля може бути замінена на поточне значення часу:

$$u_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (10.13)$$

Формула (10.13) має чіткий фізичний зміст: лінійна стаціонарна система, виконуючи обробку сигналу, що надходить на її вхід, проводить операцію зваженого підсумовування всіх його миттєвих значень, що існували «в минулому» за $-\infty < \tau < t$. Роль вагової функції в цьому разі виконує імпульсна характеристика системи. Принципово важливо, що фізично реалізована система ні за яких обставин не здатна оперувати «майбутніми» значеннями вхідного сигналу.

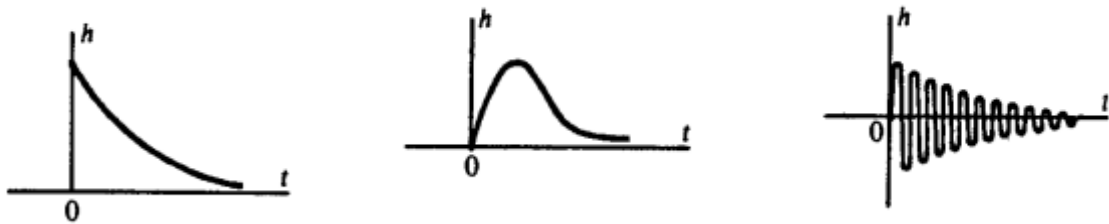


Рис. 5 – Приклади імпульсних характеристик реалізованих систем

Фізично реалізована система, крім того, не повинна являти собою «вічний двигун». Тобто, відгук на одиничний дельта-імпульс не повинна нескінченно зростати або мати неспадне значення. Це означає, що імпульсна характеристика системи повинна задовольняти умові абсолютної інтегровності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (10.14)$$

Перехідна характеристика

Нехай на вході лінійної стаціонарної системи діє сигнал, зображений функцією Хевісайда $\sigma(t)$. Вихідну реакцію

$$g(t) = \mathbf{T}\sigma(t) \quad (10.15)$$

прийнято називати *перехідною характеристикою системи*. Оскільки система стаціонарна, перехідна характеристика інваріантна щодо тимчасового зсуву:

$$g(t-t_0) = \mathbf{T}\sigma(t-t_0) \quad (10.16)$$

Висловлені раніше міркування про фізичної реалізованості системи повністю переносяться на випадок, коли система збуджується не дельта-функцією, а одиничним стрибком. Тому перехідна характеристика фізично реалізованої системи відмінна від нуля лише за $t \geq 0$, в той час як $g(t) = 0$ за $t < 0$.

Між імпульсною та перехідною характеристиками є тісний зв'язок. Дійсно, оскільки $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$, то на підставі (10.5)

$$h(t) = \mathbf{T} \left[\frac{d}{dt} \sigma(t) \right] \quad (10.17)$$

Оператор диференціювання $\frac{d}{dt}$ та лінійний стаціонарний оператор \mathbf{T} можуть мінятися місцями, тому

$$h(t) = \frac{d}{dt} [\mathbf{T} \sigma(t)] = \frac{dg(t)}{dt} \quad (10.18)$$

або

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (10.19)$$

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Що таке система?
2. Електричне коло – це система?
3. Якщо цікавляться лише зв'язком між сигналами на вході та виході і не описують внутрішні процеси в системі, то як називається таке представлення системи?
4. Як по-іншому називають вихідний сигнал системи?
5. Певна система перетворює вхідний в вихідний сигнал по закону $u_{\text{вих}}(t) = \int u_{\text{вх}}(t) dt$. Ця система лінійна?
6. Що називають математичною моделлю системи?
7. Що є ознакою стаціонарності системи?
8. Яка система називається нестаціонарною?
9. Яким чином визначається поняття «лінійна система»?
10. Що таке нелінійна система?
11. Система примножує вхідний сигнал сам на себе і таким чином формує вихідний сигнал. Така система лінійна або нелінійна?
12. Система додає до вхідного сигналу постійну величину. Така система лінійна або нелінійна?
13. Яка система називається зосередженою?
14. Що означає термін «суперпозиція»?
15. Що називається імпульсною характеристикою системи?
16. Запишіть формулу, яка носить назву «інтеграл Дюамеля».
17. Що дозволяє знайти інтеграл Дюамеля?
18. Які умови фізичної реалізованості систем?
19. Запишіть інтеграл Дюамеля для фізично реалізованої системи.
20. Що називається перехідною характеристикою системи?
21. Як пов'язані імпульсна і перехідна функції системи?

Рівень курсу

1. Фізичні системи та їх математичні моделі. Системний оператор.
2. Класифікація систем: стаціонарні та нестаціонарні системи.
3. Класифікація систем: лінійні та нелінійні системи.
4. Класифікація систем: зосереджені та розподілені системи.
5. Імпульсна характеристика лінійної стаціонарної системи.
6. Перехідна характеристики лінійної стаціонарної системи.
7. Вимоги до вигляду імпульсної та перехідної характеристик системи щодо фізичної реалізованості.
8. Інтеграл Дюамеля.

ЛЕКЦІЯ № 11

Тема: Часові та частотні характеристики радіотехнічних кіл

Зміст

Частотні методи в дослідженні лінійних систем та кіл	2
Математичний опис проходження гармонійного сигналу через лінійну систему	3
Власні функції та власні значення системного оператора	4
Амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики	6
Частотний коефіцієнт передачі і імпульсна характеристика лінійної стаціонарної системи	6
Обмеження на частотний коефіцієнт передачі	7
Контрольні питання за темою.....	8
Рівень модуля	8
Рівень курсу	9

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Частотні методи в дослідженні лінійних систем та кіл

Найважливішою властивістю лінійної системи, і лінійного електричного кола зокрема, є те, що гармонійний сигнал, тобто сигнал, що змінюється за законом синуса або косинуса, проходить через таку систему не змінюючи своєї форми. Інакше кажучи, якщо на вхід лінійного електричного кола подати сигнал виду $u_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} \cos(\omega t + \varphi_{\text{вх}})$, то на виході отримаємо сигнал $u_{\text{вих}} = U_{\text{вих}} \cos(\omega t + \varphi_{\text{вих}})$, який так само, як і вхідний сигнал, змінюється за косинусоїдальним законом, тобто буде мати ту саму форму косинуса та й ту саму частоту. Відрізнитися буде тільки амплітуда і фаза вихідного сигналу. Амплітуда вихідного сигналу може бути менше або більше в певне число разів (це число називається *коефіцієнтом посилення*). Фаза може відставати або випереджати фазу вхідного сигналу (різниця між вхідним і вихідним сигналом називають *зсувом фаз*). Але форма сигналу не зміниться. **Форма і частота ніколи не змінюються при проходженні гармонійного сигналу через лінійну систему!** Ця властивість є фундаментальною властивістю лінійних систем, законом, який дозволяє застосовувати *частотні методи* для їх дослідження. Необхідно знати, що коефіцієнт посилення залежить від частоти вхідного сигналу. Він може бути вище на одних частотах і нижче на інших. Коефіцієнт підсилення не є постійним, а є функцією частоти. Також від частоти сигналу залежить зсув фаз між вхідним і вихідним сигналами, тобто він також є функцією частоти.

Сенс *частотних методів* полягає в наступному. Як ми знаємо, будь-який сигнал може бути представлений у вигляді суми кінцевого або нескінченного числа гармонік. Це може бути ряд Фур'є для періодичного сигналу або перетворення Фур'є для неперіодичного. В останньому випадку в якості суми виступає інтеграл. Припустимо, у нас є вхідний сигнал $u_{\text{вх}}$ довільної форми. Нам необхідно дізнатися: яка буде реакція системи на цей сигнал. Ми не знаємо, як визначити реакцію системи, тобто не можемо прямо визначити, розрахувати, яким же буде вихідний сигнал $u_{\text{вих}}$, коли на вхід подається $u_{\text{вх}}$. Що можна зробити? Знаючи форму і часові характеристики вхідного сигналу можна виконати його розкладання в ряд Фур'є (якщо сигнал періодичний), або застосувати перетворення Фур'є (якщо сигнал неперіодичний) для цього сигналу. Потім можна проаналізувати проходження через систему кожної окремої гармоніки – кожного елементарного, одиничного сигналу з суми яких складається вхідний сигнал $u_{\text{вх}}$. Якщо ми будемо знати реакцію системи на ці окремі сигнали, то користуючись тим, що система лінійна (для лінійної системи, як було зазначено в попередній лекції, виконується закон суперпозиції: сума реакцій на сукупність будь-яких вхідних

сигналів дорівнює реакції на суму цих сигналів, одночасно поданих на вхід системи), ми можемо скласти ці реакції разом і отримати якийсь сумарний сигнал, який і є реакцією системи $u_{\text{вих}}$ на вхідний сигнал $u_{\text{вх}}$. Таким чином, завдання істотно спрощується: нам не потрібно шукати реакцію системи на будь-який вхідний сигнал, будь-якої форми: трикутник, меандр, пилкоподібний і т.д. Досить знати реакцію системи лише на гармонійні сигнали. Тобто, алгоритм дослідження може бути виражений формулою: розклали на гармоніки – отримали реакцію на кожен гармоніку – склали гармоніки. Даний процес для періодичного сигналу можна проілюструвати рисунком 1.

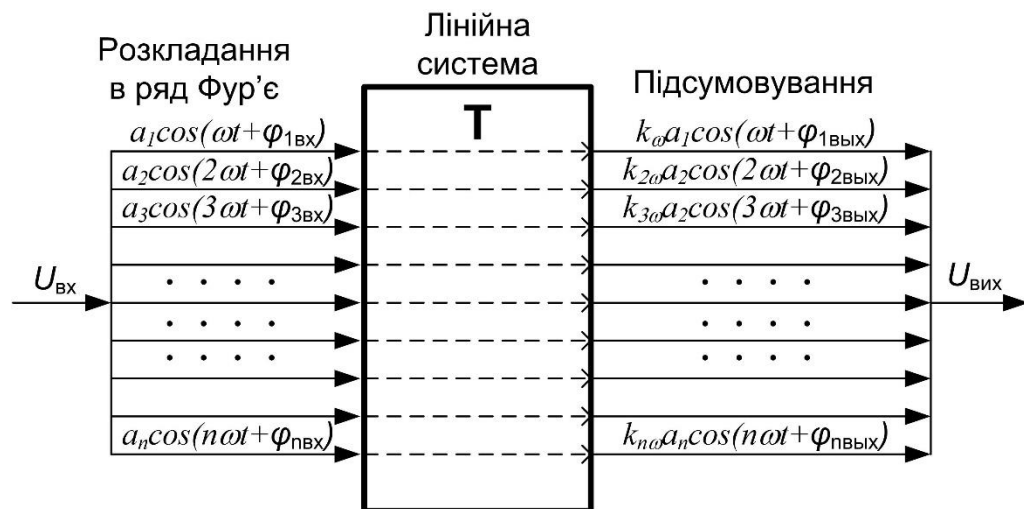


Рисунок 1. Алгоритм дослідження проходження періодичного сигналу через систему частотними методами.

Математичний опис проходження гармонійного сигналу через лінійну систему

Розглянемо математичні основи проходження гармонійного сигналу через лінійне коло. Для початку згадаємо, що гармонійні функції відповідно до формули Ейлера виражаються через показові функції. Зокрема, $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$. Якщо ж ми маємо косинусоїдальний сигнал одиничної амплітуди і з нульовою початковою фазою, то

$$s(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (11.1)$$

Оскільки для лінійної системи виконується принцип суперпозиції

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(u_{\text{вх}1}(t) + u_{\text{вх}2}(t)) &= \mathbf{T}u_{\text{вх}1}(t) + \mathbf{T}u_{\text{вх}2}(t), \\ \mathbf{T}(\alpha u_{\text{вх}}) &= \alpha \mathbf{T}u_{\text{вх}} \end{aligned} \quad (11.2)$$

то для розуміння того, як гармонійний сигнал проходить через систему, досить дослідити проходження через систему сигналу

$$s(t) = e^{j\omega t} \quad (11.3)$$

Власні функції та власні значення системного оператора

При математичному дослідженні систем особливий інтерес представляють такі вхідні сигнали, які, будучи перетворені системою, залишаються незмінними за формою.

$$u_{\text{вих}}(t) = \mathbf{T}u_{\text{вх}}(t) = \lambda u_{\text{вх}}(t) \quad (11.4)$$

то $u_{\text{вх}}(t)$ є власною функцією системного оператора \mathbf{T} , а число λ , в загальному випадку комплексне, – його власним значенням.

Покажемо, що комплексний сигнал $u_{\text{вх}}(t) = e^{j\omega t}$ за будь-яке значення частоти ω є власною функцією лінійного стаціонарного оператора. Для цього скористаємося інтегралом Дюамеля з лекції 10 виду (10.11) і обчислимо

$$u_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] u_{\text{вх}}(t) \quad (11.5)$$

Звідси видно, що власним значенням системного оператора є комплексне число

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11.6)$$

зване *частотним коефіцієнтом передачі системи*, а вираз (11.5) може бути переписано у вигляді:

$$u_{\text{вих}}(t) = K(j\omega)u_{\text{вх}}(t) \quad (11.7)$$

Ця формула повністю повторює рівність (11.4), де $\lambda = K(j\omega)$. Це означає, що функція виду $e^{j\omega t}$ є власною функцією системного оператора, а $K(j\omega)$ – власним значенням системного оператора. Тобто, для даної частоти ω вхідного сигналу $u_{\text{вх}}(t) = e^{j\omega t}$ власне значення системного оператора – це постійне число, незалежне від часу. При множенні на це число саме цього вхідного сигналу, який описується як $u_{\text{вх}}(t) = e^{j\omega t}$ (і ніякий інший, тому що саме ця функція є власною функцією!!!) ми отримаємо вихідний сигнал $u_{\text{вих}}(t)$ у відповідності до (11.7). Власне значення системного оператора $K(j\omega)$ за визначенням залежить від частоти, а оскільки воно комплексне, то при множенні на нього будемо

отримувати не тільки різну амплітуду, але і різний зсув фаз для сигналів, що мають різну частоту.

Повертаючись до формули Ейлера, і приймаючи вхідний сигнал у вигляді $u_{\text{вх}}(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ можемо стверджувати на основі формули (11.7) наступне: коли на вході системи діє косинусоїдальний сигнал, то сигнал на виході системи дорівнює:

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{K(j\omega)e^{j\omega t} + K(-j\omega)e^{-j\omega t}}{2} \quad (11.8)$$

Трохи далі по тексті лекції буде вказано, що для фізично реалізованих систем завжди справедлива така рівність: $K(j\omega) = K^*(-j\omega)$. Тобто частотні коефіцієнти передачі на частотах ω і $-\omega$ є комплексно зв'язаними числами – модулі їх рівні $|K(j\omega)| = |K^*(-j\omega)|$, а аргументи рівні і протилежні за знаком $\arg(K(j\omega)) = -\arg(K(-j\omega))$. Якщо вважати, що аргумент $K(j\omega)$ на частоті ω дорівнює φ (а на частоті $-\omega$ відповідно $-\varphi$), то далі отримуємо

$$\begin{aligned} u_{\text{вих}}(t) &= \frac{K(j\omega)e^{j\omega t} + K^*(j\omega)e^{-j\omega t}}{2} = \frac{|K(j\omega)|e^{j\varphi}e^{j\omega t} + |K(j\omega)|e^{-j\varphi}e^{-j\omega t}}{2} = \\ &= |K(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} = |K(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Тобто, якщо ми маємо гармонійний сигнал на вході, то й на виході отримуємо також гармонійний сигнал. В цьому випадку вихідний сигнал системи пов'язано з вхідним частотним коефіцієнтом передачі таким чином: амплітуда сигналу змінюється в $|K(j\omega)|$ раз, а до фази сигналу додається аргумент комплексного частотного коефіцієнта $\varphi = \arg(K(j\omega))$. Більше нічого з сигналом не відбувається: гармонійна форма його зберігається, а частота не змінюється (був косинус і залишився косинус з частотою ω), як це і було зазначено ще на початку лекції.

Але це справедливо виключно для гармонійного сигналу!

Таким чином, ми отримали результат, який відображає найважливішу властивість лінійних систем: гармонійний сигнал, проходячи через лінійну систему не змінює своєї частоти і форми; змінюється тільки його амплітуда і фаза. Відношення амплітуди вихідного сигналу до амплітуди вхідного сигналу є ніщо інше як коефіцієнт посилення гармонійного сигналу на даній частоті. Якщо ж говорити про весь спектр частот і не тільки з точки зору амплітуди, але і зсуву фаз, то повною характеристикою системи є комплексний частотний коефіцієнт передачі, який містить всю інформацію про поведінку системи. Він

вказує, як посилюється сигнал і як зсувається фаза гармонійного сигналу після проходження через систему на будь-якій частоті.

Амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики

Якщо застосувати символічний метод аналізу електричних кіл, то функція $K(j\omega)$ отримує просту інтерпретацію: якщо на вхід системи надходить гармонійний сигнал з відомою частотою ω і комплексної амплітудою $\dot{U}_{\text{вх}}$, то комплексна амплітуда вихідного сигналу

$$\dot{U}_{\text{вих}} = K(j\omega)\dot{U}_{\text{вх}} \quad (11.10)$$

Часто користуються поданням частотного коефіцієнта передачі в показовій формі:

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{j\varphi_k(\omega)} \quad (11.11)$$

Обидві дійсні функції, що сюди входять, носять спеціальні назви: $|K(j\omega)|$ – *амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)*, $\varphi_k(\omega)$ – *фазочастотна характеристика (ФЧХ)* системи.

Відзначимо, що для назви функції $K(j\omega)$ в технічній літературі застосовується декілька термінів і, зокрема:

- Комплексна частотна характеристика
- Передавальна функція
- Частотний коефіцієнт передачі
- Комплексний коефіцієнт передачі
- Амплітудно-фазова частотна характеристика

Частотний коефіцієнт передачі і імпульсна характеристика лінійної стаціонарної системи

Формула (11.6) встановлює принципово важливий факт – частотний коефіцієнт передачі і імпульсна характеристика лінійної стаціонарної системи пов'язані між собою перетворенням Фур'є. Тому завжди, знаючи функцію $K(j\omega)$, можна визначити імпульсну характеристику

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} dt \quad (11.12)$$

Ми підійшли до найважливішого положенню теорії лінійних стаціонарних систем: будь-яку таку систему можна розглядати або в часовій області за допомогою її імпульсної чи перехідної характеристики, або в

частотній області, задаючи частотний коефіцієнт передачі. Обидва підходи рівноцінні і вибір одного з них диктується зручностями отримання вихідних даних про систему і простотою обчислень.

Обмеження на частотний коефіцієнт передачі

Далеко не кожна функція $f(j\omega)$ може бути частотним коефіцієнтом передачі фізично реалізованої системи. Найпростіше обмеження пов'язане з тим, що імпульсна характеристика $h(t)$ такої системи має бути дійсною. В силу властивостей перетворення Фур'є це означає, що повинна виконуватися рівність:

$$K(j\omega) = K^*(-j\omega) \quad (11.13)$$

Відповідно до формули (11.13) модуль частотного коефіцієнта передачі (АЧХ) є парна, а фазовий кут (ФЧХ) – непарна функція частоти.

Набагато складніше відповісти на питання про те, яким повинен бути частотний коефіцієнт передачі для того, щоб виконувалися умови фізичної реалізованості, розглянуті в минулій лекції (формули 10.12 та 10.14 лекції 10). Наведемо без доведення остаточний результат, відомий під назвою *критерію Пелі-Вінера*: частотний коефіцієнт передачі фізично реалізованої системи повинен бути таким, щоб існував інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |K(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (11.14)$$

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. У чому полягає особливість проходження гармонійного сигналу через лінійну систему?
2. Чим відрізняється проходження гармонійного сигналу через лінійну систему і нелінійну систему?
3. Чи зберігає свою форму прямокутний імпульс при проходженні через лінійну систему?
4. Як змінюється частота гармонійного сигналу після його проходження через лінійну систему?
5. Як математично виражається визначення понять «власне число» і «власна функція» системного оператора?
6. Яка функція є власною функцією системного оператора, що описує лінійну стаціонарну систему?
7. Що є власним значенням системного оператора, що описує лінійну стаціонарну систему?
8. Частотний коефіцієнт передачі – це величина дійсна, комплексна, випадкова, уявна?
9. Вважаємо, що частотний коефіцієнт передачі лінійної стаціонарної системи відомий. Як дізнатися, у скільки разів змінюється амплітуда гармонічного сигналу після його проходження через цю систему?
10. Вважаємо, що частотний коефіцієнт передачі лінійної стаціонарної системи відомий. Як дізнатися, яким чином змінюється фаза гармонійного сигналу після його проходження через цю систему?
11. Вважаємо, що частотний коефіцієнт передачі лінійної стаціонарної системи відомий. Як дізнатися, яким чином змінюється частота гармонійного сигналу після його проходження через цю систему?
12. Що таке амплітудно-частотна характеристика системи?
13. Що таке фазочастотна характеристика системи?
14. Які інші назви застосовуються в технічній літературі для частотного коефіцієнта передачі системи?
15. Лінійні стаціонарні системи аналізують в декількох «областях». Про які області йде мова?
16. Як формулюється вимога до частотного коефіцієнту передачі фізично реалізованої системи, яке ґрунтується на дійсності імпульсної характеристики?
17. Запишіть критерій Пелі-Вінера.

Рівень курсу

1. Математичний опис проходження гармонійного сигналу через лінійну стаціонарну систему.
2. Частотний коефіцієнт передачі, амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики лінійної стаціонарної системи.
3. Зв'язок між частотним коефіцієнтом передачі і імпульсною характеристикою лінійної стаціонарної системи. Обмеження на частотний коефіцієнт передачі фізично реалізованих систем.

ЛЕКЦІЯ № 12**Тема:** Лінійні динамічні системи та їх опис**Зміст**

Основна формула спектрального методу	2
Лінійні динамічні системи	3
Власний рух лінійної динамічної системи	5
Частотний коефіцієнт передачі лінійної динамічної системи.....	7
Контрольні питання по темі.....	9
Рівень модуля	9
Рівень курсу	9

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Основна формула спектрального методу

Говорячи про спектральні методи аналізу проходження електричних сигналів скрізь лінійні стаціонарні системи, зазвичай мають на увазі цілий комплекс математичних прийомів, в основі яких лежить використання властивостей частотного коефіцієнта передачі системи. Нижче показано застосування спектрального підходу до задачі знаходження реакції системи.

Нехай на вході деякої лінійної стаціонарної системи діє детермінований сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, заданий зворотним перетворенням Фур'є:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{вх}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (12.1)$$

Будемо вважати, що частотний коефіцієнт передачі системи $K(j\omega)$ – відомий. Як було доведено у попередній лекції, комплексний сигнал виду $\exp(j\omega t)$, будучи власною функцією системного оператора, створює на виході елементарну реакцію $K(j\omega)\exp(j\omega t)$. Підсумовуючи ці реакції, знаходимо представлення вихідного сигналу:

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) U_{\text{вх}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (12.2)$$

Таким чином отримано основну формулу спектрального методу, яка свідчить про те, що частотний коефіцієнт передачі системи служить множником пропорційності між спектральними функціями сигналів на вході і виході:

$$U_{\text{вих}}(\omega) = K(j\omega) U_{\text{вх}}(\omega) \quad (12.3)$$

Отже, аналіз систем в частотній області відрізняється чудовою рисою – ефект перетворення сигналу в системі відображається простою алгебраїчною операцією множення.

Слід мати на увазі, що спектральний і часовий підходи повністю еквівалентні один одному. Дійсно, інтеграл Дюамеля (формула 10.10 з лекції 10) є згортою функції $u_{\text{вх}}(t)$ та імпульсної характеристики $h(t)$ в часовій області: $u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх}}(t) * h(t)$. Це означає, що у відповідності до формули 8.10 з лекції 8, яка відображає властивість перетворення Фур'є під назвою «Спектр згортки сигналів», спектральна функція вихідного сигналу $u_{\text{вих}}(t)$ має бути добутком спектральних функцій сигналів $u_{\text{вх}}(t)$ і $h(t)$. Звідси безпосередньо випливає формула (12.3).

Лінійні динамічні системи

Лінійними *динамічними* системами прийнято називати пристрої, що характеризуються наступним властивістю: їх вихідний сигнал визначається не тільки величиною вхідного сигналу в даний момент часу, але і «передісторією» цього сигналу. Інакше кажучи, динамічна система має деяку кінцеву або навіть нескінченну «пам'ять», від характеру якої залежать особливості перетворення вхідного сигналу.

Серед всіляких динамічних систем важливе значення мають ті, які описуються диференціальними операторами. У загальному випадку мова йде про системи, для яких зв'язок між одновимірними вхідним і вихідним сигналами встановлюється за допомогою наступного диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n u_{\text{ВИХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВИХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВИХ}}}{dt} + a_0 u_{\text{ВИХ}} = \\ = b_m \frac{d^m u_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt} + b_0 u_{\text{ВХ}} \end{aligned} \quad (12.4)$$

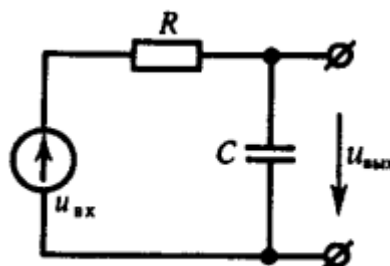
Припустимо, що вхідний сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ задано. Тоді права частина рівняння (12.4), яку можна умовно позначити $f(t)$, є відомою функцією. Аналіз поведінки системи зводиться при цьому до добре вивченої в математиці проблеми рішення лінійного диференціального рівняння n -го порядку з постійними коефіцієнтами:

$$a_n \frac{d^n u_{\text{ВИХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВИХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВИХ}}}{dt} + a_0 u_{\text{ВИХ}} = f(t) \quad (12.5)$$

Порядок n цього рівняння прийнято називати порядком динамічної системи.

Розглянемо кілька прикладів динамічних систем і відповідних їм диференціальних рівнянь.

Приклад 12.1 Дано RC-коло виду Г-образного чотириполюсника, яке збуджується з боку входу джерелом ЕРС (електрорушійної сили) $u_{\text{вх}}(t)$. Вихідним сигналом служить напруга на конденсаторі.

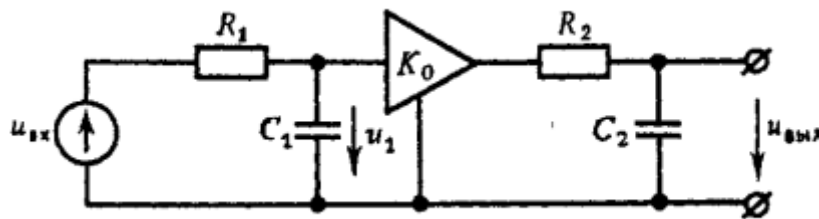


Оскільки струм в колі $i(t) = C \frac{du_{\text{ВИХ}}}{dt}$, то, використовуючи другий закон Кірхгофа, отримуємо диференціальне рівняння:

$$RC \frac{du_{\text{ВИХ}}}{dt} + u_{\text{ВИХ}} = u_{\text{ВХ}} \quad (12.6)$$

Отже, RC -коло є прикладом динамічної системи 1-го порядку. Найважливіший параметр цього кола – постійна часу $\tau = RC$, що визначає характерний часовий масштаб протікання процесів в системі.

Приклад 12.2 Дано більш складну систему, утворену двома RC -колами, які розділені ідеальним підсилювачем з коефіцієнтом посилення K_0 . Вхідний опір підсилювача нескінченно великий, а вихідний опір нескінченно малий, тому підсилювач є ідеальним елементом розв'язки між колами.



Вводячи дві постійні часу $\tau_1 = R_1 C_1$ та $\tau_2 = R_2 C_2$, за аналогією з попереднім прикладом маємо наступні диференціальні рівняння 1-го порядку:

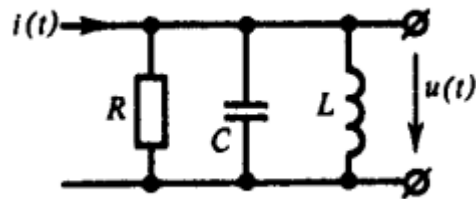
$$\begin{aligned} \tau_2 \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} &= K_0 u_1 \\ \tau_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 &= u_{\text{ВХ}}(t) \end{aligned}$$

Виключивши звідси допоміжну величину u_1 отримуємо диференціальне рівняння всього чотириполіусника:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 u_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = K_0 u_{\text{ВХ}} \quad (12.7)$$

Розглянуте тут складніше RC -коло виявляється вже системою 2-го порядку.

Приклад 12.3 Знайти диференціальне рівняння паралельного коливального контуру з втратами, вважаючи, що вхідним сигналом служить струм $i(t)$, а вихідним сигналом є напруга $u(t)$ на контурі.



Підсумовуючи струми

$$i_C = C \frac{du}{dt}, \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi, \quad i_R = \frac{u}{R}$$

отримуємо рівняння

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi + \frac{u}{R} = i$$

яке шляхом одноразового диференціювання за часом приводиться до вигляду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{C} \frac{di}{dt} \quad (12.8)$$

де $\alpha = 1/(2RC)$ – коефіцієнт загасання контуру, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота власних коливань в контурі без втрат.

Власний рух лінійної динамічної системи

Щоб повністю визначити поведінку динамічної системи, що описується рівнянням (12.4), потрібно врахувати початкові умови, які характеризують внутрішній стан системи в певний фіксований момент часу. Зазвичай прийнято ставити шукану функцію та її $n - 1$ похідну при $t = 0$: $u_{\text{вих}}(0)$, $u'_{\text{вих}}(0)$, $u^{(n-1)}_{\text{вих}}(0)$.

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що рішенням рівняння (12.5), що задовольняє будь-яким початковим умовам, є сума окремого рішення неоднорідного рівняння, у якого права частина $f(t)$ відмінна від нуля, і загального рішення однорідного рівняння

$$a_n \frac{d^n u_{\text{вих}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{вих}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{вих}}}{dt} + a_0 u_{\text{вих}} = 0 \quad (12.9)$$

Проблема рішення однорідного диференціального рівняння пов'язана з знаходженням коренів характеристичного рівняння системи

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + a_1 \gamma + a_0 = 0 \quad (12.10)$$

Дане рівняння має рівно n коренів. Оскільки коефіцієнти рівняння дійсні, корені γ_1, γ_2 можуть бути або дійсними, або комплексно-сполученими. Якщо всі корені різні, то загальне рішення однорідного рівняння, яке описує власний рух системи, має вигляд

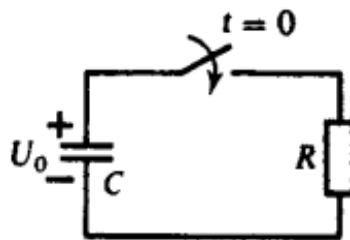
$$u_{\text{вих}}(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + C_n e^{\gamma_n t} \quad (12.11)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n – постійні числа, що визначаються з початкових умов.

Якщо ж деякі з коренів виявляються кратними, то складові загального рішення однорідного рівняння дещо ускладнюються за рахунок появи секулярних (вікових) множників. Так, якщо γ_i являє собою k -кратної корінь, то йому відповідає сукупність власних рухів виду $\exp(\gamma_i t)$, $t \exp(\gamma_i t)$, $t^{k-1} \exp(\gamma_i t)$.

Розглянемо приклади власного руху в лінійних стаціонарних колах.

Приклад 12.4 Процес розрядки конденсатора ємністю C , попередньо зарядженого до напруги U_0 , який в момент часу $t = 0$ замикається на резистор з опором R (див. Приклад 12.1).



Як впливає з формули (12.6), коло описується наступним однорідним диференціальним рівнянням відносно змінної u_c – напруги на конденсаторі:

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

де $\tau = RC$ за єдиною початковою умовою $u_c(0) = U_0$.

Характеристичне рівняння $\tau\gamma + 1 = 0$ має корінь $\gamma = -1/\tau$. Звідси знаходимо загальне рішення рівняння вільного руху: $u_c(t) = A \exp(-t/\tau)$.

Для того щоб задовольнити початковій умові слід покласти $A = U_0$. Остаточно маємо

$$u_c(t) = U_0 \exp(-t/\tau)$$

Отже, негативному дійсному кореню характеристичного рівняння відповідає власний рух, що експоненційно убуває в часі.

Постійна часу τ даного кола є проміжок часу, протягом якого вільний процес загасає в $e = 2.71828\dots$ раз.

Частотний коефіцієнт передачі лінійної динамічної системи

Якщо на вхід лінійної динамічної системи надходить сигнал, що має комплексну математичну модель виду $u_{\text{вх}}(t) = e^{j\omega t}$, то сигнал на виході $u_{\text{вих}}(t) = K(j\omega)e^{j\omega t}$. Підставляючи ці вирази в (12.4), після скорочення на загальний множник знаходимо частотний коефіцієнт передачі системи:

$$K(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (12.12)$$

Отже, частотний коефіцієнт передачі будь-якої динамічної системи, що описується звичайними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами, являє собою дрібно-раціональну функцію змінної $j\omega$. Коефіцієнти цієї функції співпадають з коефіцієнтами диференціального рівняння.

В інженерних розрахунках частотний коефіцієнт передачі лінійних систем часто знаходять методами теорії кіл на підставі принципів схем, не вдаючись до написання диференціальних рівнянь. Розглянемо деякі приклади.

Приклад 12.5 Частотний коефіцієнт передачі напруги RC-кола, схему якого наведено в прикладі 12.1

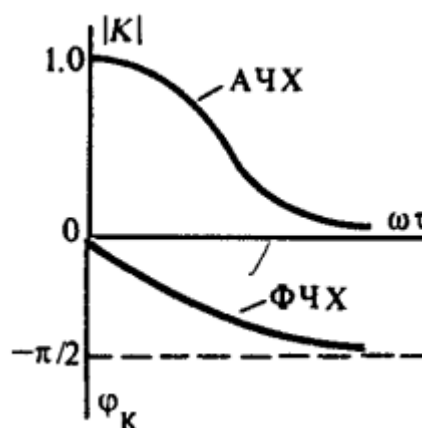
На підставі формули (12.12) отримуємо:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (12.13)$$

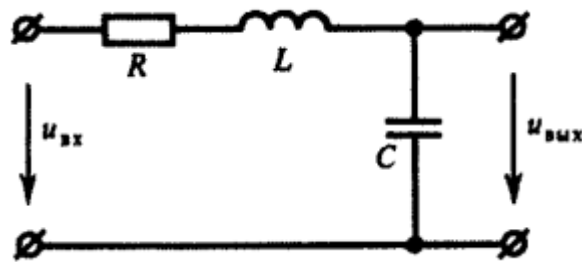
де $\tau = RC$ – постійна часу. Рівняння АЧХ приймає вигляд $|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$

ФЧХ визначається наступним чином: $\varphi_K(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$

Вид АЧХ вказує на те, що таке коло може використовуватися в якості фільтра нижніх частот (ФНЧ).



Приклад 12.6 Частотний коефіцієнт передачі напруги Г-образного чотириполюсника, зібраного з елементів L , C , R :



Тут

$$K(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}$$

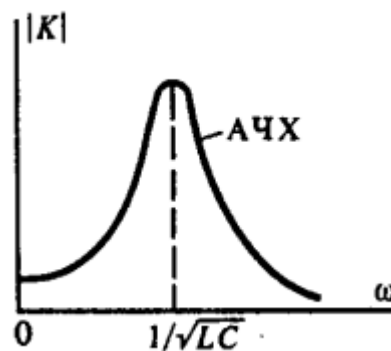
звідки з'являється рівняння АЧХ

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

і рівняння ФЧХ

$$\varphi_K = -\arctg[\omega RC / (1 - \omega^2 LC)]$$

Якщо опір втрат R досить малий, так що добротність системи $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \gg 1$, то дане коло може з успіхом виконувати роль смугового фільтра.



Контрольні питання по темі

Рівень модуля

1. Якщо частотний коефіцієнт передачі системи і спектральна функція вхідного сигналу відомі, то як знайти спектральну функцію вихідного сигналу?
2. Запишіть формулу, яка б пов'язала імпульсну характеристику системи і частотний коефіцієнт передачі.
3. Запишіть диференціальне рівняння, яке пов'язує вхідний і вихідний сигнал лінійної стаціонарної динамічної системи.
4. Яким чином визначається порядок динамічної системи?
5. З яких двох рішень складається рішення лінійного диференціального рівняння?
6. Що представляє собою права частина однорідного диференціального рівняння?
7. Якому числу дорівнює ступінь характеристичного рівняння?
8. Скільки коренів має характеристичне рівняння ступеня n ?
9. Характеристичне рівняння має два кореня: a і b . Запишіть вид функції, яка є рішенням відповідного однорідного диференціального рівняння?
10. Яким чином, знаючи вид диференціального рівняння, що описує лінійну динамічну систему, отримати частотний коефіцієнт передачі цієї системи?

Рівень курсу

1. Основна формула спектрального методу.
2. Лінійні динамічні системи та їх опис.
3. Власний рух лінійної динамічної системи.
4. Частотний коефіцієнт передачі лінійної динамічної системи.

ЛЕКЦІЯ № 13

Тема: Проходження детермінованих сигналів скрізь лінійні кола

Зміст

Основна формула спектрального методу (повторення).....	2
Знаходження імпульсних характеристик	3
Коефіцієнт передачі багатоланкової системи	4
Частотний коефіцієнт передачі потужності	4
Контрольні питання за темою.....	6
Рівень модуля	6
Рівень курсу	6

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Основна формула спектрального методу (повторення)

Говорячи про спектральні методи аналізу проходження електричних сигналів через лінійні стаціонарні системи, зазвичай мають на увазі цілий комплекс математичних прийомів, в основі яких лежить використання властивостей частотного коефіцієнта передачі системи. Нижче показано застосування спектрального підходу до задачі знаходження реакції системи.

Нехай на вході деякої лінійної стаціонарної системи діє детермінований сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, заданий зворотним перетворенням Фур'є:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{вх}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (13.1)$$

Будемо вважати, що частотний коефіцієнт передачі системи $K(j\omega)$ – відомий. Як було доведено у попередній лекції, комплексний сигнал виду $\exp(j\omega t)$, будучи власною функцією системного оператора, створює на виході елементарну реакцію $K(j\omega)\exp(j\omega t)$. Підсумовуючи ці реакції, знаходимо представлення вихідного сигналу:

$$u_{\text{вих}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) U_{\text{вх}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (13.2)$$

Таким чином отримано основну формулу спектрального методу, яка свідчить про те, що частотний коефіцієнт передачі системи служить множником пропорційності між спектральними функціями сигналів на вході і виході:

$$U_{\text{вих}}(\omega) = K(j\omega) U_{\text{вх}}(\omega) \quad (13.3)$$

Отже, аналіз систем в частотній області відрізняється чудовою рисою – ефект перетворення сигналу в системі відображається простою алгебраїчною операцією множення.

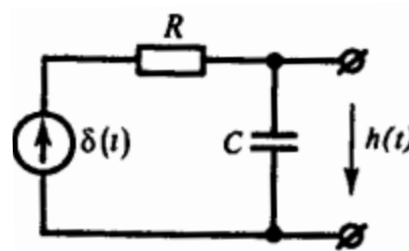
Слід мати на увазі, що спектральний і часовий підходи повністю еквівалентні один одному. Дійсно, інтеграл Дюамеля (формула 10.10 з лекції 10) є згортою функції $u_{\text{вх}}(t)$ та імпульсної характеристики $h(t)$ в часовій області: $u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх}}(t) * h(t)$. Це означає, що у відповідності до формули 8.10 з лекції 8, яка відображає властивість перетворення Фур'є під назвою «Спектр згортки сигналів», спектральна функція вихідного сигналу $u_{\text{вих}}(t)$ має бути добутком спектральних функцій сигналів $u_{\text{вх}}(t)$ і $h(t)$. Звідси безпосередньо випливає формула (13.3).

Знаходження імпульсних характеристик

Як правило, знаходження частотних коефіцієнтів передачі лінійних систем не викликає принципових труднощів. Тому, якщо потрібно обчислити імпульсну характеристику $h(t)$ системи, то доцільно скористатися спектральним методом, згідно з яким

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (13.4)$$

В якості прикладу знайдемо імпульсну характеристику RC -кола, для якого вихідним сигналом служить напруга на конденсаторі.



Комплексний коефіцієнт передачі цього кола було отримано у попередній лекції. Він має такий вигляд:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (13.5)$$

тому імпульсна характеристика

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1 + j\omega RC} d\omega \quad (13.6)$$

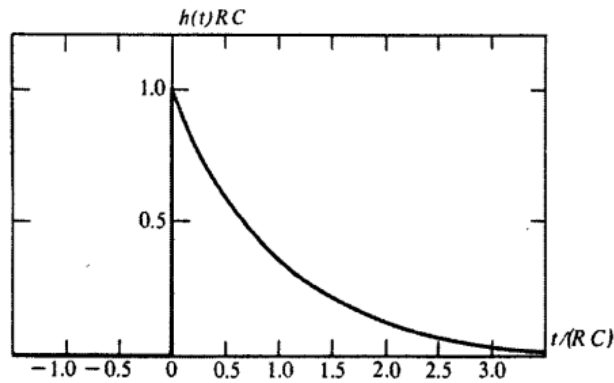
Застосовуючи таблиці інтегралів, отримуємо, що

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)}, \text{ коли } t > 0 \quad (13.7)$$

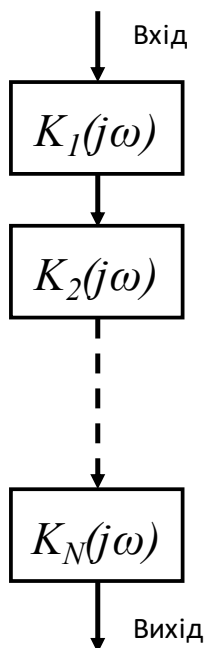
За $t < 0$ маємо

$$h(t) = 0 \quad (13.8)$$

Графік імпульсної характеристики RC -кола, побудований за формулами (13.7) та (13.8), являє собою криву, розірвану у точці часу $t = 0$ (рис. 13.1):

Рис. 13.1. Графік імпульсної характеристики RC -кола

Коефіцієнт передачі багатоланкової системи



В техніці часто використовують складні системи, окремі ланки яких включені каскадно, тобто вихідний сигнал попередньої ланки служить вхідним сигналом для наступної ланки. Прикладом такої системи може служити багатоланковий підсилувач.

Будемо вважати, що частотні коефіцієнти передачі окремих ланок $K_n(j\omega)$, $n=1,2,\dots,N$ відомі. Збуджуючи першу ланку сигналом $u_{\text{вх}}(t)=\exp(j\omega t)$, отримуємо на виході сигнал

$$u_{\text{вих}}(t) = K_1(j\omega)K_2(j\omega)\cdots K_N(j\omega)\exp(j\omega t) \quad (13.9)$$

звідки результуючий коефіцієнт передачі

$$K(j\omega) = \prod_{n=1}^N K_n(j\omega) \quad (13.10)$$

Частотний коефіцієнт передачі потужності

У відповідності до рівності Парсеваля (див. Лекція 9), енергія вихідного сигналу

$$\begin{aligned} E_{\text{вих}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вих}}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\text{вих}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |U_{\text{вих}}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{вих}}(\omega) U_{\text{вих}}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) U_{\text{вх}}(\omega) K^*(j\omega) U_{\text{вх}}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 |U_{\text{вх}}(\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega)|^2 W_{\text{вх}}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |K(j\omega)|^2 W_{\text{вх}}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (13.11)$$

де $W_{\text{вих}}(\omega)$ – енергетичний спектр сигналу на виході, $W_{\text{вх}}(\omega)$ – енергетичний спектр сигналу на вході.

Відповідно до формули (13.11), вихідний енергетичний спектр

$$W_{\text{вих}}(\omega) = |K(j\omega)|^2 W_{\text{вх}}(\omega) \quad (13.12)$$

Величину

$$K_p(j\omega) = |K(j\omega)|^2 \quad (13.13)$$

називають *частотним коефіцієнтом передачі потужності* системи на заданій частоті ω . Оскільки цей коефіцієнт є дійсною величиною (не комплексною), обчислення енергії вихідного сигналу виявляється набагато більш простою задачею ніж пошук самої форми вихідного сигналу.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Знаходження імпульсної характеристики за відомим частотним коефіцієнтом передачі лінійної системи.
2. Частотний коефіцієнт передачі потужності.
3. Коефіцієнт передачі багатоланкової системи

ЛЕКЦІЯ № 14

Тема: Відомості з теорії ймовірностей щодо випадкових величин. Випадкові сигнали та їх імовірнісні характеристики (початок).

Зміст

Відомості з теорії ймовірності.....	2
Функція розподілу	2
Щільність розподілу	3
Числові характеристики випадкових величин	5
Математичне очікування.....	5
Дисперсія і середнє квадратичне відхилення	7
Приклади законів розподілу	7
Закон рівномірної щільності.....	7
Нормальний закон та його параметри	9
Випадкові сигнали	11
Ансамбль реалізацій	11
Гармонійний сигнал з випадковою початковою фазою.....	12
Випадковий телеграфний сигнал	13
Імовірнісні характеристики випадкових сигналів.....	13
Числові характеристики	14
Контрольні питання за темою.....	15
Рівень модуля	15
Рівень курсу	16

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей // Е. С. Вентцель – М. : Наука, 1969. – 576 с.

Відомості з теорії ймовірності

Випадковою величиною X називається величина, яка в результаті випробування може прийняти те чи інше значення, невідомо заздалегідь – яке саме. Випадкові величини можуть бути перервного (дискретного) та неперервного типу. Можливі значення перервних величин можуть бути заздалегідь перераховані. Можливі значення неперервних величин не можуть бути заздалегідь перераховані і неперервно заповнюють деякий проміжок.

Сума ймовірностей появи всіх можливих значень випадкової величини дорівнює одиниці. Ця сумарна ймовірність якимось чином розподілена між окремими значеннями. Випадкову величину буде повністю описано з ймовірнісної точки зору, якщо ми задамо цей розподіл, тобто точно зазначимо, яку ймовірність появи має кожна з подій. Цим ми встановимо так званий закон розподілу випадкової величини.

Законом розподілу випадкової величини називається всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями їх появи. Про саму випадкову величину ми будемо говорити, що вона підпорядкована певному закону розподілу.

Функція розподілу

Для кількісної характеристики розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини зручно користуватися не ймовірністю події $X = x$, а ймовірністю події $X < x$, де x – деяка поточна змінна. Ймовірність цієї події, вочевидь, залежить від x , тобто ймовірність є певною функцією від x . Ця функція називається *функцією розподілу* випадкової величини X і позначається $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x) \quad (14.1)$$

Функцію розподілу $F(x)$ іноді називають також *інтегральною функцією розподілу* або *інтегральним законом розподілу*.

Функція розподілу – сама універсальна характеристика випадкової величини. Вона існує для всіх випадкових величин: як перервних, так і неперервних. Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину з імовірнісної точки зору, тобто вона є однією з форм закону розподілу.

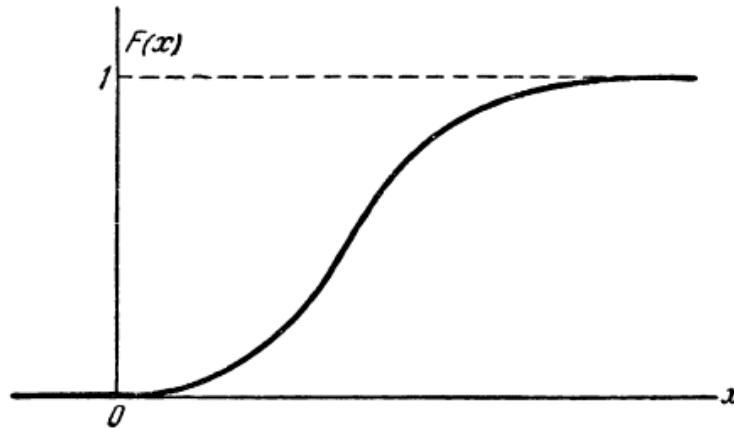
Сформулюємо деякі загальні властивості функції розподілу.

1. Функція розподілу $F(x)$ є неспадною функцією свого аргументу, тобто за $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$.

2. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю: $F(-\infty) = 0$.

3. На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює одиниці:
 $F(+\infty) = 1$

Графік функції розподілу $F(x)$, в загальному випадку являє собою графік неспадної функції, значення якої починаються від 0 і доходять до 1.



Щільність розподілу

Нехай існує деяка неперервна випадкова величина X з функцією розподілу $F(x)$. Припустимо, що ця функція $F(x)$ є неперервною і диференційованою. Обчислимо ймовірність попадання цієї випадкової величини на ділянку від x до $x + \Delta x$:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) \quad (14.2)$$

т. е. приріст функції розподілу на цій ділянці. Розглянемо відношення цієї ймовірності до довжини ділянки, тобто середню ймовірність, яка припадає на одиницю довжини цієї ділянки. Тепер будемо наближати Δx до нуля. В якості границі отримаємо похідну від функції розподілу:

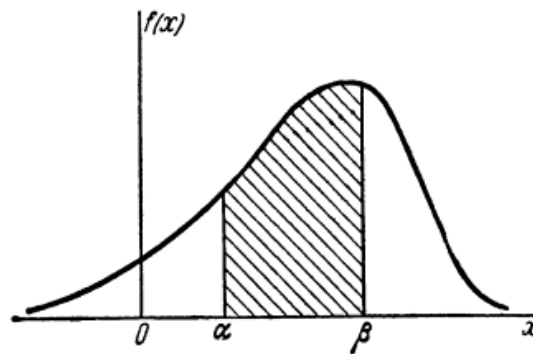
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) \quad (14.3)$$

Введемо позначення:

$$p(x) = F'(x) \quad (14.4)$$

Функція $p(x)$ – похідна функції розподілу характеризує ніби щільність, з якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці. Ця функція називається *щільністю розподілу* (інакше: «*щільністю ймовірності*») неперервної випадкової величини X . Іноді функцію $p(x)$ називають також «*диференціальною функцією розподілу*» або «*диференціальним законом розподілу*» випадкової величини X .

Знайдемо ймовірність попадання величини X на відрізок від a до β через щільність розподілу.



Вочевидь, вона дорівнює сумі елементів ймовірності на цьому ділянці, тобто інтегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx \quad (14.5)$$

Геометрично ймовірність попадання значення величини X на ділянку (α, β) дорівнює площі кривої розподілу, що спирається на цю ділянку.

Формула (14.5) виражає щільність розподілу через функцію розподілу. Здамося зворотнім завданням: виразити функцію розподілу через щільність. За визначенням

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) \quad (14.6)$$

звідки за формулою (14.5) маємо:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (14.7)$$

Геометрично $F(x)$ є не що інше, як площа кривої розподілу, що лежить лівіше точки x .

Зазначимо основні властивості щільності розподілу.

1. Щільність розподілу є ненегативною функцією: $p(x) \geq 0$.

Ця властивість безпосередньо випливає з того факту, що функція розподілу $F(x)$ є неспадною функцією.

2. Інтеграл в нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (14.8)$$

Це випливає з формули (14.7) та з того, що $F(+\infty) = 1$.

Геометрично основні властивості щільності розподілу означають, що:

1) вся крива розподілу лежить вище осі абсцис;

2) повна площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

Числові характеристики випадкових величин

У попередньому розділі було представлено повні, вичерпні характеристики випадкових величин – так звані закони розподілу. Такими характеристиками для безперервної величини є:

- а) функція розподілу;
- б) щільність розподілу (графічно – крива розподілу).

Кожен закон розподілу являє собою деяку функцію, і зазначення цієї функції повністю описує випадкову величину з імовірнісної точки зору.

Однак у багатьох питаннях практики немає необхідності характеризувати випадкову величину повністю, вичерпно. Часто достатньо буває вказати тільки окремі числові параметри, які деякою мірою характеризують істотні риси розподілу випадкової величини: наприклад, якесь середнє значення, біля якого групуються можливі значення випадкової величини; будь-яке число, що характеризує ступінь розкиданості цих значень відносно середнього, і т. д. Користуючись такими характеристиками, ми хочемо всі істотні відомості щодо випадкової величини, які ми маємо, виразити найбільш компактно за допомогою мінімального числа числових параметрів. Такі характеристики, призначення яких – представити у стислій формі найбільш істотні особливості розподілу, називаються числовими характеристиками випадкової величини.

Математичне очікування

Серед числових характеристик випадкових величин потрібно перш за все відзначити ті, які характеризують положення випадкової величини на числовій осі, тобто ті, які вказують на деяке середнє, орієнтовне значення, біля якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

Середнє значення випадкової величини є певна кількість, що є як би її «представником» і замінює її при грубо орієнтовних розрахунках. Коли ми говоримо: «середній час роботи лампи дорівнює 100 годинам» або «середня точка попадання зміщена щодо мети на 2 м вправо», ми цим вказуємо певну числову характеристику випадкової величини, яка описує її місце розташування на числовій осі, тобто її «характеристику положення».

З характеристик положення в теорії ймовірностей найважливішу роль відіграє математичне очікування випадкової величини, яке іноді називають просто середнім значенням випадкової величини.

Розглянемо дискретну випадкову величину X , що приймає можливі значення x_1, x_2, \dots, x_n з ймовірностями p_1, p_2, p_n . Нам потрібно охарактеризувати якимось числом положення значень випадкової величини на осі абсцис з урахуванням того, що ці значення мають різні ймовірності. Для

цієї мети природно скористатися так званим «середнім зваженим» з значень x_n . Кожне значення x_i під час усереднення має враховуватися з «вагою», яка пропорційна ймовірності появи цього значення. Таким чином, ми обчислимо середнє значення випадкової величини X , яке ми позначимо $M[X]$:

$$M[X] = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (14.9)$$

або, враховуючи, що $\sum_{i=1}^n p_i = 1$,

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (14.10)$$

Це середнє зважене значення і називається математичним очікуванням випадкової величини. Таким чином, ми ввели в розгляд одне з найважливіших понять теорії ймовірностей – поняття математичного очікування.

Математичним очікуванням випадкової величини називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на ймовірності появи цих значень.

Формула (14.10) для математичного очікування відповідає випадку дискретної випадкової величини. Для неперервної величини X математичне очікування, природно, виражається вже не сумою, а інтегралом і найчастіше позначається як m_x :

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad (14.11)$$

Формула (14.11) виходить з формули (14.10), якщо в ній замінити окремі значення x_i безперервною змінною x , а відповідні ймовірності p_i замінити елементом ймовірності $p(x)dx$, та ще й до цього замінити кінцеву суму на інтеграл.

Математичне очікування випадкової величини X пов'язано своєрідною залежністю з середнім арифметичним спостережених значень випадкової величини при великому числі дослідів: при великому числі випробувань середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини наближається (сходиться по ймовірності) до її математичного очікування.

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

Дисперсією $D[X]$ випадкової величини X називається математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] \quad (14.12)$$

Виходячи з цього визначення на основі формули (14.11) отримуємо формулу для розрахунку дисперсії дискретної випадкової величини:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i \quad (14.13)$$

Для безпосереднього обчислення дисперсії неперервної випадкової величини відповідно служить формула:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \quad (14.14)$$

Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання, розкиданості значень випадкової величини навколо її математичного очікування. Саме слово «дисперсія» означає «розсіювання».

Дисперсія випадкової величини має розмірність квадрата випадкової величини; для наочної характеристики розсіювання зручніше користуватися величиною, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини. Для цього з дисперсії витягають квадратний корінь. Отримана величина називається *середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини X . Середнє квадратичне відхилення позначають як $\sigma[X]$:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \quad (14.15)$$

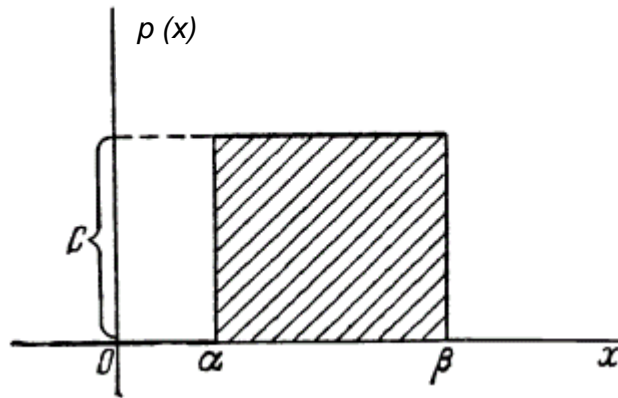
Для спрощення запису часто користуються скороченими позначеннями середнього квадратичного відхилення і дисперсії: σ_x та D_x . У разі, коли не виникає сумніву, до якої випадкової величини належать ці характеристики, то іноді опускають значок x у σ_x і D_x та просто пишуть σ і D . Слова «середнє квадратичне відхилення» іноді скорочують: замінюють буквами с.к.в. або навіть СКВ.

Приклади законів розподілу

Закон рівномірної щільності

У деяких задачах практики зустрічаються неперервні випадкові величини, про які заздалегідь відомо, що їх можливі значення лежать в межах

деякого певного інтервалу; крім того, відомо, що в межах цього інтервалу всі значення випадкової величини однаково вірогідні (точніше, володіють однією і тією ж щільністю ймовірності). Про такі випадкові величини говорять, що вони розподіляються за *законом рівномірної щільності*.



Розглянемо випадкову величину X , підпорядковану закону рівномірної щільності на ділянці від α до β , і напишемо для неї вираз щільності розподілу $p(x)$. Щільність $p(x)$ постійна і дорівнює c на відрізку (α, β) ; поза цим відрізком вона дорівнює нулю:

$$p(x) = \begin{cases} c & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{при } x < \alpha \text{ или } x > \beta. \end{cases} \quad (14.16)$$

Оскільки площа, обмежена кривою розподілу, дорівнює одиниці: $c(\beta - \alpha) = 1$, то

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

і щільність розподілу $p(x)$ тоді має вигляд:

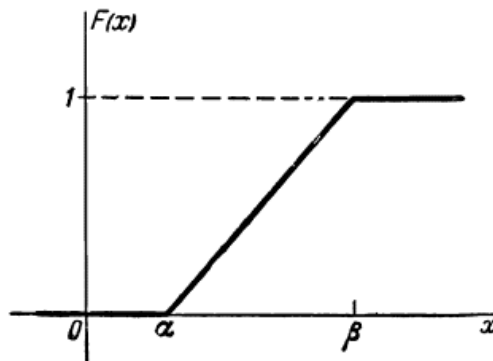
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{за } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{за } x < \alpha \text{ чи } x > \beta. \end{cases} \quad (14.17)$$

Формула (14.17) як раз і виражає закон рівномірної щільності на ділянці (α, β) .

Напишемо вираз для функції розподілу $F(x)$. Функція розподілу виражається площею кривої розподілу, що лежить лівіше точки x . Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x \leq \alpha, \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{за } \alpha < x < \beta, \\ 1 & \text{за } x \geq \beta. \end{cases} \quad (14.18)$$

Графік функції $F(x)$ наведено нижче



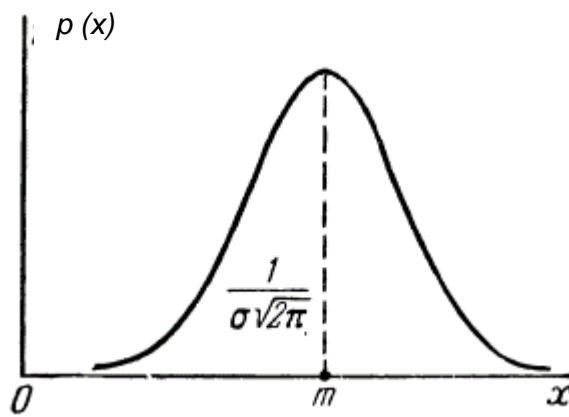
Нормальний закон та його параметри

Нормальний закон розподілу (часто званий законом Гауса) грає дуже важливу роль в теорії ймовірностей і займає серед інших законів розподілу особливе положення. Цей закон розподілу найчастіше зустрічається на практиці. Головна особливість, що виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за типових умов, що досить часто зустрічаються.

Можна довести, що сума досить великого числа незалежних (або слабо залежних) випадкових величин, підпорядкованих яким завгодно законам розподілу (при дотриманні деяких вельми нежорстких обмежень), наближено підпорядковується нормальному закону, і це виконується тим точніше, чим більша кількість випадкових величин підсумовується. Більшість випадкових величин, які зустрічаються на практиці, таких, наприклад, як похибки вимірювань, похибки стрільби і т. д., можуть бути представлені як сума досить великого числа порівняно малих доданків – елементарних складових, кожна з яких викликана дією окремої причини, яка не залежить від інших. Нормальний закон розподілу характеризується щільністю ймовірності виду:

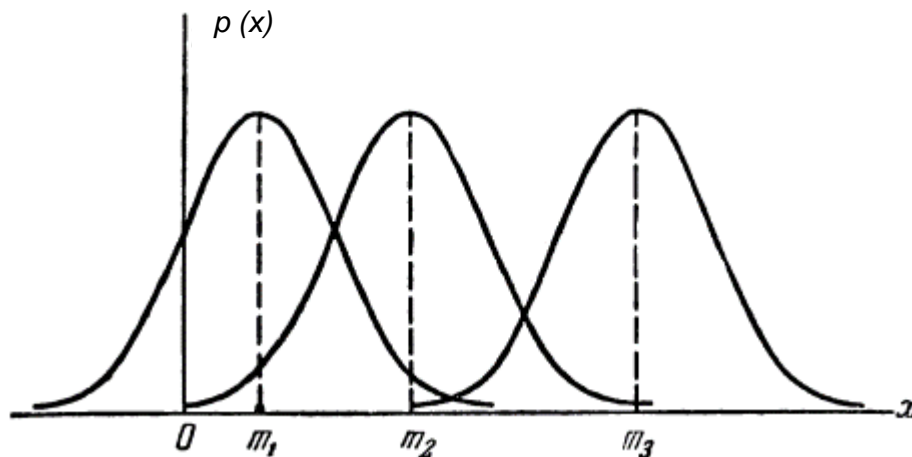
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (14.19)$$

Крива розподілу за нормальним законом має симетричний вигляд схожий на дзвін:

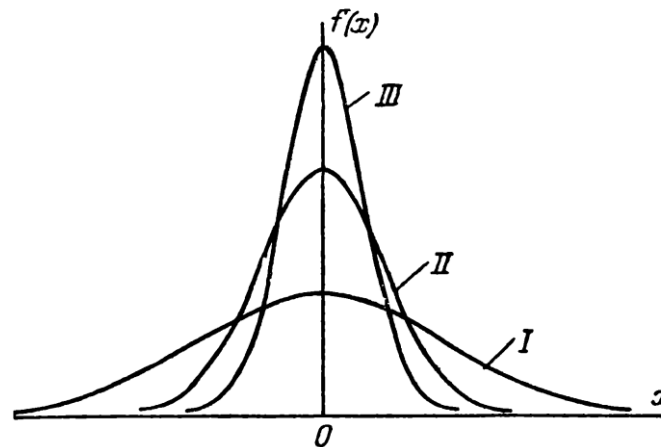


Максимальна ордината кривої, яка дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, відповідає точці $x = m$; в міру віддалення від точки m щільність розподілу падає, і за $x \rightarrow \pm\infty$ крива асимптотично наближається до осі абсцис.

З'ясуємо зміст численних параметрів m та σ , що входять у вираз нормального закону (14.19). Величина m є не що інше, як математичне очікування, а величина σ – середньоквадратичне відхилення величини X . Безпосередньо з формули (14.19) видно, що центром симетрії розподілу є центр розсіювання m . Це ясно з того, що при зміні знаку різниці $(x-m)$ на протилежний вираз (14.19) не змінюється. Якщо змінювати центр розсіювання m , крива розподілу буде зміщуватися вздовж осі абсцис, не змінюючи своєї форми. Центр розсіювання характеризує положення розподілу на осі абсцис.



Параметр σ характеризує не положення, а саму форму кривої розподілу. Тобто, це є характеристика розсіювання. Найбільша ордината кривої розподілу обернено пропорційна σ ; коли σ збільшується – максимальна ордината зменшується. Так як площа кривої розподілу завжди повинна залишатися рівною одиниці, то при збільшенні σ крива розподілу стає більш плоскою, розтягуючись уздовж осі абсцис; навпаки, при зменшенні σ крива розподілу витягується вгору, одночасно стискаючи з боків, і стає більш голкоподібною.



На малюнку показані три нормальні криві (I, II, III) за $m = 0$; з них крива I відповідає найбільшому, а крива III – найменшому значенню σ . Зміна параметра σ рівносильна зміни масштабу кривої розподілу – збільшення масштабу по одній осі і такого ж зменшення за іншою.

Випадкові сигнали

На відміну від детермінованих сигналів, форму яких ми знаємо точно, миттєві значення випадкових сигналів заздалегідь невідомі і можуть бути передбачені лише з певною ймовірністю, меншою одиниці. Характеристики сигналів є статистичними, тобто мають імовірнісний вид.

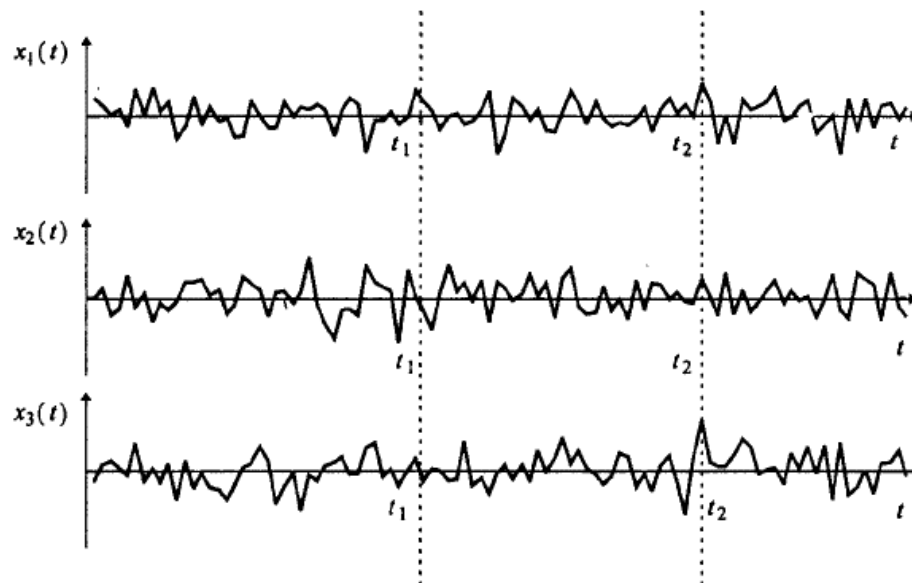
У радіотехніці існує два основні класи сигналів, які потребують імовірнісного опису. По-перше, це шуми – електромагнітні коливання, які хаотично змінюються в часі. Вони виникають в різноманітних системах через безладний рух носіїв заряду. По-друге, випадковими є всі сигнали, що несуть інформацію. Через це для опису закономірностей, властивих осмисленим повідомленнями, також вдаються до імовірнісних моделей.

Ансамбль реалізацій

Математична модель випадкового сигналу, який змінюється в часі, називається *випадковим процесом*. За визначенням, випадковий процес $X(t)$ – функція особливого виду, що характеризується тим, що значення, які вона приймає в будь-який момент часу t , є випадковими величинами. Слід зауважити, що в технічній літературі терміни «випадковий сигнал» і «випадковий процес» часто використовуються як синоніми.

До реєстрації (до прийому) випадковий сигнал слід розглядати саме як випадковий процес, що представляє собою сукупність (ансамбль) функцій часу, які підкоряються деякій загальній для них статистичній закономірності. Одна з цих функцій, що стала повністю відомою після прийому повідомлення, називається реалізацією випадкового процесу. Реалізація вже є не

випадковою, а детермінованою функцією часу. На малюнку наведено приклад декількох реалізацій випадкового процесу.



Гармонійний сигнал з випадковою початковою фазою

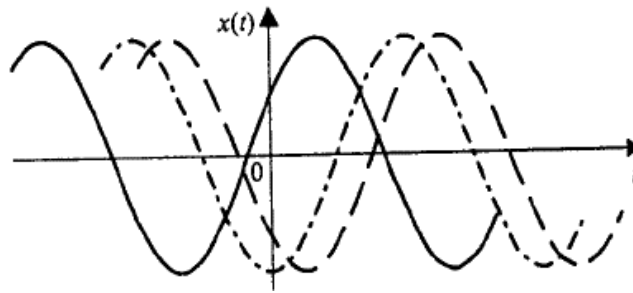
У багатьох практичних завданнях використовується модель випадкового процесу, реалізації якого є гармонійними коливаннями з відомими (детермінованими) амплітудою і частотою, але з випадковою початковою фазою. Таким чином, реалізація даного випадкового процесу може бути записана як

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де A – амплітуда (детермінована), ω_0 – частота (детермінована) і φ – випадкова початкова фаза, яка в більшості практично цікавих випадків може вважатися рівномірно розподіленою на інтервалі $0 \dots 2\pi$, тобто має таку щільність ймовірності:

$$p_\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{за } 0 < \varphi < 2\pi, \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Графіки декількох реалізацій даного випадкового процесу, що представляють собою синусоїди, зміщені один щодо одного вздовж тимчасової осі, показано на малюнку.

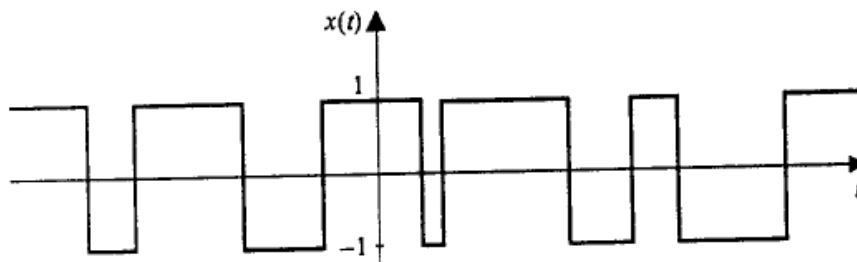


Як видно, конкретний вид реалізації процесу в даному випадку визначається значенням всього лише однієї випадкової величини – початкової фази.

Випадковий телеграфний сигнал

Таким сигналом названо випадковий процес, реалізації якого приймають значення $+1$ і -1 , а перепади рівня відбуваються у випадкові моменти часу. Число N перепадів рівня, що відбуваються за проміжок часу тривалістю τ , є випадковою величиною.

Скачки рівня відбуваються у випадкові моменти часу t_k , тому аналітично записати формулу для окремої реалізації даного випадкового процесу виявляється досить складно, а зобразити її графік можна лише умовно:



В даному випадку конкретна реалізація задається нескінченною безліччю випадкових величин – моментів перепадів рівня t_k , а характеристики випадкових процесів визначаються статистичними властивостями цих випадкових величин.

Отже, повний опис випадкового процесу дає його ансамбль реалізацій. Однак, для вирішення практичних завдань часто буває достатньо простіших характеристик, що виражаються у вигляді числових параметрів і детермінованих функцій. Про це піде мова далі.

Імовірнісні характеристики випадкових сигналів

Нехай $X(t)$ – випадковий сигнал, заданий ансамблем реалізацій $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots\}$. Вибравши довільний момент часу t_1 зафіксуємо значення, що приймаються всіма реалізаціями: $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_k(t_1), \dots\}$. Сукупність цих значень утворює одномірний перетин випадкового процесу і являє собою

випадкову величину $X(t_1)$. Випадкові величини, як було розглянуто вище, описуються наступними ймовірнісними характеристиками.

Функція розподілу, що позначається як $F(x, t)$, дорівнює ймовірності того, що в момент часу t значення випадкового процесу не перевищує величину x :

$$F(x, t) = P(X(t) \leq x)$$

Щільність розподілу ймовірності позначається $p(x, t)$ і являє собою похідну від функції розподілу:

$$p(x, t) = \frac{dF(x, t)}{dx}$$

Числові характеристики

Знання одновимірної щільності ймовірності $p(x, t)$ дозволяє зробити статистичне усереднення як самої величини $X(t)$, так і будь-якої функції від неї. Під статистичними усередненням мається на увазі усереднення по безлічі (по ансамблю реалізацій) в будь-якому перетині процесу t_i , тобто в фіксований момент часу.

Для практичних застосувань найбільше значення мають наступні параметри випадкового процесу:

- математичне очікування, яке є теоретичною оцінкою середнього зваженого значення випадкового процесу в момент часу t .

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, t)dx$$

- дисперсія, яка характеризує середню потужність відхилень випадкового процесу від його середнього значення $m_x(t)$, званих флуктуаціями:

$$D_x(t) = M[(X(t) - m_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(t))^2 p(x, t)dx$$

- середньоквадратичне відхилення, що представляє собою квадратний корінь з дисперсії і служить амплітудної мірою розкиду значень випадкового процесу в момент часу t відносно математичного очікування:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$$

Дисперсія випадкової величини X часто позначається як σ_x^2 .

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Що таке функція розподілу випадкової величини?
2. Чому дорівнює функція розподілу при аргументі, який дорівнює мінус нескінченності?
3. Чому дорівнює функція розподілу при аргументі, який дорівнює плюс нескінченності?
4. Функція розподілу – спадна, зростаюча, дзвоноподібна або незмінна функція?
5. Як пов'язані щільність розподілу і функція розподілу випадкової величини?
6. Яку з функцій: функцію розподілу або функцію щільності розподілу можна назвати законом розподілу випадкової величини?
7. Чому дорівнює інтеграл в нескінченних межах від функції щільності розподілу для нормального закону?
8. Запишіть формулу розрахунку математичного очікування для дискретної випадкової величини.
9. Запишіть формулу розрахунку математичного очікування для неперервної випадкової величини.
10. Запишіть формулу розрахунку дисперсії для неперервної випадкової величини.
11. Що таке середнє квадратичне відхилення?
12. Перерахуйте відомі вам закони розподілу.
13. Що таке випадковий сигнал?
14. Що таке реалізація випадкового сигналу?
15. Реалізація випадкового сигналу – випадкова чи детермінована функція?
16. Як називається сукупність реалізацій випадкового сигналу?
17. Чим відрізняється функція розподілу випадкового сигналу від функції розподілу звичайної випадкової величини?
18. Чим відрізняється функція щільності розподілу випадкового сигналу від функції щільності розподілу звичайної випадкової величини?
19. Як пов'язані щільність розподілу і функція розподілу випадкового сигналу?
20. Чим відрізняється математичне очікування випадкового сигналу від математичного очікування звичайної випадкової величини?
21. Чим відрізняється дисперсія випадкового сигналу від дисперсії звичайної випадкової величини?

Рівень курсу

1. Випадкові сигнали. Ансамбль реалізацій. Приклади випадкових сигналів.
2. Імовірнісні характеристики випадкових сигналів.
3. Числові характеристики випадкових сигналів.

ЛЕКЦІЯ № 15

Тема: Випадкові сигнали та їх імовірнісні характеристики (продовження)

Зміст

Кореляційні функції випадкових сигналів	2
Спектральні характеристики випадкових сигналів	5
Стаціонарні випадкові процеси	7
Ергодичні випадкові процеси	9
Теорема Вінера-Хинчина	10
Контрольні питання за темою.....	12
Рівень модуля	12
Рівень курсу	13

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей // Е. С. Вентцель – М. : Наука, 1969. – 576 с.

Кореляційні функції випадкових сигналів

Одномірної щільності ймовірності недостатньо для опису поведінки випадкового процесу в часі. Чому? Тому що закон розподілу $F(x, t)$ описує поведінку випадкового сигналу тільки в один єдиний момент часу t і не надає ніякої інформації про те, яким був сигнал до цього часу і яким стане він після цього. Тобто, якщо ми знаємо закон розподілу $F(x, t)$, то ми можемо вказати тільки ймовірність того, що сигнал в якийсь конкретний момент часу t виявиться більше або менше деякого заданого значення (або виявиться в межах деякого заданого інтервалу значень). Проте цілком очевидно, що будь-який сигнал в момент часу t має величину $s(t)$, близьку до того значення сигналу $s(t-\tau)$, яке було перед цим, за час τ до цього, в момент часу $t-\tau$, якщо τ , зрозуміло, – достатньо мале. І чим менше τ , тим ближче $s(t)$ до $s(t-\tau)$. Ясно, що в ліміті – на межі, коли $\tau = 0$, сигнал є рівним самому собі.

Яка характеристика відображає цей зв'язок між минулим, теперішнім та майбутнім значенням сигналу? Такою характеристикою є *кореляційна функція*, яку ми розглянули в 9-й лекції. Як ви пам'ятаєте, кореляційна функція визначається виразом:

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\tau)dt \quad (15.1)$$

Це визначення ми дали стосовно до *детермінованого* сигналу – сигналу повністю визначеного у часі, кожне значення якого може бути передбачене з 100% вірогідністю. Було сказано: кореляційна функція показує ступінь подібності між сигналом та його зрушеною копією: чим більше значення кореляційної функції, тим ця подібність сильніше. Однак, в цій лекції ми розглядаємо *випадкові* сигнали – невідомі заздалегідь, непередбачувані, або, точніше: передбачувані тільки з певною ймовірністю менше одиниці. Як же застосувати поняття кореляційної функції до випадкових сигналів? Чи це можливо?

Насправді, це стає можливим, якщо застосувати методи теорії ймовірності та математичної статистики. Статистика, як відомо, ґрунтується на усередненні. Застосуємо усереднення для аналізу випадкових сигналів з єдиним уточненням: замість формули (15.1) будемо користуватися формулою

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt, \quad (15.2)$$

де T – час, період спостереження. Якщо перейти до нескінченного періоду спостереження (що можливо тільки в абстрактному випадку, який можна

розглядати виключно з математичної точки зору), то отримуємо такий вираз для кореляційної функції:

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt \quad (15.3)$$

Чому зроблено це уточнення, буде сказано в розділі, присвяченому стаціонарним випадковим сигналам.

Отже, маємо ансамбль реалізацій – сукупність реалізацій випадкової функції (дивись попередню лекцію 14). Реалізація – це те, що вже відбулося, подія, яка сталася у минулому: сигнал вже реалізувався і його зафіксували вимірювальним приладом: записали на стрічці або зареєстрували в пам'яті комп'ютера. Сукупність реалізацій – це кілька або, навіть, багато таких записів. Може бути десятки або сотні. Але все це – реалізації одного і того ж сигналу. Наприклад, сигналу з виходу радіоприймача. Кожна з цих реалізацій є детермінованою функцією: ми знаємо її значення в кожен зафіксований нами момент часу, і ці зафіксовані значення вже ніколи не зміняться. Якщо ми взяли будь-який запис, то ми однозначно можемо сказати, яким сигнал буде на 3-й секунді записи, і яким на 10-й. Це точно визначено, детерміновано. Тобто, кожна, окремо взята реалізація випадкового сигналу – це детермінована функція, визначена зі 100% вірогідністю.

Якщо реалізація випадкової величини – це детермінована функція, то без будь-яких проблем до неї можна застосувати формулу (15.2) і обчислити для неї кореляційну функцію $B(\tau)$. Нехай, наприклад, у нас є десять реалізацій сигналу $s(t)$. Беремо першу реалізацію і по ній розраховуємо емпіричну (тобто, отриману за результатами досвіду) кореляційну функцію, якій ми присвоюємо перший номер $B_1(\tau)$. Далі беремо другу реалізацію і по ній розраховуємо $B_2(\tau)$. Потім третю і так далі – до десятої включно. В результаті отримуємо десять розрахованих емпіричних кореляційних функцій $B_1(\tau) \div B_{10}(\tau)$. Ось тепер можна усереднити отримані емпіричні функції і отримати кореляційну функцію по ансамблю реалізацій:

$$B_N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i(\tau), \quad (15.4)$$

де N – число реалізацій в ансамблі, в нашому прикладі їх було 10.

Вочевидь ясно, що чим більше число N , тим ближче $B_N(\tau)$ до істинної кореляційної функції сигналу $B(\tau)$, тобто

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B_N(\tau) = B(\tau) \quad (15.5)$$

Наведений вище опис поняття кореляційної функції випадкового сигналу не є досить строгим. Математичний опис на основі двовимірного розподілу ймовірності дається в багатьох підручниках, зокрема, в тих, що наведені в якості джерел.

Про що ж говорить кореляційна функція? В першу чергу вона показує, наскільки швидко «в середньому» змінюється сигнал. Якщо сигнал змінюється повільно, то кореляційна функція – широка, убиває повільно і наближається до нуля при великих значеннях τ . В граничному випадку, якщо $s(t)$ взагалі не змінюється, то в усі моменти часу: $s(t_1) = s(t_2) = \dots = s(t_3)$ або, що те ж саме: $s(t+\tau) = s(t)$. І в цьому граничному випадку $B(\tau)$ – просто постійна величина для всіх τ .

Якщо ж $s(t)$ – функція, яка дуже швидко змінюється, то $B(\tau)$ приймає вид функції, близько притиснутою до осі $\tau = 0$. У граничному випадку, коли повністю відсутній зв'язок між двома сусідніми значеннями випадкового сигналу, тобто $s(t+\tau)$ при будь-якому τ не схоже на $s(t)$, тобто немає ніякого зв'язку, кореляції, залежності між двома сусідніми значеннями сигналу $s(t)$, то кореляційна функція перетворюється в дельта-функцію. Такий сигнал називається «білим шумом». Найчастіше законом його розподілу є нормальний закон.

Якщо сигнал $s(t)$ містить будь-яку періодичність, то і його кореляційна функція відобразить цю періодичність – вона також буде містити періодичні функції.

Ілюстрацію характеру кореляційної функції в залежності від різної швидкості зміни випадкового сигналу приведено на рисунку 15.1, де сигнал позначений як $x(t)$ (ліва колонка на рисунку), а кореляційна функція як $K(\tau)$ (середня колонка на рисунку). У правій колонці додатково представлено функцію спектральної потужності сигналу $S_p(\omega)$.

Відзначимо також, що різні види випадкових сигналів добре вивчені і для них існують свої моделі, якими вони математично описуються. Сигнал типу «білий шум» вже згадувався раніше. Іншим сигналом, модель якого широко застосовується при вивченні систем і процесів, є так званий «типовий вхідний сигнал слідкуючої системи». В науці швидкість зміни такого сигналу описується кореляційної функцією:

$$B(\tau) = Ae^{-a\tau} \quad (15.6)$$

Оце й є приклад математичної моделі випадкового сигналу, а саме – модель типового вхідного сигналу слідкуючої системи.

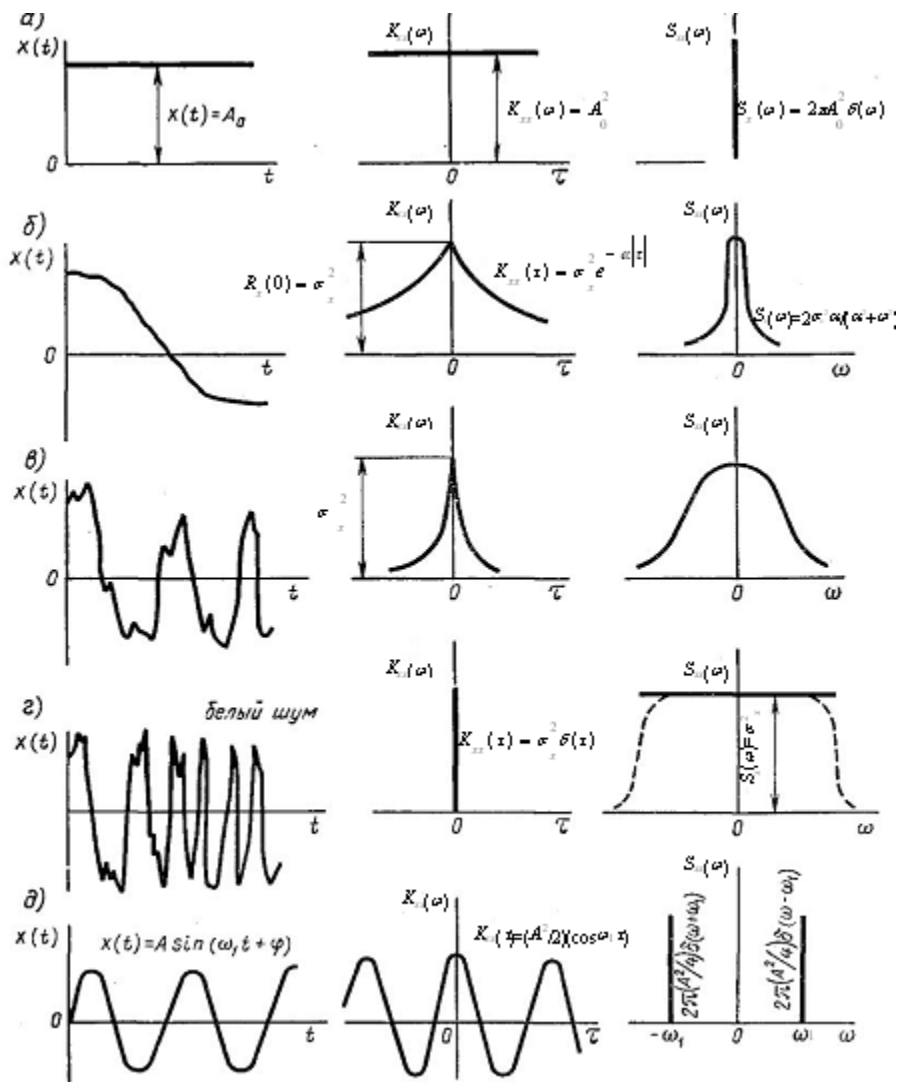


Рис. 15.1 - Сигнал, його кореляційна функція та спектральна потужність

Спектральні характеристики випадкових сигналів

При розгляді спектральних характеристик випадкових сигналів застосовується той самий підхід, який був розглянутий вище при вивченні кореляційної функції. Основа підходу – усереднення по ансамблю реалізацій.

Кожна окремо взята реалізація випадкового процесу являє собою детерміновану функцію, і до неї можна застосувати перетворення Фур'є. При цьому різні реалізації будуть, природно, мати різні спектри. Нас же цікавлять статистично усереднені характеристики випадкових процесів. Спробуємо знайти середнє значення спектральної щільності випадкового процесу (горизонтальною лінією тут і далі позначається операція статистичного усереднення по ансамблю реалізацій):

$$\overline{S(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{s(t)}e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} m_s(t)e^{-j\omega t} dt \tag{15.7}$$

Як бачите, усереднена спектральна щільність випадкового процесу являє собою спектр його детермінованою складової (математичного очікування). Для центрованих процесів (середнє значення або "центр" яких дорівнює нулю) математичне очікування в будь-який момент часу дорівнює нулю $m_s(t) = 0$ і, відповідно, усереднена спектральна щільність на всіх частотах теж дорівнює нулю: $\overline{S_s(\omega)} = 0$. Таким чином, середнє значення спектральної щільності не несе аж ніякої інформації щодо флуктуаційної, тобто власне випадкової, складової випадкового процесу. Це, зокрема, говорить про те, що фази спектральних складових в різних реалізаціях процесу випадкові і незалежні.

Можна, тим не менш, розглянути спектральну щільність *потужності* випадкового сигналу, оскільки потужність не залежить від співвідношення фаз спектральних складових.

Розглянемо центрований випадковий процес і виділимо з його ансамблю якусь реалізацію $s(t)$, обмеживши її тривалість кінцевим інтервалом часу $[-T/2; T/2]$. Застосувавши потім до обраної ділянки цієї реалізації (тривалістю T) пряме перетворення Фур'є, знайдемо її спектральну функцію $\dot{S}_T(\omega)$. Енергію E_T розглянутого відрізка реалізації згідно рівності Парсеваля можна обчислити як

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_T(\omega)|^2 d\omega \quad (15.8)$$

Поділивши цю енергію на T , отримаємо середню потужність P_T реалізації сигналу на даному часовому інтервалі:

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \langle s^2(t) \rangle \Big|_{|t| \leq T/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\dot{S}_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (15.9)$$

У наведених формулах кутові дужки означають усереднення за часом. При збільшенні тривалості проміжку часу T енергія відрізка реалізації необмежено зростає, а середня потужність прагне до деякого межі. Зробивши граничний перехід $T \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{S}_T(\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega \quad (15.10)$$

де функція

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{S}_T(\omega)|^2}{T} \quad (15.11)$$

являє собою спектральну щільність середньої потужності даної реалізації. Спектральну щільність потужності $W(\omega)$ в свою чергу необхідно усереднити по безлічі реалізацій. Спектральна щільність потужності випадкового сигналу усереднена по N реалізаціям

$$W_N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i(\tau) \quad (15.12)$$

Спектральна щільність потужності випадкового сигналу усереднена по всім реалізаціям:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\tau) = W(\tau) \quad (15.13)$$

Слід ще раз вказати на відмінність між енергетичним спектром $|\dot{S}(\omega)|^2$ детермінованого імпульсного сигналу (див. Лекцію 9) і спектральної щільності потужності $W(\omega)$ випадкового процесу. Функція $|\dot{S}(\omega)|^2$ характеризує кількість **енергії**, що приходиться на одиничну смугу частот. На відміну від цього функція $W(\omega)$ характеризує кількість **потужності**, що приходиться на одиничну смугу частот. Цей факт знаходить відображення і в різних фізичних розмірностях даних функцій.

Приклади спектральної щільності потужності різних типів випадкових сигналів наведені в третій колонці малюнка 15.1.

Якщо розглядати центрований випадковий процес, для якого $m_s(t) = 0$, то середня потужність будь-якої його реалізації дорівнює дисперсії процесу. В цьому випадку

$$D_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega \quad (15.14)$$

$W(\omega)$ – це дійсна функція, вона не містить інформації про фази спектральних складових і не дозволяє відновити окремі реалізації випадкового процесу. Крім того, з самого визначення спектральної щільності (15.11) видно, що $W(\omega)$ є ненегативною та ще й парною функцією частоти.

Стаціонарні випадкові процеси

Стаціонарними прийнято називати випадкові процеси, статистичні характеристики яких однакові у всіх часових перетинах.

Зокрема, а ні функція розподілу значень сигналу, а ні щільність ймовірності не залежать від часу: $F(x,t) = F(x)$, $p(x,t) = p(x)$. Для стаціонарного випадкового процесу математичне очікування і дисперсія, звичайно, також не залежать від часу: $m_s(t) = \text{const} = m_s$, $D_s(t) = \text{const} = D_s$, а кореляційна функція не

залежить від самих моментів часу t_1 або t_2 , натомість залежить виключно від тривалості інтервалу між ними $\tau = t_2 - t_1$. Тому під час запису статистичних параметрів стаціонарного випадкового процесу можна опускати позначення фіксованих моментів часу: $m_s, D_s, B_s(\tau)$.

Тепер дамо пояснення причин, за якими для визначення кореляційної функції випадкових сигналів замість формули (15.1) використовується формула (15.2). Як було вказано в лекції 9 у випадку сигналу з нескінченною енергією скористатися формулою (15.1) не вдається: по даній формулі для сигналів з нескінченною енергією ми завжди будемо отримувати результат також рівний нескінченності (до речі, саме з цієї причини для розрахунку кореляційної функції періодичного, детермінованого сигналу в лекції 9 застосовується інша формула). Випадковий стаціонарний сигнал в будь-який момент часу має однакову дисперсію. Завжди, на всьому протязі: від мінус нескінченності до плюс нескінченності. Тобто він протягом нескінченного часу має якесь значення, яке тільки іноді буває близьким до нуля. Якесь значення – це вже є потужність. Отже, випадковий стаціонарний сигнал протягом нескінченного періоду часу завжди має деяку потужність, а це означає, що енергія сигналу – нескінченна. І по відношенню до випадкового стаціонарного сигналу застосувати формулу (15.1) не можна, бо в результаті інтегрування ми отримуємо нескінченність, оскільки енергія сигналу нескінченна. Тому замість енергії сигналу розглядають його потужність: енергію за одиницю часу, – через що у формулі (15.2) з'являється множник $1/T$.

Таким чином, при аналізі випадкових сигналів на відміну від детермінованих завжди використовують поняття потужності, а не енергії. Саме тому при спектральному аналізі випадкових сигналів також використовують формули (15.9) – (15.11) з діленням на час, а для нескінченних часів використовують ліміт $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}$. Потужність випадкового стаціонарного сигналу – скінченна, в той час як енергія – нескінченна. В тому числі скінченна й потужність, що розраховується з використанням граничного переходу $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \dots$. Тому і існує відмінність між енергетичним спектром $|\dot{S}(\omega)|^2$ детермінованого імпульсного сигналу і спектральною щільністю потужності $W(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу, про що було сказано в попередньому розділі: функція $|\dot{S}(\omega)|^2$ характеризує міру **енергії**, що припадає на одиничну смугу частот, а функція $W(\omega)$ характеризує питому міру **потужності**, тобто **потужність**, яка так само припадає на одиничну смугу частот. Зрозуміло, що фізичні розмірності енергетичного спектру

детермінованого сигналу $[V^2c/Гц]$ і спектральної щільності потужності випадкового сигналу $[V^2/Гц]$ будуть різними.

Далі відзначимо властивості кореляційної функція стаціонарного випадкового процесу

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є парною:

$$B_s(\tau) = B_s(-\tau).$$

Крім того, абсолютні значення цієї функції при будь-яких τ не перевищують її значення за $\tau = 0$ (нагадаємо, що це значення дорівнює потужності випадкового сигналу, тобто його дисперсії D_s):

$$|B_s(\tau)| \leq B_s(0)$$

Функція $B_s(\tau)$ характеризує зв'язок (кореляцію) між значеннями $s(t)$, розділеними проміжком часу τ . Чим повільніше убиває ця функція з ростом абсолютного значення τ , тим більше проміжок часу, протягом якого спостерігається статистичний зв'язок між миттєвими значеннями випадкового процесу, і тим повільніше, плавніше змінюються в часі його реалізації.

Ергодичні випадкові процеси

Подальше спрощення аналізу випадкових процесів досягається при використанні умови ергодичності процесу. Стаціонарний випадковий процес називається ергодичним, якщо при визначенні будь-яких його статистичних характеристик усереднення по безлічі (ансамблю) реалізацій еквівалентно усереднення за часом однієї, теоретично — нескінченно довгої, реалізації.

Позначивши усереднення за часом кутовими дужками, можна записати наступні вирази, що дозволяють обчислити найважливіші статистичні характеристики ергодичного випадкового процесу за його єдиною реалізацією $s(t)$. Важливо звернути увагу на те, що ергодичний випадковий процес обов'язково є і стаціонарним:

$$\begin{aligned} m_s &= \langle s(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \\ D_s &= \langle [s(t) - m_s]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt - m_s^2 \\ B_s(\tau) &= \langle s(t)s(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau) dt \end{aligned} \quad (15.15)$$

Математичне очікування ергодичного випадкового процесу дорівнює постійній складовій будь-якої його реалізації, а дисперсія має наочний фізичний зміст потужності флуктуаційної складової.

Достатньою умовою ергодичності випадкового процесу, є прагнення до нуля його кореляційної функції зі збільшенням зміщення у часі τ :

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0$$

Під час проведення експериментального дослідження випадкових процесів відбувається, як правило, спостереження лише однієї реалізації сигналу, а не всього ансамблю. Якщо досліджуваний процес є ергодичним, то його реалізація достатньої довжини є «типовим» представником статистичного ансамблю. Згідно з наведеними вище формулами за цією єдиною реалізацією можна визначити математичне очікування, дисперсію та кореляційну функцію ергодичного випадкового процесу. На практиці інтегрування виконується, природно, не в нескінченних межах, а на кінцевому інтервалі, довжина якого повинна бути тим більше, чим вище вимоги до точності результатів вимірювання.

Теорема Вінера-Хинчина

Як розподіл спектральної щільності потужності, так і вид кореляційної функції пов'язані зі швидкістю зміни випадкового процесу у часі. Знайдемо зв'язок між цими двома характеристиками.

Як відомо, кореляційна функція детермінованого сигналу пов'язана перетворенням Фур'є з його енергетичним спектром. Застосуємо цю властивість до відрізка реалізації випадкового процесу тривалістю T :

$$\int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_T(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (15.16)$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на T і спрямуємо T до нескінченності:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{S}_T(\omega)|^2}{T} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (15.17)$$

Якщо вважати даний процес ергодичним, то в лівій частині останньої рівності знаходиться кореляційна функція випадкового процесу, отримана шляхом усереднення за часом. У правій частині під інтегралом міститься вираз для спектральної щільності потужності випадкового процесу. З урахуванням цього записуємо:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (15.18)$$

У разі неергодичного процесу до обох частин рівності необхідно додатково застосувати усереднення по ансамблю реалізацій, що призведе до того ж самого результату.

Таким чином, кореляційна функція випадкового процесу та його спектральна щільність потужності пов'язані один з одним перетворенням Фур'є. Це співвідношення (15.18) носить назву *теорема Вінера-Хінчина*.

Оскільки й $B(\tau)$ й $W(\omega)$ є парними дійсними функціями, то можна відмовитися від комплексної форми запису перетворення Фур'є і перейти до напівнескінчених меж інтегрування:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \\ W(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \end{aligned} \tag{15.19}$$

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Чому знання одновимірної щільності ймовірності недостатньо для опису поведінки випадкового процесу в часі?
2. Запишіть математичний вираз, який визначає кореляційну функцію випадкового сигналу.
3. Реалізація випадкової величини – це детермінована або випадкова функція?
4. Кореляційна функція випадкового сигналу – широка, убиває повільно і наближається до нуля при великих значеннях τ , якщо: а) сигнал швидко змінюється, або б) сигнал повільно змінюється?
5. Який вигляд кореляційної функції свідчить про те, що випадковий сигнал має деякі періодичні закономірності?
6. Який сигнал називається «білим шумом»?
7. Якою відомою функцією можна представити кореляційну функцію сигналу типу «білий шум»?
8. Який вигляд має кореляційна функція сигналу, який не змінюється в часі?
9. Спектральні характеристики випадкового сигналу отримуються на основі амплітуди, квадрата амплітуди або куба амплітуди сигналу?
10. Як називається функція, яка представляє спектральні характеристики випадкового сигналу?
11. У чому полягає принципова відмінність спектральної характеристики детермінованого сигналу від спектральної характеристики випадкового сигналу?
12. Чому спектральна характеристика випадкового сигналу відображає потужність, а не енергію сигналу?
13. Чому кореляційна функція випадкового сигналу відображає потужність, а не енергію сигналу?
14. Який випадковий процес називають стаціонарним?
15. Наведіть властивості кореляційної функції стаціонарного випадкового сигналу.
16. Який випадковий процес називають ергодичним?
17. Яка умова є достатньою умовою ергодичності випадкового процесу?
18. Ергодичний випадковий процес є стаціонарним чи ні?
19. Запишіть формулу, яка виражає теорему Вінера-Хінчина.

Рівень курсу

1. Кореляційні функції випадкових сигналів.
2. Спектральні характеристики випадкових сигналів.
3. Стационарні випадкові процеси. Ергодичні випадкові процеси.
4. Теорема Вінера-Хинчина.

ЛЕКЦІЯ № 16

Тема: Загальні відомості про модуляцію і демодуляцію. Амплітудна модуляція

Зміст

Модуляція сигналів. Основні поняття	2
Амплітудна модуляція.....	3
Однотонава АМ.....	4
Спектр АМ-сигналу в загальному випадку	7
Демодуляція АМ	8
Діодний детектор	8
Синхронне детектування.....	10
Контрольні питання за темою.....	12
Рівень модуля	12
Рівень курсу	12

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей // Е. С. Вентцель – М. : Наука, 1969. – 576 с.

Модуляція сигналів. Основні поняття

Процес створення систем передачі інформації характеризується наступними основними проблемами. По-перше, в більшості випадків спектр сигналу, який підлягає передачі, зосереджено на частотах, які наявний канал зв'язку погано пропускає. По-друге, в одному і тому ж каналі зв'язку частіше за все необхідно передавати декілька сигналів одночасно. Одним із способів вирішення цього завдання є використання так званого *частотного поділу* каналів, коли різні сигнали розміщують у різних смугах частот, й ці смуги не перекриваються.

Крім того, у багатьох випадках потрібно, щоби сигнал, який передається, був би вузькосмуговим. Це означає, що ширина спектру сигналу має бути набагато менше його центральної частоти:

$$\Delta f \ll f_0 \quad (16.1)$$

Перераховані фактори призводять до необхідності такої трансформації сигналу на вході системи передачі інформації, щоби вимоги, які пред'являються до займаної сигналом смуги частот, були виконані, а сам сигнал на виході можна було б відновити.

Рішення зазначеної проблеми досягається за рахунок використання *модуляції*, суть якої полягає в наступному. Формується деяке коливання (найчастіше гармонійне), зване *опорним коливанням* або просто *опорне*, і один з параметрів цього коливання змінюється в часі пропорційно до вихідного сигналу. Первинний інформаційний сигнал називають *модулюючим*, а результуюче коливання зі змінними в часі параметрами – *модульованим* сигналом. Зворотний процес, а саме виділення модулюючого сигналу з модульованого коливання, називається *демодуляцією* або детектуванням.

Запишемо гармонійний сигнал загального вигляду:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (16.2)$$

У цього сигналу є три параметри: амплітуда A , частота ω_0 та початкова фаза φ_0 . Кожен з них можна зв'язати з інформаційний сигналом, отримавши таким чином три основних види модуляції: амплітудну, частотну та фазову. Частотна і фазова модуляція дуже тісно взаємопов'язані, оскільки обидва вони впливають на аргумент функції \cos . Тому ці два види модуляції мають загальну назву – *кутова* модуляція.

Амплітудна модуляція

Як впливає з назви, за амплітудної модуляції (АМ) амплітуда опорного коливання змінюється відповідно до модулюючого сигналу:

$$s_{AM}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (16.3)$$

Однак, якщо амплітуду $A(t)$ просто зробити прямо пропорційною модулюючому сигналу, то можливо виникнення наступної проблеми. Як правило, інформаційний сигнал, який модулює, є двополярним (знакозмінним). Розглянемо, наприклад, такий сигнал (рис. 16.1, зверху):

$$s_M(t) = 3 \cos(2\pi t) - \sin(6\pi t + \pi/4) \quad (16.4)$$

Якщо ми безпосередньо використаємо його в якості амплітудної функції $A(t)$, то вийде наступне (рис. 16.1, знизу):

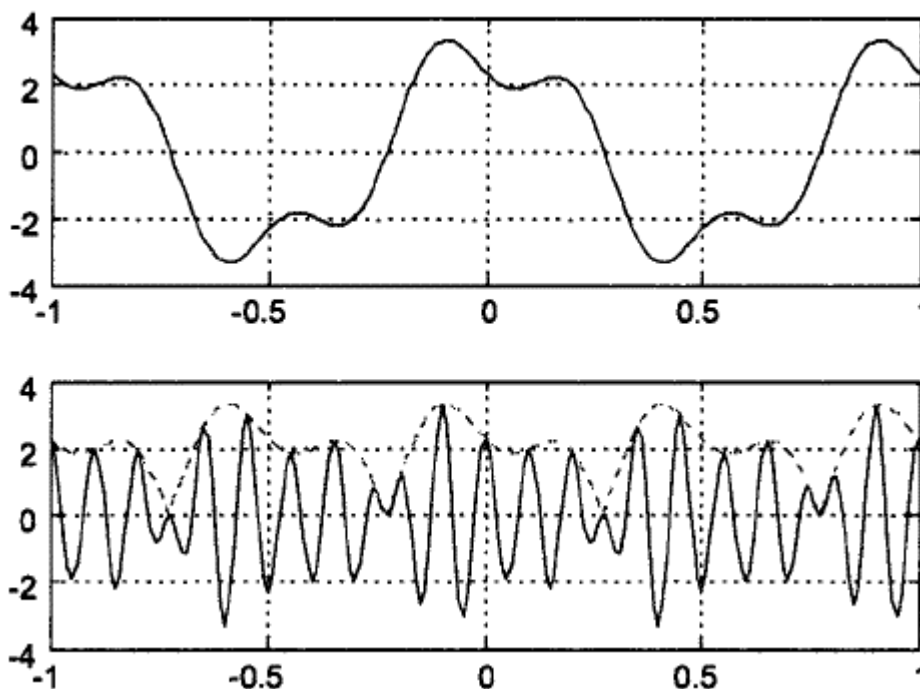


Рис. 16.1. Множення двополярного модулюючого сигналу на опорне коливання дає неправильну амплітудну обвідна (знизу)

З нижнього графіку на рис. 16.1 видно, що амплітудна обвідна, яка буде виділена в процесі демодуляції, в даному випадку виявляється неправильної форми – вона відповідає модулю вихідного сигналу.

Тому при реалізації АМ до модулюючого сигналу попередньо додають постійну складову, щоб зробити його однополярним:

$$A(t) = A_0 + s_M(t) \quad (16.5)$$

Для нашого прикладу досить буде постійною складової, яка дорівнює чотирьом (рис. 16.2), оскільки максимальне значення даного модулюючого сигналу не перевищує 4-х одиниць:

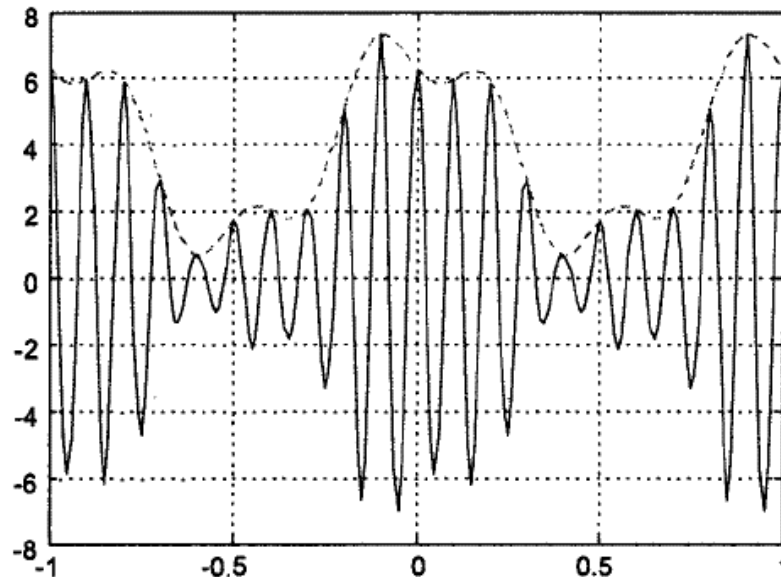


Рис. 16.2. Додавання постійної складової робить модулюючий сигнал однополярним

Тепер форма амплітудної обвідної відповідає модулюючому сигналу з точністю до постійної складової, яка легко може бути видалена після демодуляції.

Отже, остаточно можна записати АМ-сигнал в наступному вигляді:

$$s_{AM}(t) = (A_0 + s_M(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (16.6)$$

Однотонова АМ

Для розуміння суті амплітудної модуляції і спектральної структури АМ-сигналу корисно докладніше розглянути окремий випадок, коли модулюючий сигнал є гармонійним:

$$s_M(t) = A_M \cos(\Omega t + \Phi_0) \quad (16.7)$$

Тоді промодульований АМ-сигнал буде мати вигляд:

$$s_{AM}(t) = (A_0 + A_M \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (16.8)$$

Відношення між амплітудами модулюючого сигналу A_M і опорного коливання A_0 називається *коефіцієнтом модуляції* або *глибиною модуляції*.

$$m = \frac{A_M}{A_0} \quad (16.9)$$

З урахуванням цього можна записати

$$s_{AM}(t) = A_0 (1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (16.10)$$

На рис. 16.3 показано вид однононогого АМ-сигналу для різних значень коефіцієнта модуляції.

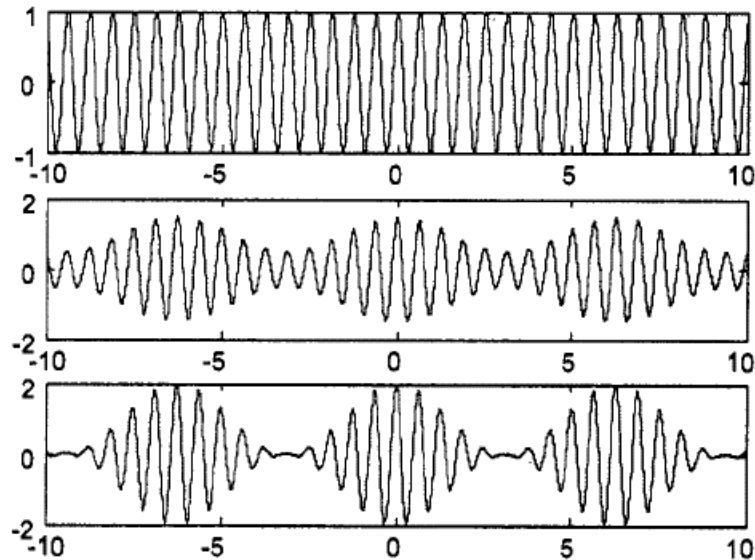


Рис. 16.3. Одноногий АМ-сигнал: зверху $m = 0$ (немодульоване опорне), в центрі $m = 0.5$, знизу $m = 1$

Вочевидь, максимальне значення обвідної однононогого АМ-сигналу досягається тоді, коли обидва косинуса рівні 1:

$$A_{\max} = A(1 + m) \quad (16.11)$$

Мінімальне значення обвідної відповідає тим моментам часу, коли косинус модулюючого сигналу дорівнює -1:

$$A_{\min} = A(1 - m) \quad (16.12)$$

Звідси випливає формула, що дозволяє обчислити коефіцієнт модуляції m за результатами вимірювання (наприклад, за допомогою осцилографа) максимальної і мінімальної амплітуд сигналу:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \quad (16.13)$$

Зазвичай коефіцієнт модуляції повинен лежати в діапазоні 0...1. Коли $m > 1$, тоді має місце так звана *надмодуляція*; підстановка таких значень в наведену формулу дає результат, показаний на рис. 16.4.

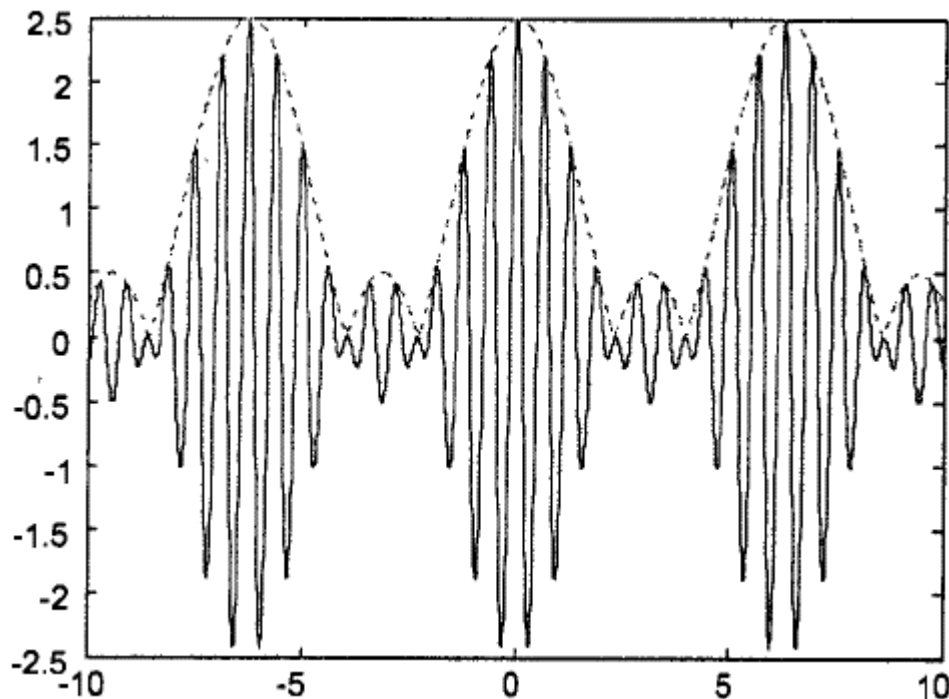


Рис. 16.4. Однотоновий АМ-сигнал у випадку надмодуляції ($m=1.5$)

Як уже зазначалося, амплітудна обвідна при надмодуляції спотворюється. Однак цей режим також застосовується на практиці.

Тепер проведемо аналіз спектрального складу такого коливання. Для цього спочатку розкриємо дужки у виразі для однотонального АМ-сигналу (16.10), а потім виконаємо тригонометричні перетворення:

$$\begin{aligned}
 s_{AM}(t) &= s_{AM}(t) = A_0 (1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\
 &= A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A_0 m \cos(\Omega t + \Phi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\
 &= A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{A_0 m}{2} \cos((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0) + \frac{A_0 m}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0)
 \end{aligned} \tag{16.14}$$

Результат перетворення показує, що однотоновий АМ-сигнал складається з трьох гармонійних складових, одна з яких представляє собою опорне коливання з частотою ω_0 , а дві інші (їх називають бічними частотами) рознесені від опорного коливання по частоті вгору і вниз на величину Ω . Амплітуда опорного коливання дорівнює A_0 , і вона не залежить від рівня модулюючого сигналу. Амплітуди бічних частот, які дорівнюють $A_0 m/2$, навпаки, пропорційні коефіцієнту модуляції.

Для верхньої бічної частоти початкові фази опорного та модулюючого сигналу складаються, а для нижньої – віднімаються.

Амплітудний і фазовий спектри однотонального АМ-сигналу зображено на рис. 16.5.

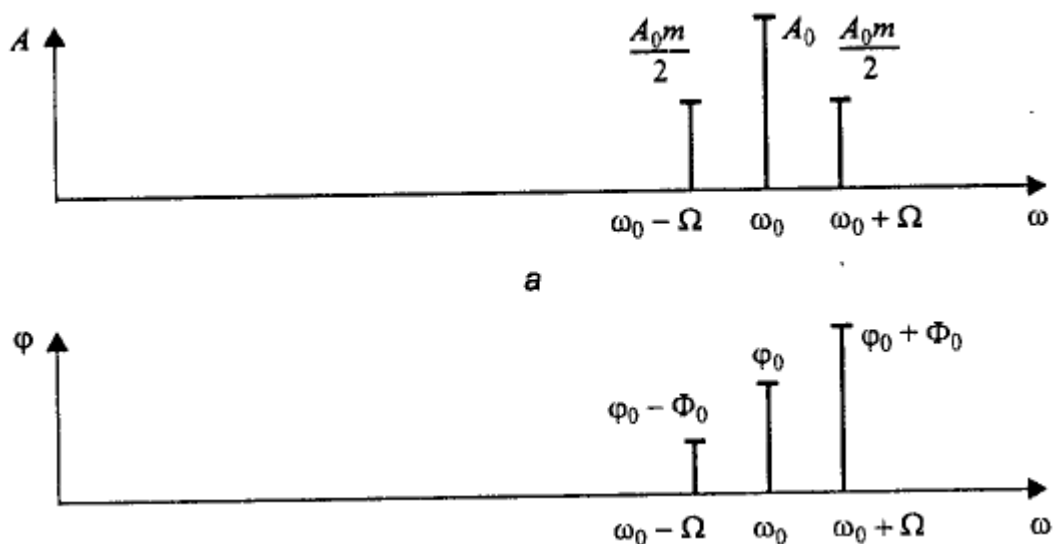


Рис. 16.5. Амплітудний (а) та фазовий (б) спектри однотонового АМ-сигналу

З графіків видно, що ширина спектру однотонового АМ-сигналу в два рази перевищує частоту модулюючого сигналу.

$$\Delta\omega = 2\Omega \quad (16.15)$$

Спектр АМ-сигналу в загальному випадку

Формула (8.9), яка зв'язує спектр АМ-сигналу зі спектром модулюючого сигналу вже була свого часу розглянута нами в лекції 8, коли ми розглядали властивості перетворення Фур'є та зокрема множення сигналу на гармонійну функцію. Дійсно, адже АМ-сигнал – це і є результат множення модулюючого сигналу (з доданою постійною складовою) на гармонійне опорне коливання.

Спектр АМ-сигналу, як ми бачили в лекції №8 (формула 8.9) можна записати в такий спосіб:

$$\dot{S}_{AM}(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \dot{S}_M(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \dot{S}_M(\omega + \omega_0) \quad (16.16)$$

Спектр обвідної $A(t)$ в разі амплітудної модуляції зсувається в область опорної частоти $\pm \omega_0$, «роздвоюючись» і одночасно зменшуючись в два рази за рівнем. Покажемо це на графіку, задавши якусь функцію для спектра обвідної (рис. 16.6).

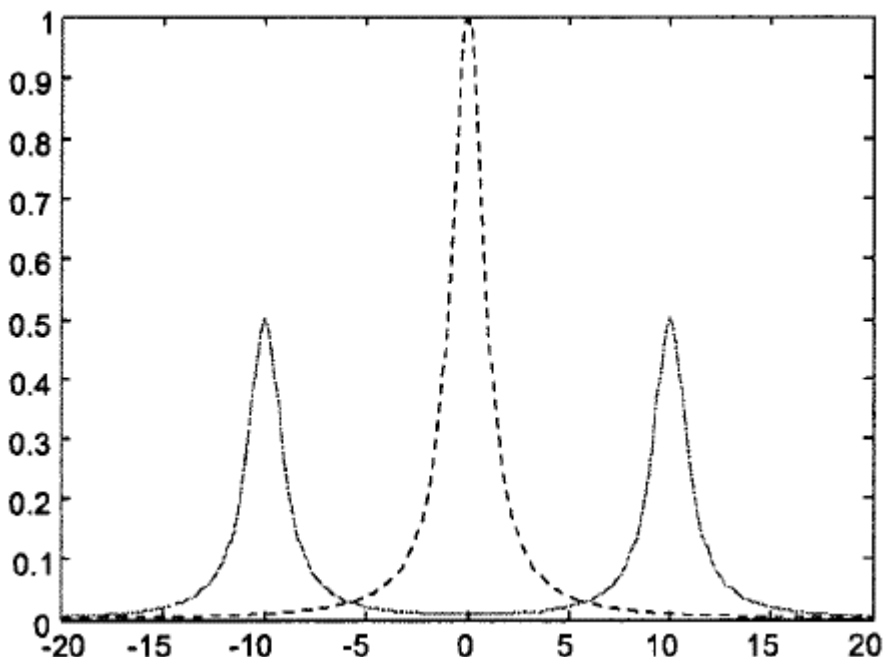


Рис. 16.6. Спектри обвідної (пунктирна лінія) і АМ-сигналу (суцільна лінія)

Отже, спектр АМ-сигналу в загальному випадку містить опорну частоту (рівень якої визначається постійною складовою обвідної), а також *верхню* і *нижню* бічні смуги.

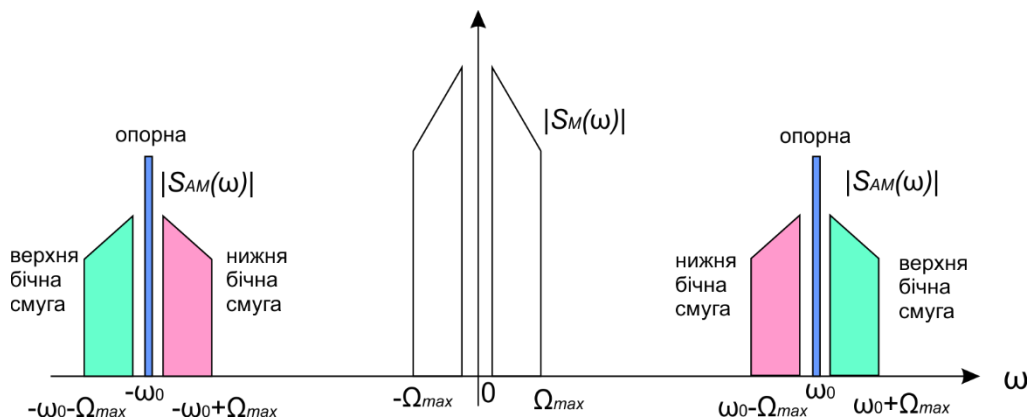


Рис 16.7 Спектр АМ-сигналу в загальному випадку

З графіків видно, що ширина спектра АМ-сигналу вдвічі більше максимальної (граничної) частоти модулюючого сигналу:

$$\Delta\omega = 2\Omega_{\max} \tag{16.17}$$

Демодуляція АМ

Діодний детектор

Демодуляція АМ-сигналу може бути виконана кількома способами. Найпростіший шлях – це використання напівперіодного діодного детектора (рис. 16.8)

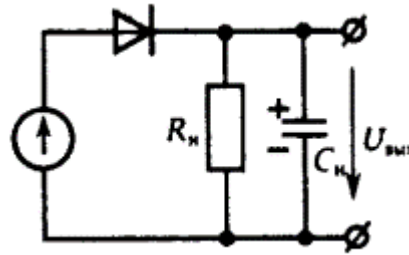


Рис. 16.8 Напівперіодний діодний детектор

Такий детектор утворюється послідовним з'єднанням діода і паралельного RC-кола, яке виконує роль частотного фільтру.

Більш ефективним є застосування двонапівперіодного детектора, схема якого виглядає наступним чином (рис. 16.9):

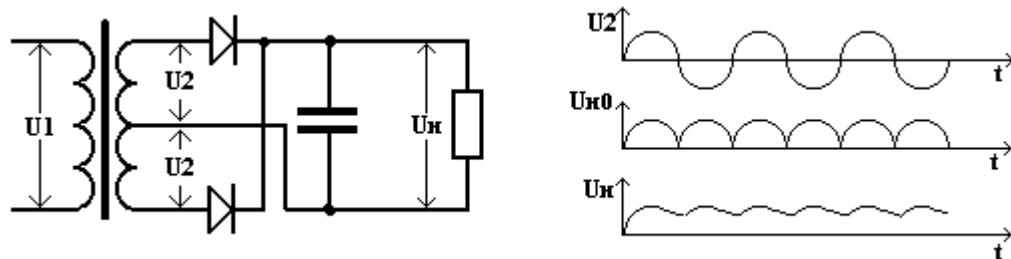


Рис. 16.9 Двонапівперіодний діодний детектор

Математично робота двонапівперіодного детектора виглядає наступним чином. Розраховується модуль вхідного АМ-сигналу, а потім проводиться згладжування отриманих однополярних косинусоїдальних імпульсів шляхом пропускання їх через фільтр низької частоти (ФНЧ) (рис. 16.10):

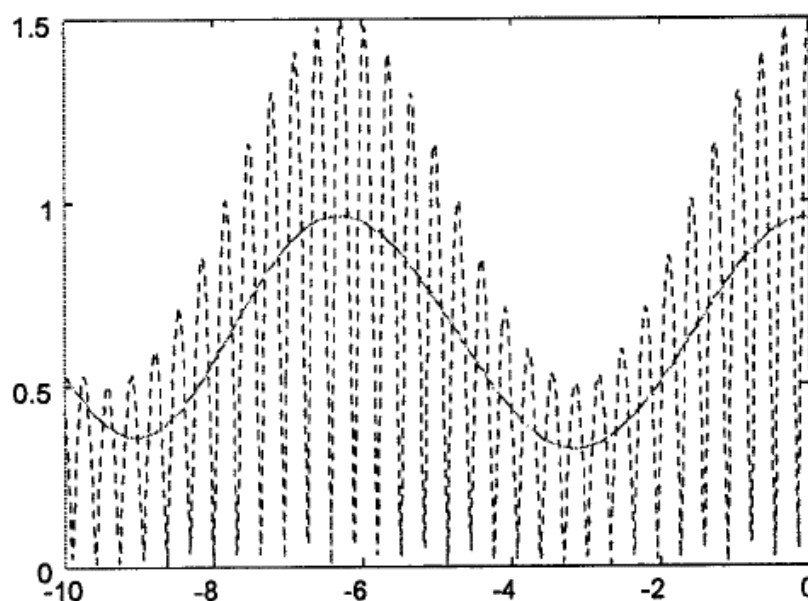


Рис. 16.10. Двонапівперіодне детектування АМ-сигналу: однополярні імпульси (пунктирна лінія) і результат їх згладжування (суцільна лінія)

Даний спосіб, очевидно, не працюватиме правильно в разі надмодуляції.

Синхронне детектування

Наступний метод – це так зване *синхронне* детектування, суть якого полягає в множенні модульованого сигналу на гармонійне коливання, частота якого абсолютно точно дорівнює опорній частоті цього сигналу:

$$\begin{aligned} y(t) &= s_{AM}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2} A(t) + \frac{1}{2} A(t) \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0) \end{aligned} \quad (16.18)$$

Результат множення містить дві складові. Перша – це шукана амплітудна функція, друга – АМ-сигнал з частотою $2\omega_0$. Цей високочастотний сигнал легко видаляється шляхом пропускання сигналу через фільтр низької частоти (ФНЧ) (рис. 16.11):

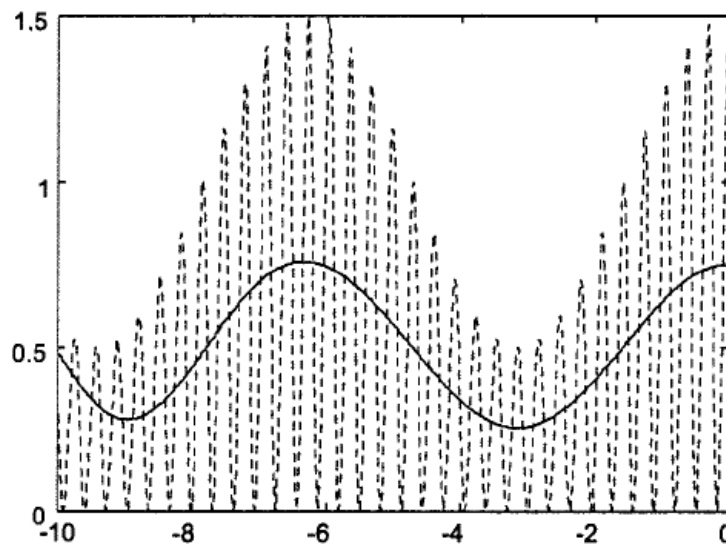


Рис. 16.11. Синхронне детектування АМ-сигналу: результат множення на опорне коливання (пунктирна лінія) і виділений низькочастотний сигнал (суцільна лінія)

Однак в даному випадку необхідно дуже точний збіг початкових фаз і частот опорного коливання демодулятора і опорного коливання АМ-сигналу. При збігу частот, але розбіжності початкових фаз вихідний низькочастотний сигнал виявляється помноженим на косинус фазової помилки:

$$\begin{aligned} y(t) &= s_{AM}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} A(t) \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} A(t) \cos(2\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi) \end{aligned} \quad (16.19)$$

Таким чином, при наявності фазової помилки рівень корисного сигналу на виході демодулятора падає, а при помилці, що дорівнює 90° , взагалі стає рівним нулю.

При наявності частотного зсуву між опорними коливаннями ситуація стає ще гірше – вихідний низькочастотний сигнал виявляється помноженим на гармонійне коливання з різницевою частотою $\Delta\omega$. В результаті вихідний сигнал буде пульсувати з частотою $\Delta\omega$. Це явище називається *биттям*, а різниця частот $\Delta\omega$ – *частотою биття*.

Для підтримки частотної та фазової синхронізації використовуються слідкуюча системи фазового автопідстроювання частоти (ФАПЧ).

Перевагою синхронного детектування є те, що воно дозволяє правильно проводити демодуляцію сигналу навіть у випадку надмодуляції.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Які три основні види модуляції вам відомі?
2. Які види модуляції об'єднані під загальною назвою «кутова модуляція»?
3. Що являє собою амплітудна модуляція?
4. Навіщо в разі амплітудної модуляції до модулюючого сигналу попередньо додають постійну складову?
5. Що називають коефіцієнтом модуляції?
6. Яке інша назва використовується замість терміну «коефіцієнт модуляції»?
7. Як з використанням осцилографа визначити величину коефіцієнта модуляції?
8. Що таке надмодуляція?
9. Зі скількох гармонік складається однотоновий амплітудно-модульований сигнал? Як пов'язані між собою ці гармоніки по частоті?
10. Ширина спектру амплітудно-модульованого сигналу:
 - a) дорівнює ширині спектра модулюючого сигналу?
 - b) вдвічі менше ширини спектра модулюючого сигналу?
 - c) вдвічі більше ширини спектра модулюючого сигналу?
 - d) в чотири рази більше ширини спектра модулюючого сигналу?
11. Як називається електрична схема, яка використовується для демодуляції сигналу?
12. Як з математичної точки зору виглядає демодуляція АМ-сигналу двонапівперіодним детектором?
13. У чому полягає синхронне детектування?
14. До яких наслідків призводить наявність фазової помилки при виконанні синхронного детектування?
15. Як називається явище, яке спостерігається при синхронному детектуванні в разі розбіжності частот опорних коливальних елементів?

Рівень курсу

1. Модуляція сигналів. Основні поняття.
2. Амплітудна модуляція.
3. Однотонова амплітудна модуляція.
4. Спектр амплітудно-модульованого сигналу в загальному випадку.
5. Демодуляція амплітудно-модульованого сигналу: діодний детектор.
6. Демодуляція амплітудно-модульованого сигналу: синхронне детектування.

ЛЕКЦІЯ № 17**Тема:** Різновиди амплітудної модуляції**Зміст**

Різновиди амплітудної модуляції.....	2
АМ з пригніченою опорною	2
Односмугова модуляція	3
Полярна модуляція	6
Контрольні питання за темою.....	10
Рівень модуля	10
Рівень курсу	10

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Різновиди амплітудної модуляції

Спроби поліпшити характеристики АМ привели до розробки декількох модифікацій амплітудної модуляції, які і будуть розглянуті в даному розділі.

АМ з пригніченою опорною

Перший спосіб полягає в тому, що опорне коливання, яке не несе ніякої інформації, видаляється за рахунок відмови від додавання постійної складової до моделюючого сигналу. Такий спосіб називається АМ з пригніченою опорною (англійський термін – amplitude modulation with suppressed carrier, AM-SC):

$$s(t) = s_M(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (17.1)$$

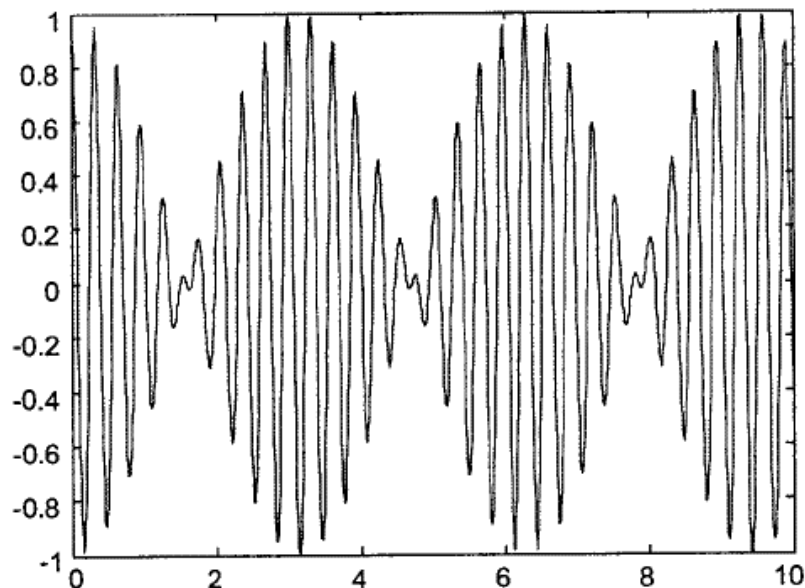


Рис. 17.1. Одноносова АМ з пригніченою опорною

Побудуємо графік такого сигналу для випадку однонової модуляції (рис. 17.1). Енергетичний виграш в цьому разі досить великий.

Ширина спектра АМ-сигналу з пригніченою опорною така ж, як у випадку звичайної АМ (адже пригнічена лише середня (опорна) частота, а бічні частоти залишилися на місці).

Таким чином, АМ з пригніченою опорною має певні переваги в порівнянні зі звичайною АМ. Однак цей спосіб модуляції не отримав широкого поширення, і пов'язано це з проблемами, що виникають під час демодуляції сигналу.

Як було зазначено в розділі «Демодуляція АМ» попередньої лекції, формула синхронного детектування справедлива як для однополярної, так і для знакозмінної амплітудної функції $s(t)$. Тому демодуляція АМ з пригніченою опорною може виконуватися шляхом синхронного детектування.

Проте зберігає силу все сказане про необхідність точної відповідності частоти і початкової фази коливання детектора частоті та початковій фазі опорного коливання сигналу.

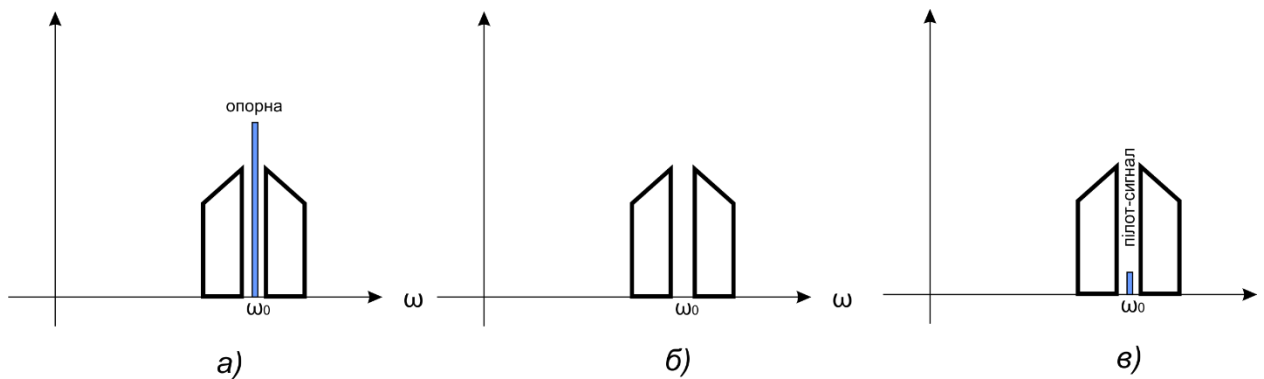


Рис. 17.2. Спектри АМ-сигналів: а) звичайна АМ
б) АМ з повністю пригніченою опорною в) АМ з пілот-сигналом

Для полегшення правильного відновлення опорної іноді застосовують наступний прийом. На передавальній стороні опорне коливання пригнічується не повністю. Його «залишок» з невеликою амплітудою (він називається пілот-сигналом) використовують для синхронізації частоти і фази опорного коливання на приймальній стороні.

Односмугова модуляція

Розглянута в попередньому розділі амплітудна модуляція з пригніченою опорною має перевагу перед звичайною АМ тільки в енергетичному сенсі – завдяки усуненню опорного коливання. Ширина ж спектру в цьому випадку залишається рівною подвоєній частоті модулюючого сигналу. Можна сказати, що ця модуляція залишається *двосмуговою*, оскільки в спектрі модульованого АМ-сигналу присутні дві бічні смуги: верхня та нижня. Втім, можна легко помітити, що спектри двох бічних смуг АМ-сигналу є дзеркальним відображенням один одного, тобто вони несуть одну і ту ж інформацію, оскільки кожна з них відповідає одному й тому ж самому низькочастотному спектру модулюючого сигналу. Виходячи з цього можна прийти до висновку, що одну з бічних смуг можна видалити. Якщо саме так і зробити, то ми отримуємо новий різновид амплітудної модуляції, який називається *односмуговою модуляцією* (англійський термін - single side band, SSB).

Залежно від того, яка бічна смуга зберігається, говорять про односмугову модуляцію з використанням верхньої або односмугову модуляцію з використанням нижньої бічної смуги. Формування односмугового сигналу найпростіше пояснити, якщо навести кілька спектральних графіків (рис. 17.3). Нагадаємо, що опорна частота в такому

сигналі – пригнічена, ніяка потужність на частоті опорного коливання не випромінюється.

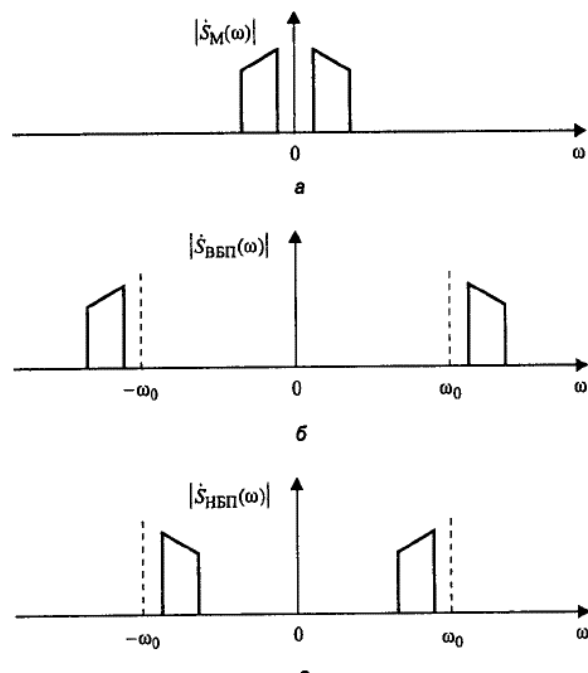


Рис. 17.3. Односмугова модуляція: *а* – спектр модулюючого сигналу, *б* – спектр односмугового сигналу з верхньою бічною смугою, *в* – спектр односмугового сигналу з нижньої бічної смугою

По суті, за односмугової модуляції відбувається просто зміщення спектра сигналу з області низьких частот в область частот навколо частоти опорного коливання. На відміну від звичайної АМ кожна «половинка» спектра модулюючого сигналу зміщується в своєму напрямку; область позитивних частот - до $+\omega_0$, а область негативних частот – до $-\omega_0$.

Ясно, що ширина спектра односмугового сигналу дорівнює ширині спектра модулюючого сигналу. Таким чином, спектр односмугового сигналу виявляється в два рази вужче, ніж за звичайної АМ.

Амплітудна обвідна односмугового сигналу зовсім не схожа на модулюючий низькочастотний сигнал. Покажемо це на прикладі модулюючого сигналу, який складається з двох гармонік (рис. 17.4):

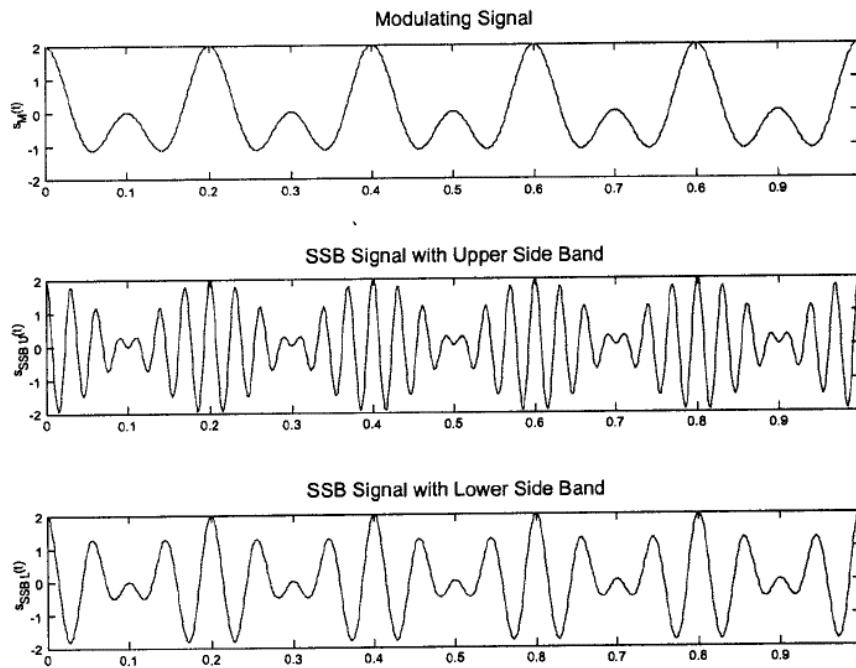


Рис. 17.4. Односмугова модуляція: зверху – модулюючий сигнал, в центрі – АМ-сигнал з верхньою бічною смугою, знизу – АМ-сигнал з нижньою бічною смугою

Односмугова модуляція з різним рівнем опорного коливання: від повного пригнічення до повного збереження, – знайшла широке застосування в техніці професійного радіозв'язку.

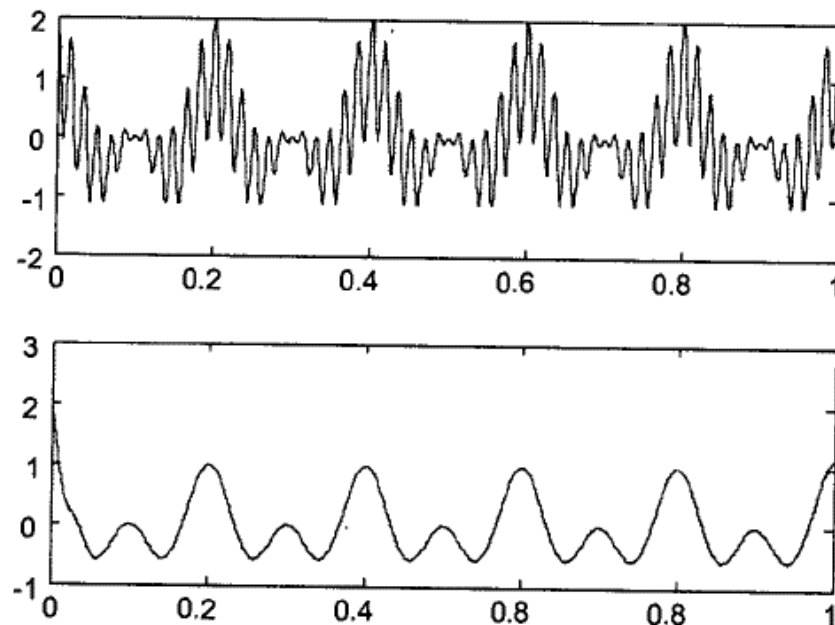


Рис. 17.5. Демодуляція односмугового сигналу, показаного на рис. 17.4: зверху – результат множення на опорне коливання, знизу - відфільтрований демодульований сигнал

Незважаючи на те, що візуально (на графіку) односмуговий сигнал значно відрізняється від звичайного АМ-сигналу, його демодуляція можлива тим самим методом синхронного детектування – шляхом множення на опорне коливання. Результат множення (рис. 17.5, зверху) містить дві складові. Перша – це модулюючий сигнал, друга – односмуговий сигнал на подвоєній опорній частоті $2\omega_0$. Залишається лише виділити модулюючий сигнал за допомогою фільтру низьких частот (рис. 17.5, знизу).

Полярна модуляція

Те, що ми розглянемо в цьому розділі, не є окремим видом модуляції. Це скоріше демонстрація застосування амплітудної модуляції для вирішення конкретної технічної задачі. Йтиметься про те, як реалізується стереофонічне радіомовлення в УКХ-діапазоні (ультракороткохвильовому діапазоні).

Для здійснення стерео необхідно передавати два сигнали $s_L(t)$ і $s_R(t)$ (лівого і правого каналів) одночасно. Проте, під час розробки системи такого мовлення накладається ще й вимога сумісності з уже наявними монофонічними приймачами. Тому для стерео модифікується низькочастотний модулюючий сигнал, який надходить на вхід модулятора радіопередавача (в передавачі використовується кутова модуляція, яка буде розглянута далі). Низькочастотна складова модулюючого сигналу, що лежить в звуковому діапазоні, для сумісності з монофонічними приймачами повинна являти собою монофонічний сигнал (моносигнал), тобто суму сигналів лівого і правого каналів:

$$s_{\text{MONO}}(t) = s_L(t) + s_R(t) \quad (17.2)$$

В області більш високих (ультразвукових) частот модулюючого сигналу за допомогою амплітудної модуляції передається додатковий сигнал, що дозволяє згодом виділити з отриманої суміші сигнали $s_L(t)$ і $s_R(t)$ окремо. Оскільки монофонічний сигнал – це сума двох каналів, цим додатковим компонентом, що дозволяє відновити вихідні сигнали двох каналів, природно вибрати їх різницю:

$$s_{\text{DIFF}}(t) = s_L(t) - s_R(t) \quad (17.3)$$

Розглянемо конкретний приклад, задавши для правого і лівого каналів гармонійні сигнали різних частот:

$$\begin{aligned} s_L(t) &= A_L \cos(\Omega_L t), \\ s_R(t) &= A_R \cos(\Omega_R t) \end{aligned} \quad (17.4)$$

Графіки сигналів $s_L(t)$, $s_R(t)$, $s_{mono}(t)$ та $s_{diff}(t)$ для даного випадку показані на рис. 17.6.

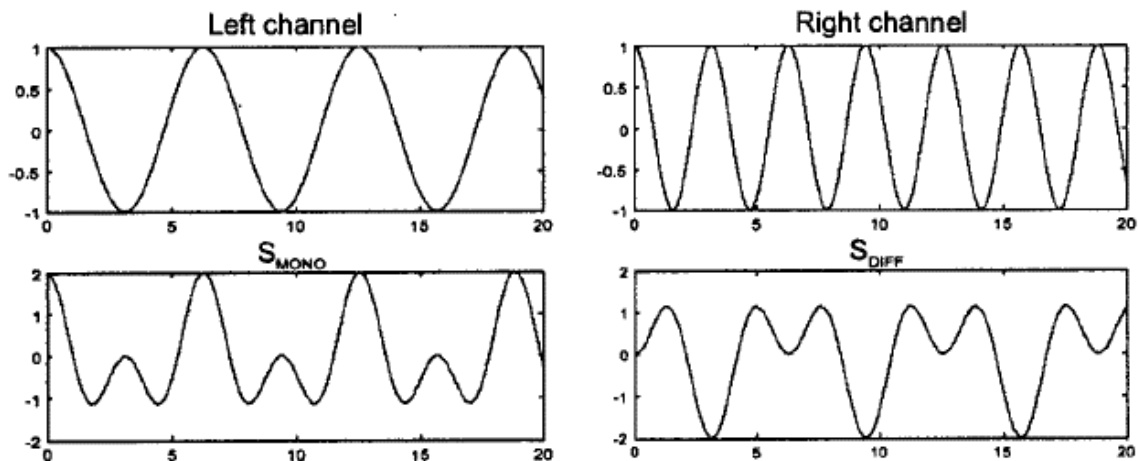


Рис. 17.6. Зверху: сигнали лівого і правого каналів, знизу: сумарний і різницевий сигнали

Складаючи і віднімаючи сигнали $s_{mono}(t)$ і $s_{diff}(t)$ можна відновити сигнали лівого і правого каналів:

$$s_L(t) = \frac{s_{MONO}(t) + s_{DIFF}(t)}{2} \quad (17.5)$$

$$s_R(t) = \frac{s_{MONO}(t) - s_{DIFF}(t)}{2}$$

Моносигнал, як вже було сказано, для сумісності повинен передаватися як є, а різницевий сигнал модулює опорну частоту, розташовану трохи вище звукового діапазону частот (її називають *підопорна* (subcarrier), оскільки весь сигнал, про формування якого йде мова, потім використовується для кутової модуляції опорного колювання радіопередавача):

$$s(t) = s_{MONO}(t) + (A_0 + s_{DIFF}(t)) \cos(\omega_0 t) \quad (17.6)$$

Побудуємо графік сигналу, який в результаті цього виходить (рис. 17.7):

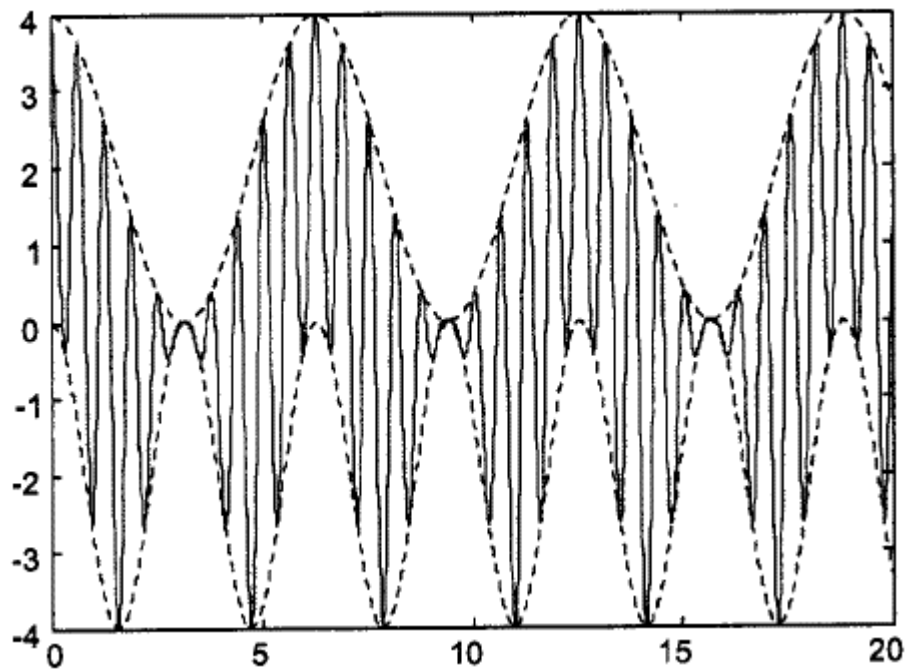


Рис. 17.7 Композитний стереосигнал

Отриманий сигнал (його називають композитним стереосигналом), як видно з малюнка, завдяки наявності низькочастотної складової має цікаву властивість: його верхня і нижня (позитивна і негативна) обвідні – різні. Більш того, кожна з них з точністю до постійної складової відповідає сигналу одного з стереоканалів: верхня (позитивна) обвідна – це лівий канал, а нижня (негативна) – правий. Така структура сигналу дозволяє легко виділити з нього сигнали стереоканалів.

Проте в показаному на рис. 17.7 вигляді сигнал для передачі не використовується. Справа в тому, що через наявність підпорного коливання розмах сигналу (різниця між його максимальним і мінімальним значеннями) сильно збільшується в порівнянні з монофонічним сигналом, що небажано. Тому підпорне коливання частково або повністю пригнічують, так що різницевий сигнал передається в режимі надмодуляції.

Радянський стандарт, згідно з яким ведеться радіомовлення в діапазоні 65-74 МГц, передбачає часткове пригнічення підпорної частоти 31,25 кГц. Зарубіжний стандарт, використовуваний в діапазоні 88-108 МГц, вимагає повне пригнічення підпорної частоти, яка дорівнює 38 кГц. В той же час для забезпечення можливості правильного відновлення підпорного коливання в стереодекодері приймача до складу сигналу вводиться пілот-сигнал на половинній частоті підпорної (19 кГц).

Зобразимо композитний стереосигнал для випадку повного пригнічення підпорної (пілот-сигнал додавати не будемо) (рис. 17.8):

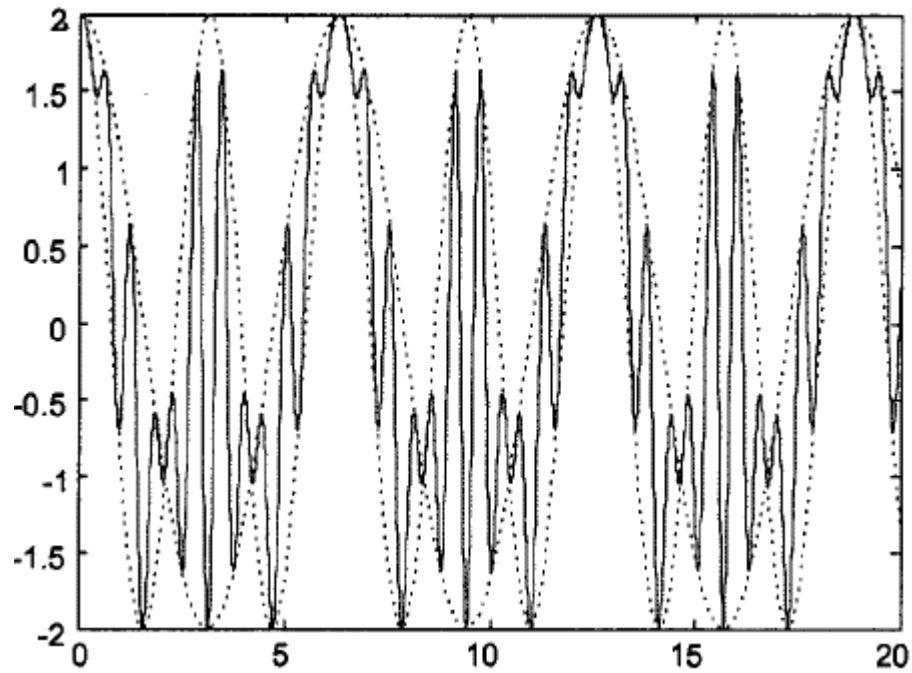


Рис. 17.8. Композитний стереосигнал з пригніченою підпорною
З графіку видно, що завдяки пригніченню підпорної розмах сигналу істотно (в два рази) зменшився.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Назвіть способи амплітудної модуляції, що дозволяють зменшити витрати енергії під час передачі АМ-сигналу.
2. У чому полягає амплітудна модуляція з пригніченою опорною?
3. Які переваги АМ з пригніченою опорною в порівнянні зі звичайною АМ?
4. Яким чином проводиться демодуляція АМ-сигналу з пригніченою опорною?
5. Що таке "пілот-сигнал"?
6. Яка ширина спектра АМ-сигналу з пригніченою опорною в порівнянні зі звичайною АМ?
7. Яка ширина спектра АМ-сигналу з односмуговою модуляцією в порівнянні зі звичайною АМ?
8. У чому полягає амплітудна модуляція з односмуговою модуляцією?
9. Які переваги АМ з односмуговою модуляцією в порівнянні зі звичайною АМ?
10. Яку зі смуг: верхньої або нижню, – використовують для амплітудної модуляції з односмуговою модуляцією?
11. Яким чином проводиться демодуляція АМ-сигналу з односмуговою модуляцією?

Рівень курсу

1. Амплітудна модуляція з пригніченою опорною.
2. Односмугова амплітудна модуляція.

ЛЕКЦІЯ № 18

Тема: Кутова модуляція. Основні параметри.

Зміст

Кутова модуляція	2
Фазова модуляція	2
Частотна модуляція.....	3
Гармонійна кутова модуляція.....	4
Контрольні питання за темою.....	7
Рівень модуля	7
Рівень курсу	7

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Кутова модуляція

У попередній лекції вже було сказано, що фазова і частотна модуляція тісно пов'язані між собою, завдяки чому і отримали загальну назву «кутова модуляція» (КМ; англійський термін - *angle modulation*). В цій лекції ми розглянемо детально, в чому полягає подібність та відмінність цих двох видів модуляції.

Назви двох розглянутих видів модуляції (фазова і частотна модуляція), як і в випадку з АМ, вказують на параметр опорного коливання, який лінійно пов'язаний з модулюючим сигналом.

Фазова модуляція

Нехай модулюючий сигнал задає початкову фазу опорного коливання:

$$\varphi(t) = ks_M(t) \quad (18.1)$$

Тоді ми отримуємо сигнал з фазовою модуляцією (ФМ; англійський термін *phase modulation*, РМ):

$$s_{\varphi M}(t) = A \cos(\omega_0 t + ks_M(t)) \quad (18.2)$$

Увесь аргумент функції *cos*, взятий цілком, називається повною фазою коливання:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + ks_M(t) \quad (18.3)$$

Кругова частота коливання за своїм визначенням являє собою швидкість зміни початкової фази. Подібно до того, як у випадку нерівномірного руху вводиться поняття миттєвої швидкості (яка дорівнює похідній від координати за часом), для коливань з кутовою модуляцією вводиться поняття миттєвої частоти (*instantaneous frequency*), що дорівнює похідній від повної фази по часу:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi}{dt} = \omega_0 + k \frac{ds_M}{dt} \quad (18.4)$$

Отже, в разі фазової модуляції змінюється не тільки початкова фаза, але і миттєва частота коливання.

Відповідно, повна фаза може бути знайдена шляхом інтегрування миттєвої частоти:

$$\Psi(t) = \int \omega(t) dt \quad (18.5)$$

Частотна модуляція

Тепер ми можемо ввести поняття частотної модуляції (ЧМ; англійською термін – *frequency modulation*, FM), за якої миттєву частоту коливання лінійно пов'язують з модулюючим сигналом:

$$\omega(t) = \omega_0 + k s_M(t) \quad (18.6)$$

Добавка у вигляді константи ω_0 необхідна для того, щоб зробити коливання високочастотним.

Повна фаза знаходиться, як вже було вказано (18.5), шляхом інтегрування миттєвої частоти:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + k \int s_M(t) dt + \varphi_0 \quad (18.7)$$

Тут φ_0 – довільна стала інтегрування.

Нарешті, сам ЧС-сигнал має наступний вигляд:

$$s_{ЧМ}(t) = A \cos(\omega_0 t + k \int s_M(t) dt + \varphi_0) \quad (18.8)$$

Як бачимо, початкова фаза коливання за частотної модуляції зазнає змін, які є пропорційними до інтегралу від модулюючого сигналу.

$$\varphi(t) = k \int s_M(t) dt + \varphi_0 \quad (18.9)$$

Таким чином, частотна і фазова модуляції виявляються взаємопов'язаними: якщо змінюється початкова фаза коливання, змінюється і його миттєва частота, і навпаки. З цієї причини два цих види модуляції і об'єднують під загальною назвою «кутова модуляція».

Зі сказаного можна зробити декілька висновків:

1. За формою коливання з кутовою модуляцією неможливо визначити, який саме це вид модуляції: ФМ або ЧС. Для цього необхідно знати ще й модулюючий сигнал.
2. Якщо пропустити модулюючий сигнал через ідеальне диференціювальний пристрій, а потім подати його на частотний модулятор, то вийде фазова модуляція (верхня гілка на рис. 18.1).
3. Якщо пропустити модулюючий сигнал через ідеальний інтегруючий пристрій, а потім подати його на фазовий модулятор, то вийде частотна модуляція (нижня гілка на рис. 18.1).

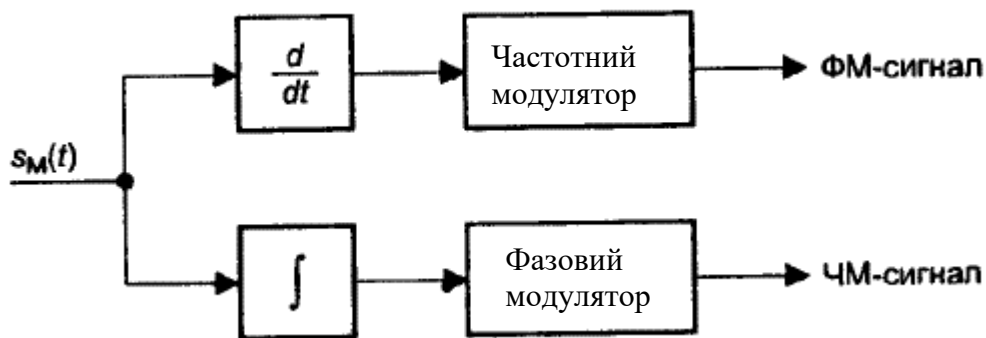


Рис. 18.1. Взаємозв'язок фазової і частотної модуляції

На закінчення даного розділу наведемо зведену таблицю, яка показує, як пов'язані з модулюючим сигналом різні характеристики модульованого колювання в разі фазової та в разі частотної модуляції.

Параметр	ФМ	ЧС
Початкова фаза	$\varphi(t) = ks_M(t)$	$\varphi(t) = k \int s_M(t)dt + \varphi_0$
Повна фаза	$\Psi(t) = \omega_0 t + ks_M(t)$	$\Psi(t) = \omega_0 t + k \int s_M(t)dt + \varphi_0$
Миттєва частота	$\omega(t) = \omega_0 + k \frac{ds_M}{dt}$	$\omega(t) = \omega_0 + ks_M(t)$

Гармонійна кутова модуляція

Тепер так само, як ми це робили для амплітудної модуляції, розглянемо випадок гармонійного модулюючого сигналу. В цьому випадку початкова фаза модулюючого колювання змінюється за гармонійним законом:

$$\varphi(t) = \beta \sin(\Omega t) \tag{18.10}$$

Коефіцієнт β називається індексом кутовий модуляції (*modulation index*). Він визначає інтенсивність колювань початкової фази.

Повну фазу отримуємо шляхом додавання лінійної складової $\omega_0 t$:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \beta \sin(\Omega t) \tag{18.11}$$

Нарешті, сам сигнал з гармонійною КМ:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \beta \sin(\Omega t)) \tag{18.12}$$

Як вже було зазначено раніше, коли змінюється початкова фаза, тоді також змінюється й миттєва частота:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \omega_0 + \beta\Omega \cos(\Omega t) \quad (18.13)$$

В даному випадку миттєва частота змінюється так само за гармонійним законом. Як можна побачити з отриманої формули, її максимальне відхилення від середнього значення ω_0 становить $\beta\Omega$. Ця величина називається девіацією частоти (*frequency deviation*) і позначається ω_d . Таким чином, ми отримали важливу формулу, яка показує, що індекс кутової модуляції дорівнює відношенню девіації частоти до частоти модулюючого сигналу:

$$\beta = \frac{\omega_d}{\Omega} \quad (18.14)$$

Отже, за гармонійної кутової модуляції і початкова фаза, і миттєва частота змінюються за гармонійним законом. Відмінності між частотною та фазовою модуляцією починають проявлятися в разі зміни частоти модулюючого сигналу Ω .

В разі ФМ індекс β є характеристичним параметром модуляції і він від частоти модулюючого сигналу не залежить. Девіація частоти виявляється прямо пропорційною Ω :

$$\begin{aligned} \beta &= const, \\ \omega_d &= \beta\Omega \end{aligned} \quad (18.15)$$

В разі ЧС характеристичним параметром, не залежним від частоти модулюючого сигналу, є девіація частоти ω_d . Індекс модуляції в цьому випадку виявляється обернено-пропорційним до Ω :

$$\begin{aligned} \omega_d &= const, \\ \beta &= \frac{\omega_d}{\Omega} \end{aligned} \quad (18.16)$$

Залежності індексу модуляції та девіації частоти від частоти модулюючого сигналу для ФМ і ЧМ представлено на рис. 18.2.

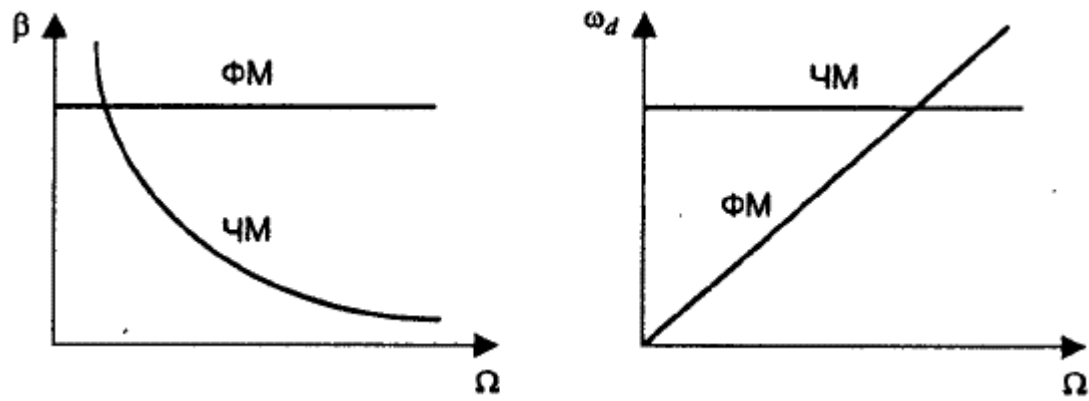


Рис. 18.2. Залежність індексу модуляції (зліва) та девіації частоти (праворуч) від частоти гармонійного модулюючого сигналу для ФМ та ЧМ

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. У чому полягає фазова модуляція?
2. У чому полягає частотна модуляція?
3. У чому полягає кутова модуляція?
4. Запишіть вираз для повної фази ФМ-сигналу.
5. Запишіть вираз для повної фази ЧС-сигналу.
6. Як пов'язані миттєва частота ФМ-сигналу з модулюючим сигналом?
7. Як пов'язані миттєва частота ЧС-сигналу з модулюючим сигналом?
8. Яким чином використовуючи частотний модулятор отримати ФМ-сигнал?
9. Яким чином використовуючи фазовий модулятор отримати ЧС-сигнал?
10. Що таке індекс кутовий модуляції?
11. Що таке девіація частоти?
12. Як пов'язані між собою індекс кутової модуляції і девіація частоти?
13. Коли проводиться фазова модуляція, який параметр: індекс кутової модуляції або девіація частоти, – не залежить від частоти модулюючого сигналу?
14. Коли проводиться частотна модуляція, який параметр: індекс кутової модуляції або девіація частоти, – не залежить від частоти модулюючого сигналу?
15. Зобразіть у вигляді графіків залежність індексу модуляції та девіації частоти від частоти модулюючого сигналу для випадку фазової модуляції та для випадку частотної модуляції.

Рівень курсу

1. Кутова модуляція: фазова і частотна модуляція.
2. Гармонійна кутова модуляція.

ЛЕКЦІЯ № 19

Тема: Кутова модуляція: спектр КМ-сигналу, демодуляція КМ-сигналу. Квадратурна модуляція.

Зміст

Спектр сигналу з гармонійною кутовою модуляцією.....	2
Ширина спектру сигналу з гармонійною КМ.....	3
Демодуляція КМ	3
Квадратурна модуляція	5
Спектр сигналу з квадратурною модуляцією	6
Демодуляція сигналу з квадратурною модуляцією.....	6
Маніпуляція сигналами.....	7
Двійкова фазова маніпуляція.....	8
Квадратурна фазова маніпуляція	9
Контрольні питання за темою.....	10
Рівень модуля	10
Рівень курсу.....	10

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Спектр сигналу з гармонійною кутовою модуляцією

В цій лекції ми отримаємо вираз для спектру радіосигналу з гармонійною кутовою модуляцією (КМ) в його приблизному варіанті, який є справедливим для малих індексів модуляції ($\beta \ll 1$).

Почнемо з того, що застосуємо до сигналу з гармонійною КМ, який має вигляд $s_{KM}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \beta \sin(\Omega t + \Phi_0))$ тригонометричні перетворення задля того, щоби розкрити косинус суми. В цьому виразі опорне коливання це $s_{оп}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, а сам моделюючий сигнал це $\varphi(t) = \beta \sin(\Omega t + \Phi_0)$.

Згадаємо тригонометричну формулу: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Якщо ми її застосуємо до нашого сигналу, то отримаємо наступне:

$$s_{KM}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\beta \sin(\Omega t + \Phi_0)) - A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \sin(\beta \sin(\Omega t + \Phi_0)) \quad (19.1)$$

Тепер, оскільки ми вважаємо, що $\beta \ll 1$, то можна наближено прийняти, що

$$\begin{aligned} \cos(\beta \sin(\Omega t + \Phi_0)) &\approx 1 \\ \sin(\beta \sin(\Omega t + \Phi_0)) &\approx \beta \sin(\Omega t + \Phi_0) \end{aligned} \quad (19.2)$$

З огляду на це записуємо:

$$s_{KM}(t) \approx A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \beta \sin(\Omega t + \Phi_0) \quad (19.3)$$

Залишається представити останню складову у вигляді половини різниці косинусів, для чого використаємо відому тригонометричну формулу $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$:

$$\begin{aligned} s_{KM}(t) \approx A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{A\beta}{2} \cos((\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0) + \\ + \frac{A\beta}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0) \end{aligned} \quad (19.4)$$

Отриманий результат дуже сильно нагадує отримане раніше представлення (Лекція 16) для АМ-сигналу з гармонійної модуляцією: теж три складових з тими ж частотами, та й амплітуди їх розраховуються аналогічно (тільки замість коефіцієнта амплітудної модуляції m у формулі фігурує індекс кутовий модуляції β). Однак є принципова відмінність, яка не надто кидається в очі, проте саме вона перетворює амплітудну модуляцію в кутову: це знак «мінус» перед однією з двох складових, які відповідають бічним частотам. Відзначимо головне: щоб перетворити сигнал з гармонійною амплітудною

модуляцією в сигнал з гармонійною кутовою модуляцією, достатньо змінити на 180° початкову фазу однієї з бічних частот.

Амплітудний і фазовий спектри сигналу з КМ у випадку малого індексу модуляції (цей випадок ще називають вузькосмуговою КМ) показано на рис. 19.1 (пунктирна лінія демонструє фазу верхньої бокової частоти для випадку АМ).

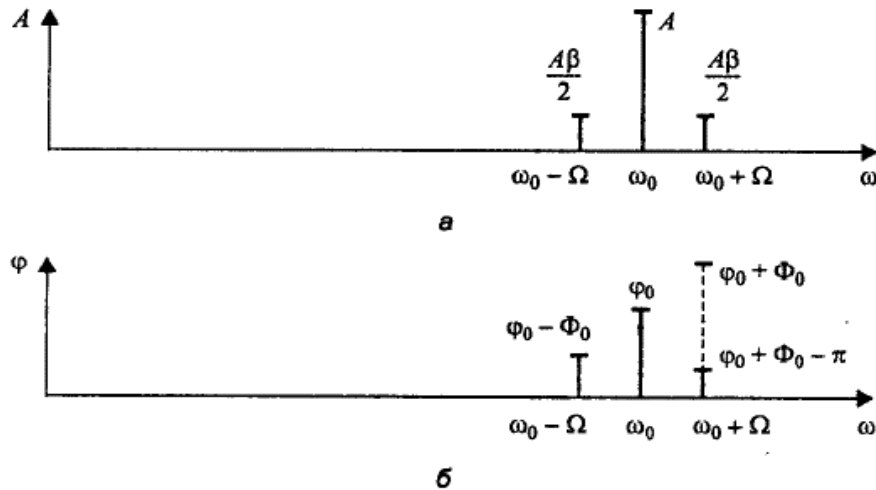


Рис. 19.1. Амплітудний і фазовий спектри сигналу з гармонійною КМ за $\beta \ll 1$

Ширина спектру сигналу з гармонійною КМ

За малого індексу модуляції, коли можна використовувати тільки розглянуте приблизне спектральне подання, ширину спектру можна, вочевидь, прийняти рівною 2Ω (теж саме було й в випадку АМ-сигналу). Складніше оцінити ефективну ширину спектру в разі більшого індексу модуляції β . У разі КМ мова йде саме про ефективну ширину спектру, оскільки спектр, строго кажучи, містить нескінченне число складових. Під ефективною шириною спектру розуміють діапазон частот, в межах яких зосереджена переважна частина енергії сигналу. Зазвичай розглядаються або 90%, або 95% енергії.

Отже, в залежності від значення індексу модуляції β можна привести дві формули для розрахунку ефективної ширини спектра КМ-сигналу:

- за $\beta \ll 1$ ширина спектра дорівнює подвоєній частоті модулюючого сигналу: $\Delta\omega_{\text{эфф}} = 2\Omega$
- за $\beta \gg 1$ ширина спектра дорівнює подвоєній девіації частоти: $\Delta\omega_{\text{эфф}} = 2\omega_{\text{д}}$

Демодуляція КМ

Як і в випадку АМ, демодуляція КМ-сигналу може виконуватися різними способами.

Одним з варіантів, придатних для реалізації в реальному масштабі часу, є так звана «квадратурна» обробка. В цьому випадку вхідний сигнал приймача множиться на два опорних коливання, зсув по фазі між якими становить 90° :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= s_{KM}(t) \cos \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{A}{2} \cos \varphi(t) + \frac{A}{2} \cos(2\omega_0 t + \varphi(t)) \\ y_2(t) &= s_{KM}(t) \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \sin \omega_0 t = \\ &= -\frac{A}{2} \sin \varphi(t) + \frac{A}{2} \sin(2\omega_0 t + \varphi(t)) \end{aligned} \quad (19.5)$$

Кожен з результатів множення містить дві складові. Перша складова – це низькочастотна складова, яка являє собою або косинус, або синус початкової фази вхідного КМ-модульованого сигналу. Друга складова – це високочастотне коливання з частотою $2\omega_0$, яке є КМ-модульованим сигналом. Потрібні саме низькочастотні складові, які легко виділяються за допомогою фільтра низьких частот (ФНЧ):

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \frac{A}{2} \cos \varphi(t) \\ y_2'(t) &= -\frac{A}{2} \sin \varphi(t) \end{aligned} \quad (19.6)$$

Подальші дії, так само, як і раніше, залежать від виду кутової модуляції. Для демодуляції ФМ нам необхідно обчислити фазу отриманої пари квадратурних складових:

$$\begin{aligned} x_{FM} &= -\arg(y_1'(t) + jy_2'(t)) = -\arg\left(\frac{A}{2} \cos \varphi(t) - j\frac{A}{2} \sin \varphi(t)\right) = \\ &= -\arg\left(\frac{A}{2} \exp(-j\varphi(t))\right) = \varphi(t) \end{aligned} \quad (19.7)$$

Для демодуляції ЧМ отриману фазову функцію необхідно диференціювати:

$$\begin{aligned} x_{CM}(t) &= \frac{dx_{FM}}{dt} = -\frac{d}{dt} \arg(y_1'(t) + jy_2'(t)) = -\frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y_2'(t)}{y_1'(t)} = \\ &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{y_2'(t)}{y_1'(t)}\right)^2} \frac{d}{dt} \frac{y_2'(t)}{y_1'(t)} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y_2'(t)}{y_1'(t)}\right)^2} \frac{\frac{dy_2'}{dt} y_1'(t) - \frac{dy_1'}{dt} y_2'(t)}{(y_1'(t))^2} = \\ &= \frac{\frac{dy_1'}{dt} y_2'(t) - \frac{dy_2'}{dt} y_1'(t)}{y_1'^2(t) + y_2'^2(t)} \end{aligned} \quad (19.8)$$

Структурну схему отриманого демодулятора показано на рис. 19.2.

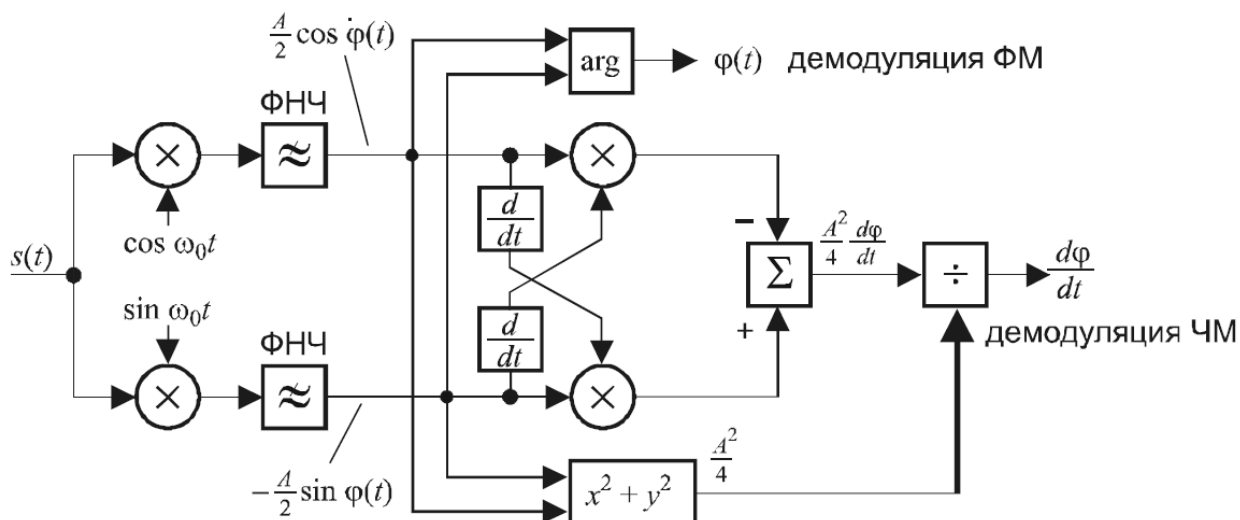


Рис. 19.2. Квадратурна обробка сигналу з кутовою модуляцією

Перевагою даної схеми є те, що за високої частоти вхідні блоки (генератор опорного коливання і помножувачі) можуть бути виконані в аналоговому вигляді.

Квадратурна модуляція

У попередніх лекціях ми розглянули випадки, коли амплітуда і початкова фаза гармонійного коливання піддавалися модуляції окремо. Однак можна змінювати ці два параметри одночасно, отримавши за рахунок цього можливість передавати відразу два сигнали:

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (19.9)$$

Таку модуляцію можна було б назвати амплітудно-фазовою. Однак два модулюючих сигнали виявляються в даному випадку «нерівноправними», так як вони модулюють істотно різні параметри опорного коливання. Можна зробити ситуацію більш «симетричною», злегка перетворивши форму подання розглянутого сигналу. Для початку розкриємо косинус суми:

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t) \cos \varphi(t) - A(t) \sin(\omega_0 t) \sin \varphi(t) \quad (19.10)$$

Тепер сигнал виявився представленим у вигляді суми двох АМ-коливань. Їх опорні - $\cos(\omega_0 t)$ та $\sin(\omega_0 t)$ - зміщені за фазою на 90° один до одного, а амплітудні функції дорівнюють $A(t) \cos \varphi(t)$ та $A(t) \sin \varphi(t)$. Позначимо ці амплітудні функції як $a(t)$ і $b(t)$ та використовуємо їх в якості нової пари модулюючих сигналів (замість амплітуди та початкової фази):

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t) + b(t) \sin(\omega_0 t)$$

Таке представлення розглянутого сигналу називається квадратурним (quadrature), а даний спосіб модуляції – квадратурною модуляцією (КАМ, англійський термін - quadrature amplitude modulation, QAM). Модулюючі сигнали в цьому випадку виявляються абсолютно рівноправними та незалежними.

Слід підкреслити, що квадратурна модуляція і амплітудно-фазова модуляція – це різні представлення одного і того ж самого сигналу. Різниця між ними полягає лише в тому, яка саме пара модулюючих сигналів керує параметрами результуючого коливання.

Спектр сигналу з квадратурною модуляцією

Оскільки КАМ-сигнал є сумою двох АМ-сигналів (один з нульовою фазою, а інший з фазою $\pi/2$), то ми можемо на підставі формули 8.9 з лекції 8 записати:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{1}{2} e^{-j0} \dot{A}(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} e^{j0} \dot{A}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \dot{B}(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} j \dot{B}(\omega - \omega_0) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{A}(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{A}(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2} j \dot{B}(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} j \dot{B}(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (19.11)$$

Отже, аналогічно до того, що відбувається за амплітудної модуляції, спектри модулюючих сигналів «роздвоюються» і «переїжджають» до опорної частоти $\pm\omega_0$. Якщо спектри модулюючих сигналів $a(t)$ і $b(t)$ займають одну й ту ж саму смугу частот (як зазвичай і буває), то вони будуть перекриватися і після зміщення в зону опорної частоти. Однак при цьому спектр, який відповідає синусній опорній, додатково множиться на $\pm j$. Саме це дає можливість розділити квадратурні складові під час прийому сигналу.

Демодуляція сигналу з квадратурною модуляцією

Як і інші різновиди АМ, квадратурного-модульований сигнал може бути демодульований шляхом його множення на опорне коливання. Однак оскільки КАМ-сигнал є сумою двох АМ-сигналів, то і опорних коливань має бути два – зі зсувом фаз на 90° :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= s_{КАМ}(t) \cos(\omega_0 t) = (a(t) \cos(\omega_0 t) - b(t) \sin(\omega_0 t)) \cos(\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} a(t) + \frac{1}{2} a(t) \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2} b(t) \sin(2\omega_0 t) \\ y_2(t) &= s_{КАМ}(t) \sin(\omega_0 t) = (a(t) \cos(\omega_0 t) - b(t) \sin(\omega_0 t)) \sin(\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} b(t) + \frac{1}{2} a(t) \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2} b(t) \cos(2\omega_0 t) \end{aligned} \quad (19.12)$$

Результат кожного множення містить три складових. Одне з них є низькочастотним і являє собою модулюючу функцію $a(t)$ або $b(t)$ зі зменшеним удвічі рівнем. Решта: дві складові, які утворюють КАМ-сигнал з частотою $2\omega_0$. Тому корисні складові легко виділяються шляхом пропускання результатів множення через ФНЧ. Структура демодулятора показана на рис. 19.3.

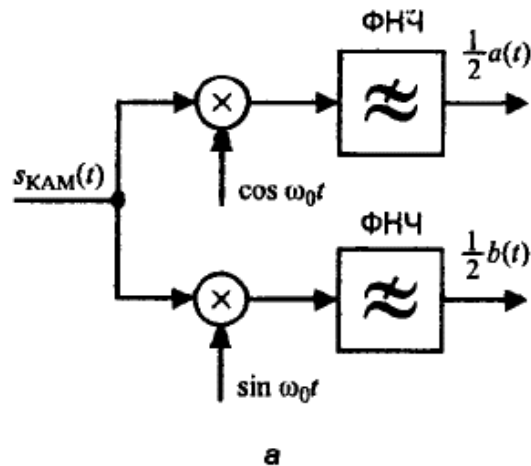


Рис. 19.3. Демодуляція КАМ-сигналу

Маніпуляція сигналів

В разі модуляції цифрових сигналів замість терміну модуляція використовують термін маніпуляція. Тобто **маніпуляція** – це модуляція цифрових сигналів.

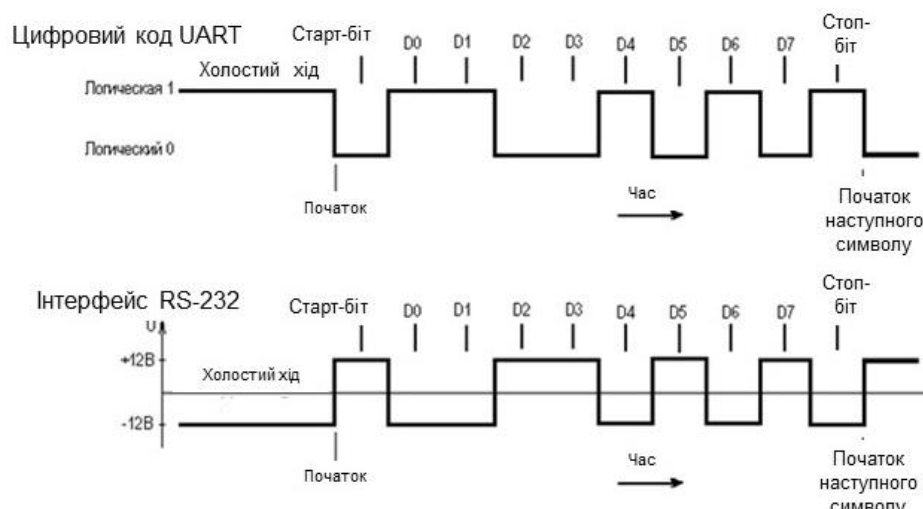


Рис. 19.4 Електричні сигнали під час послідовного передавання цифрових даних однорозрядним послідовним кодом

Маніпулювання однорозрядного цифрового коду проводиться наступним чином: у відповідність до значення біту «0» або «1» ставиться або амплітуда, або частота, або початкова фаза опорного коливання (рис. 19.5). Якщо відповідно до значення біта змінюється амплітуда опорного коливання,

то це – **амплітудна маніпуляція** (рис. 19.5 зверху). Якщо відповідно до значення біта змінюється частота опорного коливання, то це – **частотна маніпуляція** (рис. 19.5 всередині). Якщо відповідно до значення біта змінюється початкова фаза опорного коливання, то це – **фазова маніпуляція** (рис. 19.5 знизу).

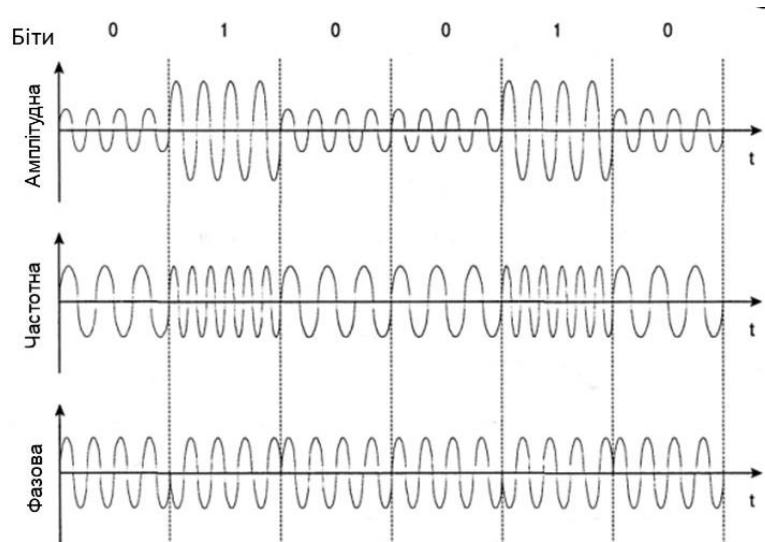


Рис. 19.5 Амплітудна, частотна та фазова маніпуляція цифрового сигналу з послідовним однорозрядним кодом

Двійкова фазова маніпуляція

Якщо цифровий сигнал представлено у однорозрядному послідовному коді (рис. 19.4), тоді фазова маніпуляція відбувається таким чином (рис.19.6):

- коли значення біта, який передається, дорівнює «0», то початкова фаза модульованого приймає значення $90^0 (+\pi/2)$
- коли значення біта, який передається, дорівнює «1», то початкова фаза модульованого приймає значення $-90^0 (-\pi/2)$

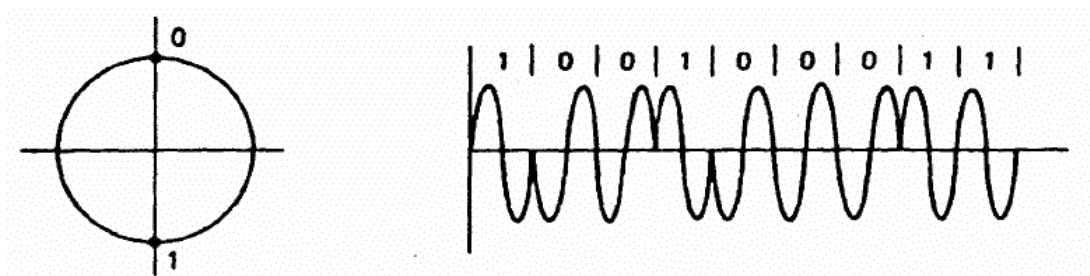


Рис 19.6 Фазова маніпуляція цифрового сигналу з послідовним однорозрядним кодом

Такий спосіб маніпуляції має назву **двійкова фазова маніпуляція**. В зарубіжній технічній літературі для нього використовують назву *Binary phase-shift keying* (**BPSK**).

Фазова маніпуляція є найбільш надійним способом передавання послідовного цифрового коду: ймовірність помилки в розпізнаванні «0» або «1» у порівнянні з іншими видами маніпуляції у фазовій маніпуляції є найнижчою. Саме тому фазова маніпуляція найчастіше застосовується для передавання цифрової інформації скрізь радіоэфір.

Квадратурна фазова маніпуляція

Якщо цифровий сигнал представлено у дворозрядному послідовному коді (рис. 19.7), тоді для фазової маніпуляції використовують чотири значення початкової фази (рис.8):

- коли значення двійкового коду, який передається, дорівнює «00», то початкова фаза модульованого приймає значення 135° ($+3\pi/4$)
- коли значення двійкового коду, який передається, дорівнює «01», то початкова фаза модульованого приймає значення 45° ($+\pi/4$)
- коли значення двійкового коду, який передається, дорівнює «10», то початкова фаза модульованого приймає значення -135° ($-3\pi/4$)
- коли значення біта, який передається, дорівнює «11», то початкова фаза модульованого приймає значення -45° ($-\pi/4$) +

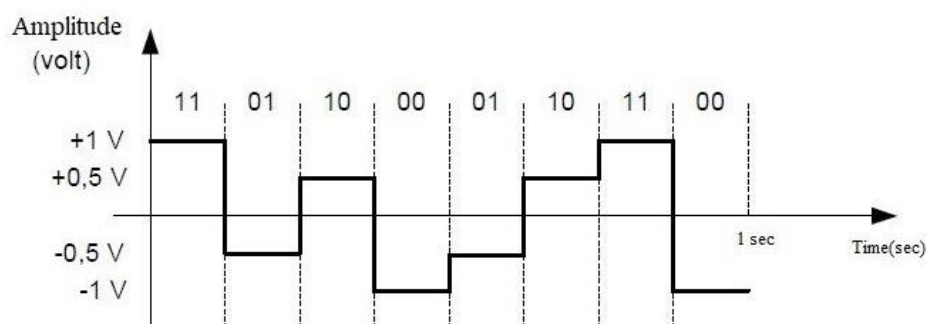


Рис. 19.7 Дворозрядний послідовний код

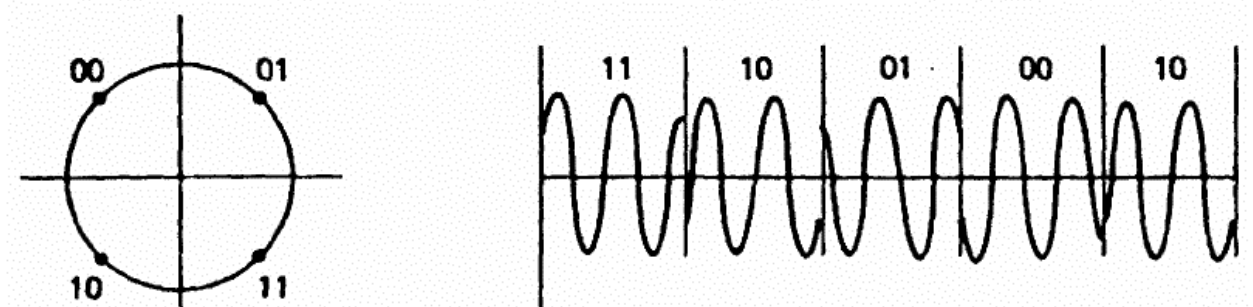


Рис. 19.8 Квадратурна фазова маніпуляція

Такий спосіб маніпуляції має назву «квадратурна фазова маніпуляція». Англійська назва цього методу *Quadrature phase-shift keying* (QPSK).

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Спектр сигналу з гармонійною кутовою модуляцією. Ширина спектру.
2. Демодуляція сигналу з кутовою модуляцією.
3. Квадратурна модуляція. Спектр сигналу з квадратурною модуляцією.
4. Демодуляція сигналу з квадратурною модуляцією.
5. Маніпуляція сигналів.

ЛЕКЦІЯ № 20

Тема: Загальні відомості про фільтрацію сигналів та радіотехнічні фільтри.

Зміст

Загальні відомості про фільтрацію електричних сигналів	2
Частотний коефіцієнт передачі фільтра	3
Синтез аналогових фільтрів	5
Фільтри Баттєрворта	6
Фільтри Чебишева	7
Реалізація аналогових фільтрів електричними LC-колами	9
Контрольні питання за темою	10
Рівень модуля	10
Рівень курсу	10

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Загальні відомості про фільтрацію електричних сигналів

Фільтр – це частотно-вибірковий пристрій, який служить для передачі (пропускання) сигналів в заданому діапазоні частот (смузі пропускання) і придушення сигналів в інших діапазонах частот (смуга затримування). Фільтри широко використовуються в системах зв'язку, а також в схемах захисту електронних систем від перешкод.

Розрізняють аналогові фільтри, в яких виконується обробка аналогових сигналів, та цифрові фільтри, призначені для обробки цифрових сигналів. У цьому курсі розглядаються аналогові фільтри.

Фільтри прийнято класифікувати за такими ознаками.

За виглядом амплітудно-частотної характеристики (АЧХ): фільтри нижніх частот (ФНЧ), верхніх частот (ФВЧ), смугові (СФ), загороджувальні (або режекторні) фільтри (ЗФ).

За типами елементів, які використовуються для реалізації: пасивні LC -фільтри, активні RC -фільтри, фільтри на перемикаючих конденсаторах і т.д. У даній лекції буде представлено тільки пасивні фільтри.

На рис. 20.1, а-г показані ідеальні АЧХ фільтрів: нижніх частот, верхніх частот, смугових та загороджувальних.

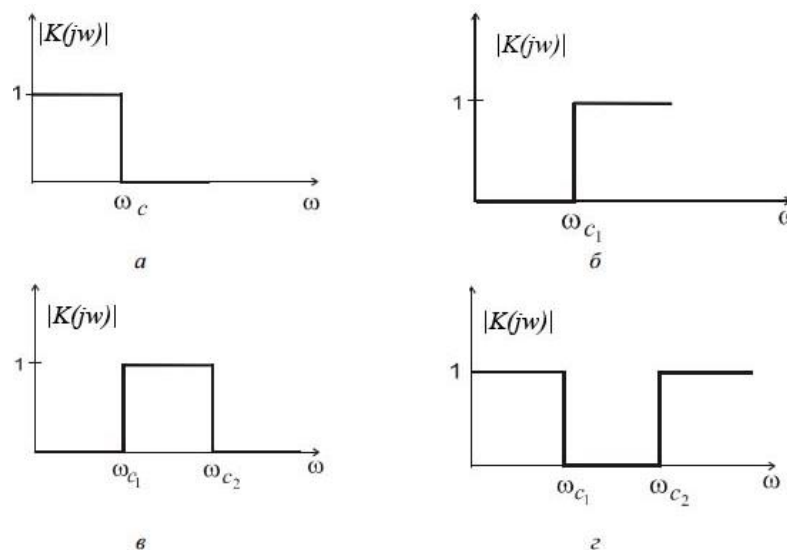


Рис. 20.1 Амплітудно-частотні характеристики ідеальних фільтрів

Коло, що складається з кінцевого числа елементів, не може реалізувати ідеальні характеристики, показані на рис. 20.1. Амплітудно-частотну характеристику реального фільтра нижніх частот показано на рис. 20.2.

Оскільки за допомогою реального кола неможливо реалізувати постійну амплітудно-частотну характеристику, задають максимальне відхилення АЧХ в смузі пропускання A_{max} . У смузі затримування задається мінімальна величина ослаблення сигналу A_{min} .

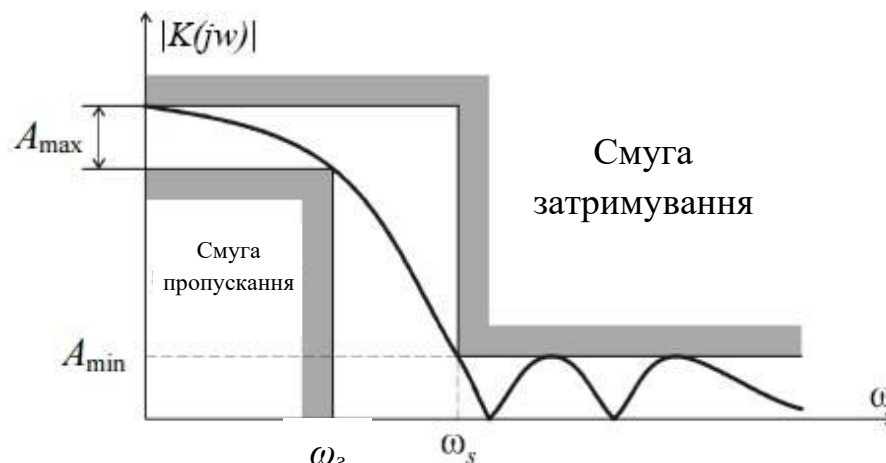


Рис. 20.2 Амплітудно-частотна характеристика фізично реалізованого фільтра

Фізично реалізований фільтр завжди має перехідну зону між смугами пропускання і затримування. Вона розташована між частотою зрізу ω_c і граничною частотою смуги затримування ω_s . Відношення ω_c/ω_s характеризує вибірковість фільтра.

Отже, амплітудно-частотна характеристика фільтра нижніх частот визначається наступними параметрами:

- 1) частотою зрізу ω_c ;
- 2) максимальним відхиленням в смузі пропускання A_{max} ;
- 3) граничною частотою смуги затримування ω_s ;
- 4) мінімальним ослабленням в смузі затримування A_{min} .

Частотний коефіцієнт передачі фільтра

Частотний фільтр являє собою ніщо інше як звичайний чотириполосник (дивись лекцію 10):

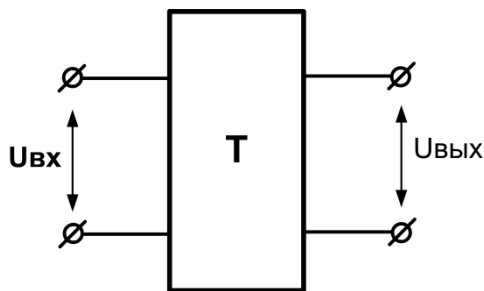


Рис. 20.3 чотириполосники

Чотириполосники характеризується частотним коефіцієнтом передачі:

$$K(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (20.1)$$

Частотний коефіцієнт передачі розглядався в лекції 11.

Коли виникає завдання фільтрації, то в першу чергу визначають, що фільтр повинен зробити: придушити низькі або високі частоти, виділити сигнал певної частоти або придушити сигнал заданого частотного діапазону. Будують бажану АЧХ фільтра необхідної для даного завдання формою і з бажаними параметрами. За відомою АЧХ визначають частотний коефіцієнт передачі фільтра в формі (20.1) і вже тоді за виглядом частотного коефіцієнту передачі знаходять структуру фільтра.

Схеми простих фільтрів представлені на малюнках 20.4 - 20.7.

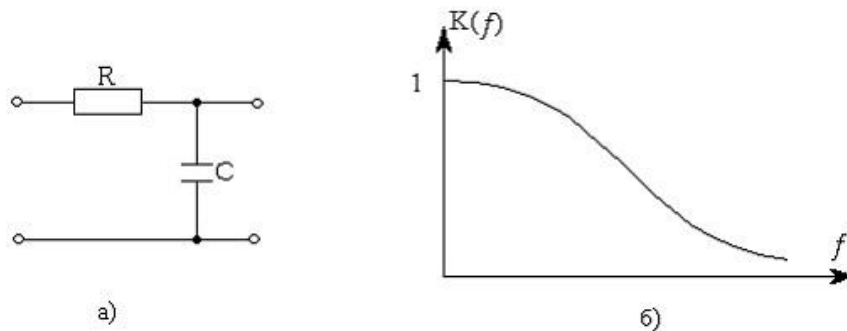


Рис. 20.4 Найпростіший фільтр нижніх частот

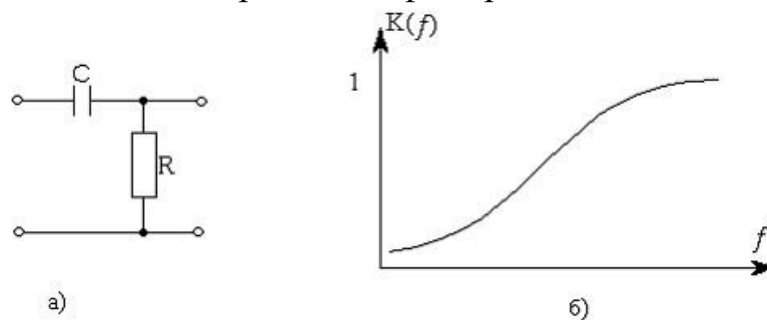


Рис. 20.5 Найпростіший фільтр верхніх частот

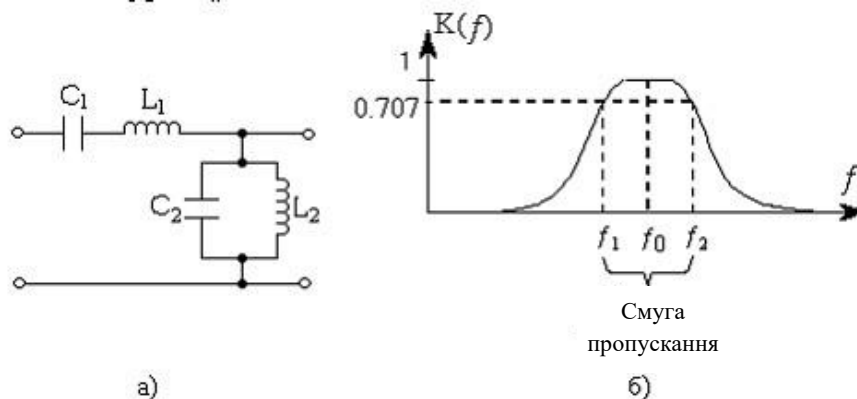


Рис. 20.6 Найпростіший смуговий фільтр

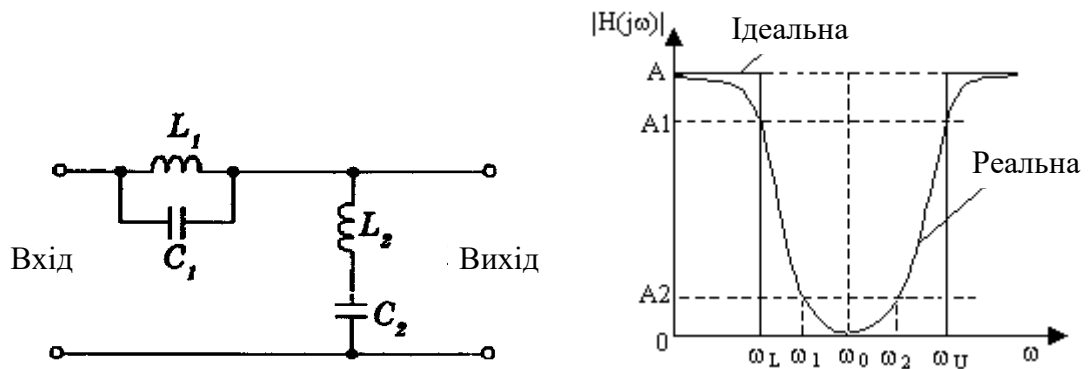


Рис. 20.7 Найпростіший загороджувальний (режекторний) фільтр

В техніці використовується велика кількість схем аналогових і цифрових фільтрів. Теорія фільтрації і методи побудови фільтрів добре розвинені, але в рамках цього курсу ми обмежилися тільки загальним введенням в питання фільтрації сигналів.

Синтез аналогових фільтрів

Процедура синтезу аналогового фільтра включає в себе два основних етапи. **Першим етапом є *апроксимація*** – процедура знаходження частотного коефіцієнта передачі бажаного фільтра, якій із заданою точністю відтворює задані частотні або часові характеристики. **Другий етап – це *реалізація*** фільтра у вигляді електричного кола. На цьому етапі за отриманим на етапі апроксимації частотним коефіцієнтом передачі визначають конфігурацію електричного кола і розраховують параметри елементів цього кола, наприклад величини ємностей та індуктивностей, що входять в це коло.

Методи проектування аналогових фільтрів з типовими амплітудно-частотними характеристиками добре розроблені. Є численні довідники, в яких наведені докладні таблиці з параметрами фільтрів різних порядків.

У загальному випадку для отримання комплексного частотного коефіцієнту передачі (передавальної функції), що забезпечує задану форму частотних характеристик, використовують методи оптимізації. На практиці часто використовують типові частотні коефіцієнти передачі, які мають аналітичне рішення. Перелічимо найбільш поширені частотні коефіцієнти передачі, апроксимуючою АЧХ ідеального фільтра нижніх частот.

1. Фільтр Баттерворта з максимально плоскою амплітудно-частотною характеристикою.
2. Фільтр Чебишева з рівнохвильовою характеристикою в смузі пропускання.
3. Інверсійний фільтр Чебишева з рівнохвильовою характеристикою в смузі затримання.

4. Еліптичний фільтр, який має рівнохвильові характеристики і в смузі пропускання і смузі затримування.

5. Фільтр Бесселя з фазочастотною характеристикою, близькою до лінійної.

Фільтри Баттерворта

Комплексний частотний коефіцієнт передачі фільтра нижніх частот Баттерворта n -го порядку характеризується виразом

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^{2n}} \quad (20.2)$$

Амплітудно-частотна характеристика фільтра Баттерворта має такі властивості:

1. За будь-якого порядку n значення АЧХ на нульовій частоті: $|K(j0)| = 1$
2. За будь-якого порядку n значення АЧХ на частоті зрізу ω_3 : $|K(j\omega_3)| = 0,7$

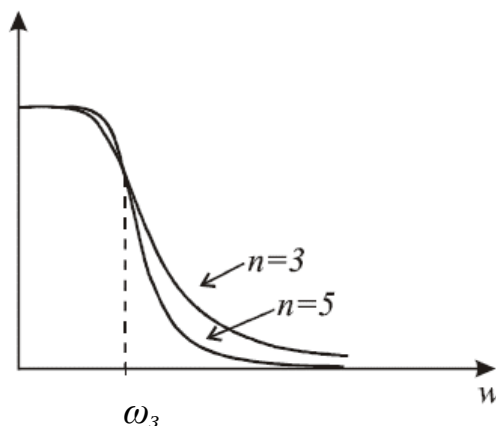


Рис. 20.8 АЧХ фільтра Баттерворта другого і третього порядку

АЧХ фільтра монотонно убуває з ростом частоти. З цієї причини фільтри Баттерворта називають фільтрами з максимально плоскими характеристиками. На рис. 20.8 показані графіки амплітудно-частотних характеристик фільтрів Баттерворта 3 і 5 порядків. Очевидно, що чим більше порядок фільтра, тим точніше апроксимується АЧХ ідеального фільтра нижніх частот.

Порядок комплексного частотного коефіцієнту передачі n вибирають з умови забезпечення необхідного загасання в смузі затримування на частоті $\omega > \omega_3$. Модуль комплексного частотного коефіцієнту передачі в смузі затримування

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^{2n}}} \approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^n} \quad (20.3)$$

На підставі (20.3) легко знайти порядок комплексного частотного коефіцієнту передачі шуканого фільтра. Він визначається за наближеною формулою:

$$n = -\frac{\lg A_{\min}}{\lg(\omega_{\min}/\omega_3)} \quad (20.4)$$

Тут ω_{\min} – частота в смузі затримування, на якій задана величина мінімального загасання A_{\min} . Значення n , отримане за допомогою цієї формули, округляється до найближчого цілого, більшого n .

Приклад: Визначити порядок фільтра Баттерворта, у якого значення АЧХ на частоті ω_{\min} , яка дорівнює $2\omega_3$, не перевищує 0.1.

Рішення: Відповідно до (20.4) $n = -\frac{\lg 0.1}{\lg(2)} = 3,32$. Округляючи 3,32 до

найближчого більшого цілого, отримуємо, що таке послаблення в смузі затримування забезпечує фільтр Баттерворта четвертого порядку.

Фільтри Чебишева

З усіх інших типів фільтрів розглянемо тільки фільтри Чебишева першого роду. Квадрат модуля комплексного частотного коефіцієнту передачі фільтра Чебишева визначається виразом

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_3)} \quad (20.5)$$

Тут: $T_n(\omega)$ – поліном Чебишева порядку n ;

ε – параметр фільтра, який представляє собою коефіцієнт, який визначає нерівномірність АЧХ в смузі пропускання (див. рис. 20.9).

Розглянемо основні властивості поліномів Чебишева. Перші чотири полінома Чебишева мають вигляд:

$$\begin{aligned} T_0(\omega/\omega_3) &= 1; & T_1(\omega/\omega_c) &= \omega/\omega_3; \\ T_2(\omega/\omega_c) &= 2\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2 - 1; & T_3(\omega/\omega_c) &= 4\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^3 - 3\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right); \end{aligned} \quad (20.6)$$

Поліном Чебишева порядку $n \geq 2$ може бути отриманий за допомогою рекурентної формули

$$T_n(\omega/\omega_3) = 2 \frac{\omega}{\omega_3} T_{n-1}(\omega/\omega_3) - T_{n-2}(\omega/\omega_3) \quad (20.7)$$

Аналіз поведінки поліномів Чебишева показує, що на інтервалі $-1 < \omega/\omega_3 < 1$ поліном $T_n(\omega/\omega_3)$ n разів приймає значення, рівні нулю, і $n+1$ разів досягає значень, рівних $+1$ або -1 , які чергуються один з одним. Поза інтервалом $-1 < \omega/\omega_3 < 1$ поліном $T_n(\omega/\omega_3)$ монотонно зростає.

Відповідно до (20.5) модуль комплексного частотного коефіцієнту передачі фільтра Чебишева дорівнює одиниці на тих частотах, де поліном $T_n(\omega/\omega_3)$ обертається в нуль.

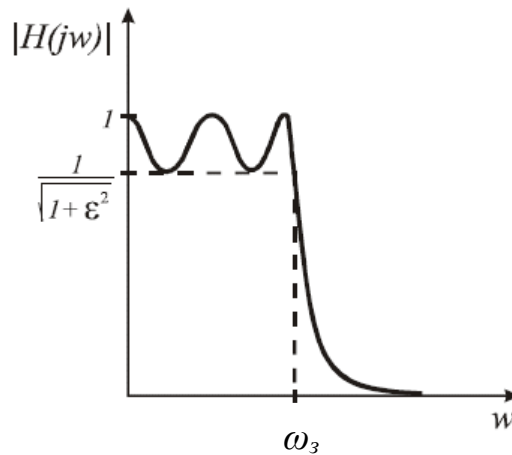


Рис. 20.9 АЧХ фільтра Чебишева першого роду

Перелічимо властивості фільтрів Чебишева.

1. У смузі пропускання АЧХ має рівнохвильовий характер. На інтервалі $-1 < \omega/\omega_3 < 1$ є n точок, в яких функція досягає максимального значення, яке дорівнює 1, або мінімального значення, яке дорівнює $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$. Якщо n непарне,

то $|K(j0)| = 1$. Якщо n парне, то $|K(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$.

2. Значення АЧХ фільтра Чебишева на частоті зрізу дорівнює $|K(j\omega_3)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$.

3. Коли $\frac{\omega}{\omega_3} \geq 1$, функція $|K(j\omega)|$ монотонно убиває і прагне до нуля.

4. Параметр ϵ визначає нерівномірність АЧХ фільтра Чебишева в смузі пропускання:

$$A_{\max} = \frac{\sqrt{1+\epsilon^2} - 1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \quad (20.8)$$

Графік амплітудно-частотної характеристики фільтра Чебишева п'ятого порядку показаний на рис. 20.9. Порівняння АЧХ фільтрів Баттерворта і Чебишева показує, що фільтр Чебишева забезпечує більше ослаблення в смузі пропускання, ніж фільтр Баттерворта такого ж порядку. Недолік фільтрів Чебишева полягає в тому, що їх фазочастотні характеристики в смузі пропускання значно відрізняються від лінійних.

Реалізація аналогових фільтрів електричними LC-колами

LC-фільтри були першими фільтрами, які використовувалися в пристроях передачі сигналів.

Пасивний фільтр, який реалізує характеристики Баттерворта або Чебишева, являє собою сходове LC-коло, включене між резистивним опором джерела сигналу і навантаженням R_H (рис. 20.10). Елементи фільтру розраховують таким чином, щоб забезпечити передачу максимальної потужності в смузі пропускання. Кількість LC-елементів у колі дорівнює порядку фільтра n .

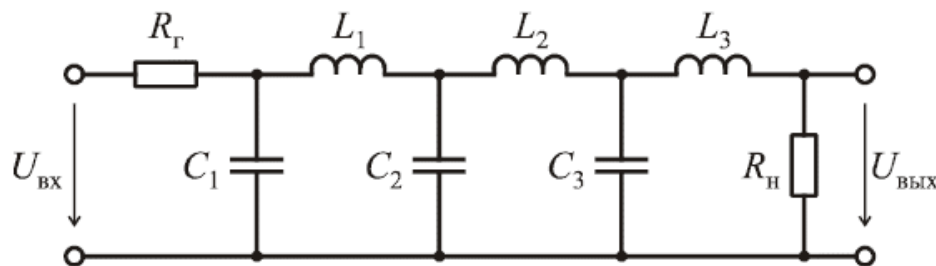


Рис. 20.10 Сходовий LC-фільтр

Сходовий LC-фільтр, включений між генератором і навантаженням, може починатися як з поздовжньою, так і з поперечною гілкою. Якщо порядок фільтра n парний, обидва варіанти рівноцінні. Якщо n - непарне число, вибирають структуру, яка містить мінімальну кількість індуктивних елементів.

Методи синтезу LC-фільтрів добре розроблені. Існує велика кількість довідникової літератури, яка містить дані по фільтрах різних порядків. Процедура розрахунку фільтра зводиться до вибору типу і порядку фільтра.

Пасивні фільтри стійкі, не вимагають джерел живлення, мають низьку чутливість характеристик до зміни номіналів їх елементів. Їх основний недолік при роботі на частотах менше 100 МГц – це великі габарити й вага, обумовлені розмірами індуктивних котушок.

В даний час LC-фільтри майже витіснені цифровими і аналоговими активними RC-фільтрами. Однак пасивні фільтри як і раніше використовуються на частотах, що перевищують 100 кГц. Крім того, багато методів реалізації цифрових фільтрів засновано на моделюванні LC-фільтрів.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

1. Що таке електричний фільтр? Дайте визначення.
2. Як розрізняються фільтри по виду амплітудно-частотної характеристики?
3. Намалюйте АЧХ ідеального фільтра нижніх частот.
4. Намалюйте АЧХ ідеального фільтра верхніх частот.
5. Намалюйте АЧХ ідеального смугового фільтра.
6. Намалюйте АЧХ ідеального загороджувального фільтра.
7. Які параметри визначають АЧХ фільтра нижніх частот?
8. Яке відношення називають вибірковістю фільтра?
9. Намалюйте схему найпростішого фільтра нижніх частот.
10. Намалюйте схему найпростішого фільтра верхніх частот.
11. Намалюйте схему найпростішого смугового фільтра.
12. Намалюйте схему найпростішого загороджувального фільтра.
13. Намалюйте АЧХ найпростішого фільтра нижніх частот.
14. Намалюйте АЧХ найпростішого фільтра верхніх частот.
15. Намалюйте АЧХ найпростішого смугового фільтра.
16. Намалюйте АЧХ найпростішого загороджувального фільтра.
17. Які етапи виконуються під час синтезу аналогових фільтрів.
18. Назвіть найбільш поширені апроксимації АЧХ ідеального фільтра нижніх частот.
19. Намалюйте АЧХ фільтра Баттерворта.
20. Намалюйте АЧХ фільтра Чебишева.
21. Що таке сходовий LC-фільтр.
22. Намалюйте схему сходового LC-фільтра.

Рівень курсу

1. Загальні відомості про фільтрацію електричних сигналів.
2. Частотний коефіцієнт передачі фільтра. Схеми простих фільтрів.
3. Синтез аналогових фільтрів.
4. Фільтри Баттерворта.
5. Фільтри Чебишева.
6. Реалізація аналогових фільтрів електричними LC-колами.

ЛЕКЦІЯ № 21

Тема: Цифровий сигнал. Спектральна функція дискретизованого сигналу.

Зміст

Аналогові, дискретні та цифрові сигнали	2
Аналого-цифрове і цифро-аналогове перетворення.....	3
Аналітичне подання дискретизованого сигналу.....	4
Спектр дискретного сигналу.....	6
Отримання спектральної функції дискретизованого сигналу за відліками	10
Відновлення безперервного сигналу за дискретними відліками	11
Контрольні питання за темою.....	12
Рівень модуля	12
Рівень курсу	12

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Аналогові, дискретні та цифрові сигнали

Усякий фізичний сигнал є безперервною функцією часу. Такі сигнали, які визначені в усі моменти часу, називають аналоговими (*analog*). Послідовність чисел, що представляє сигнал при цифровій обробці, є дискретним рядом (*discrete series*), і він, природньо, не може повністю відповідати аналоговому сигналу. Числа, що складають послідовність, є значеннями сигналу в окремі (дискретні) моменти часу, і вони називаються відліками сигналу (*samples*). Як правило, відліки беруться через рівні проміжки часу T , які зветься періодом дискретизації (або інтервалом, кроком дискретизації – *sample time*). Величина, обернена до періоду дискретизації, називається частотою дискретизації (*sampling frequency*): $f_s = 1/T$. Відповідна їй кругова частота визначається таким чином: $\omega = 2\pi f_s = 2\pi/T$.

Ясно, що в загальному випадку подання сигналу набором дискретних відліків призводить до втрати інформації, так як ми нічого не знаємо про поведінку сигналу в проміжках між відліками. Однак, як буде показано в наступній лекції (розділ «Теорема Котельникова»), існує клас аналогових сигналів, для яких такої втрати інформації не відбувається і які можуть бути точно відновлені за значеннями своїх дискретних відліків.

Процес перетворення аналогового сигналу в послідовність відліків називається дискретизацією (*sampling*), а результат такого перетворення – дискретним сигналом.

При обробці сигналу в обчислювальних пристроях його відліки представляються у вигляді двійкових чисел, що мають обмежене число розрядів. Внаслідок цього відліки можуть приймати значення лише з певної кінцевої множини i , отже, при поданні сигналу неминуче відбувається його округлення. Процес перетворення відліків сигналу в числа називається квантуванням за рівнем (*quantization*), а виникаючі при цьому помилки округлення – помилками (або *шумами*) квантування (*quantization error, quantization noise*).

Сигнал, дискретний у часі, але не квантований за рівнем, називається дискретним (*discrete-time*) сигналом. Сигнал, дискретний у часі і квантований за рівнем, називають цифровим (*digital*) сигналом. Сигнали, квантовані за рівнем, але безперервні в часі, на практиці зустрічаються рідко. Різницю між аналоговими, дискретними і цифровими сигналами ілюструє рис. 1.

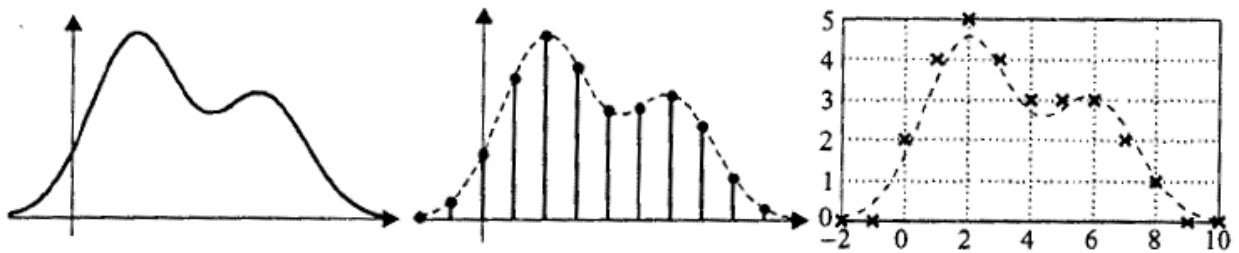


Рис. 1 - Аналоговий (зліва), дискретний (в центрі) і цифровий сигнали

Обчислювальні пристрої, призначені для обробки сигналів, можуть оперувати тільки цифровими сигналами. Існують також пристрої, побудовані в основному на базі аналогової схемотехніки, які працюють з дискретними сигналами, представленими у вигляді імпульсів різної амплітуди або тривалості. Щоб підкреслити відсутність квантування за рівнем, такі пристрої іноді називають *дискретно-аналоговим*.

Дискретні і цифрові сигнали за своїми властивостями дуже близькі і описуються в теорії одним і тим же чином. Відмінність між ними полягає лише в наявності або відсутності квантування. Ця відмінність практично зникає, коли крок квантування дуже малий (коли розрядність АЦП велика) або, коли послідовність цифрових відліків генерується обчислювальними засобами. В останньому випадку квантування визначається точністю подання на комп'ютері чисел дійсного типу. Оскільки ефекти, пов'язані з квантуванням за рівнем, в більшості випадків не настільки значні, то в обсяг курсу не входить розгляд цих ефектів, й в подальшому вони не будуть прийматися до уваги. У зв'язку з цим весь викладений в лекції матеріал в рівній мірі відноситься як до дискретних, так і цифровим сигналів, а терміни дискретний і цифровий будуть застосовуватися по тексту в одному і тому ж загальному значенні.

Однак, тим не менш, слід знати, що наявність квантування, а також ефекти, пов'язані з кінцевою точністю представлення чисел в обчислювальних пристроях, призводять до виникнення окремого виду похибки – похибки квантування, величину якої у багатьох випадках необхідно оцінювати. У деяких, досить рідкісних випадках квантування може призводити до появи осциляцій в процесі вимірювання та управління.

Аналого-цифрове і цифро-аналогове перетворення

Узагальнена структура системи цифрової обробки сигналів наведена на рис. 2. На вхід надходить аналоговий сигнал $s_{вх}(t)$. Його дискретизація у часі та квантування за рівнем здійснюються в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП; англійський термін - *Analog-to-Digital Converter, ADC*). Взагалі-то ці два процеси – дискретизація і квантування – є незалежними один від одного, але вони часто виконуються всередині однієї мікросхеми. Вихідним сигналом

АЦП є послідовність чисел, що надходить в цифровий процесор ЦП, що виконує необхідну обробку. Процесор здійснює різні математичні операції над вхідними відліками; відліки, отримані раніше, а також проміжні результати можуть зберігатися в пам'яті процесора для використання в наступних обчисленнях. Результатом роботи процесора є нова послідовність чисел, які представляють собою відліки вихідного сигналу. Аналоговий вихідний сигнал $s_{\text{вих}}(t)$ відновлюється по цій послідовності чисел за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП; англійський термін – *Digital-to-Analog Converter, DAC*). Напряга на виході ЦАП має ступінчасту форму (це також показано на рис. 2); при необхідності ступінчастий вихідний сигнал може бути перетворено в плавний сигнал за допомогою згладжувального фільтру Φ .

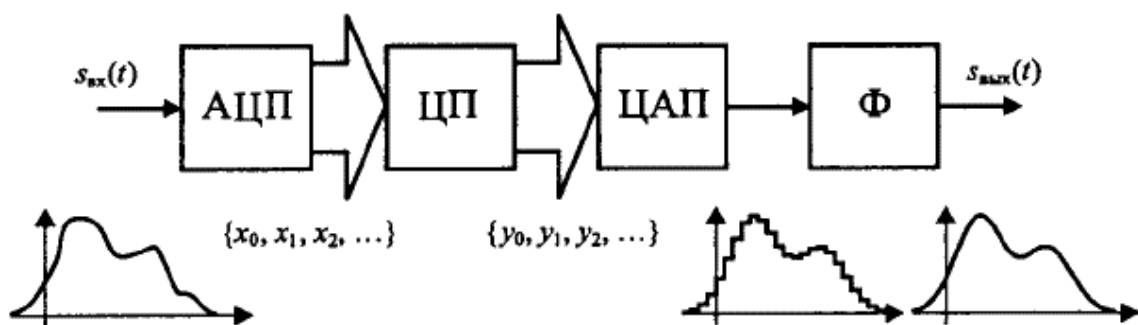


Рис. 2 – Схема побудови системи цифрової обробки сигналів

Пристрої, які реалізуються за допомогою структури типу рис. 2, можуть мати найрізноманітніший характер. У цифровій формі можна створювати фільтри, аналізатори спектру, нелінійні перетворювачі сигналів, кодувальники, шіфрователі і багато, багато іншого.

Аналітичне подання дискретизованого сигналу

Перетворення Фур'є дозволяє обчислити спектральну щільність сигналу, який представляє собою певну функцію (як правило, часу або координат). Дискретний сигнал є послідовністю чисел, тому для аналізу його спектра звичайними, тобто аналоговими, засобами необхідно співставити цій послідовності певну математичну функцію. Як то кажуть: представити його в аналітичному вигляді.

Під аналітичним поданням цифрового (також, як і дискретного) сигналу $s(t)$ слід розуміти його представлення за допомогою сукупності відліків в дискретні моменти часу kT , де k – номер імпульсу в даній послідовності, починаючи з нульового значення. Нульове значення k відповідає початковому моменту часу 0.

Процедуру дискретизації, здійснювану за допомогою електронного ключа, зручно розглядати як множення функції $s(t)$ на допоміжну періодичну

послідовність $y_T(t)$ досить коротких тактових імпульсів. В якості таких імпульсів зазвичай розглядають прямокутні імпульси з тривалістю τ_0 , суттєво меншою у порівнянні з періодом дискретизації T . Таким чином, дискретизований з кроком T сигнал можна визначити виразом

$$s_d(t) = s(t) \cdot y_T(t) \quad (21.1)$$

Функції $s(t)$, $y_T(t)$ і $s_d(t)$ показані на рис. 3а.

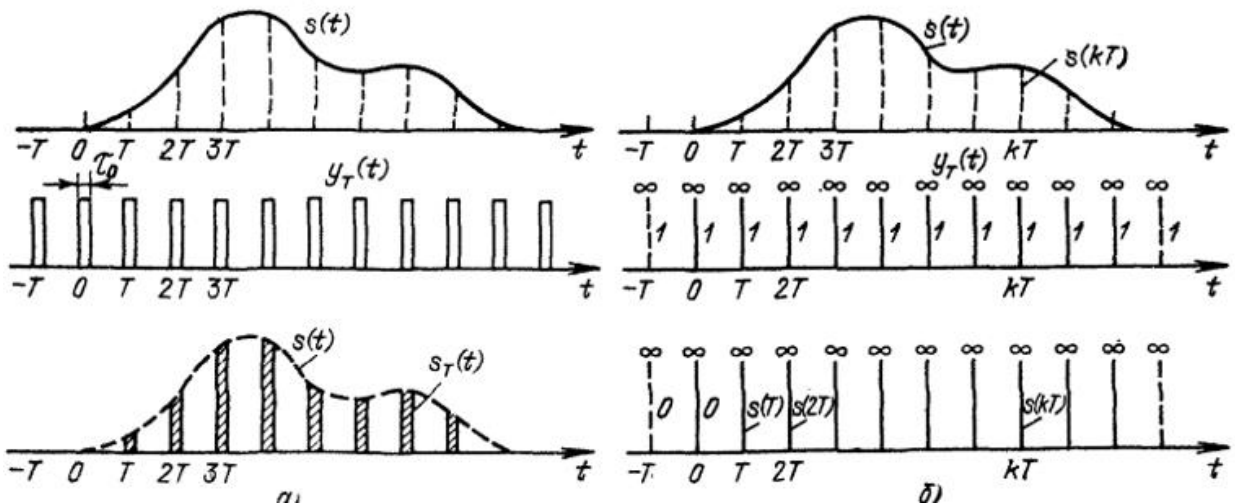


Рис. 3 - Дискретизація сигналу як множення на послідовність тактових імпульсів кінцевої тривалості(а) або на послідовність дельта-функцій(б)

Однак, традиційним способом аналітичного представлення дискретних сигналів є представлення відліків у вигляді дельта-функцій з відповідними множниками і затримками. Таке представлення випливає з попереднього подання дискретного сигналу за допомогою послідовності прямокутних імпульсів, якщо збільшувати прогальність цих імпульсів ($q = T/\tau_0$) до граничного значення за рахунок зменшення тривалості імпульсу до нуля. Кожен імпульс в цій послідовності являє собою дельта-функцію, зміщену на час kT від початкового, нульового часу: $\delta(t - kT)$, де k – номер імпульсу в послідовності. А всю допоміжну періодичну послідовність $y_T(t)$ тоді можна представити формулою:

$$y_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT) \quad (21.2)$$

Відповідно, аналоговий сигнал $s(t)$ після його дискретизації за допомогою послідовності дельта-імпульсів на підставі (21.1) матиме наступне аналітичне подання:

$$s_d(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} s(kT) \delta(t - kT) \quad (21.3)$$

Послідовність часових відліків набуває вигляду послідовності дельта-функцій з ваговими коефіцієнтами, рівними значеннями сигналу $s(t)$ в точках kT (дивись рис. 3б).

Спектр дискретного сигналу

Головна властивість спектру будь-якого дискретного сигналу полягає в тому, що його спектр є періодичним, і його період дорівнює кутовій частоті дискретизації $2\pi/T$.

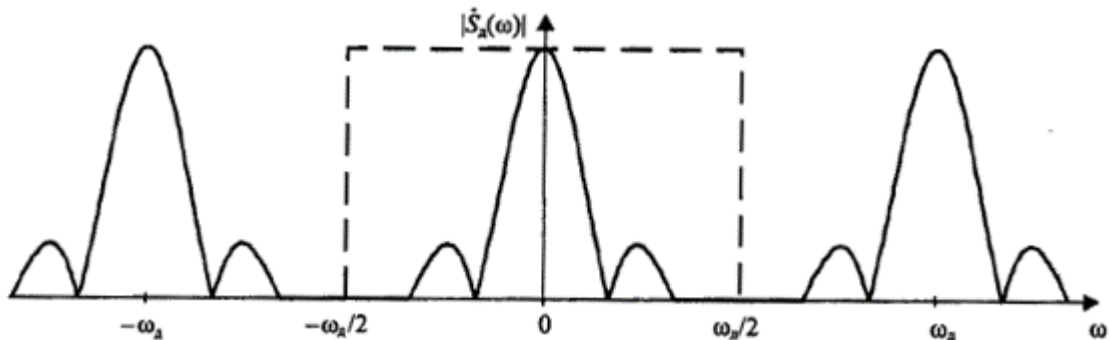


Рис. 4 – Спектр дискретного сигналу

Якщо відома спектральна функція безперервного сигналу $S(\omega)$, то застосування прямого перетворення Фур'є до формули (21.3) з урахуванням відомої спектральної функції допоміжної періодичної послідовності $y_T(t)$, дає нам ось такий вираз для спектральної функції дискретного сигналу:

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} S(\omega - n\omega_d), \quad \text{де } \omega_d = 2\pi/T \quad (21.4)$$

Дана формула виводиться з формули (21.3) за рахунок подання послідовності дельта-імпульсів $y_T(t)$ у вигляді ряду Фур'є. Нескінченна періодична послідовність дельта-функцій (рис. 5), віддалених одна від одної на один і той же інтервал часу T (T – період, $\omega_d = 2\pi/T$ – кутова частота), може бути представлена рядом Фур'є, як і будь-який інший періодичний сигнал (див. лекції 2-5). Вибираємо представлення ряду Фур'є в комплексній формі (формула 4.11 лекції 4):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k e^{jk\omega t} \quad (21.5)$$

Цю формулу для аналізованого сигналу $y_T(t)$ у вигляді послідовності дельта-імпульсів (21.2) перепишемо таким чином:

$$y_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_d t} \quad (21.6)$$

Залишилося знайти коефіцієнти C_n цього розкладання, що ми й зробимо за допомогою формули 4.22 з лекції 4:

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_T(t) \exp(-jk\omega_d t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t-kT) \exp(-jk\omega_d t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp(-jk\omega_d t) dt = \frac{1}{T} \exp(-jk\omega_d \cdot 0) = \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (21.7)$$

При виведенні формули враховується, що з усієї суми $\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t-kT)$ на інтервалі інтегрування від $-T/2$ до $T/2$ знаходиться тільки одна єдина дельта-функція. Це саме та дельта-функція з усіх $\delta(t-kT)$, в якій $k=0$, тобто це просто $\delta(t)$. Всі інші дельта функції з цієї суми (у яких $k \neq 0$) знаходяться за межами інтервалу інтегрування. При виведенні цієї формули також використовується фільтрувальна властивість дельта-функції (дивись лекцію 1).

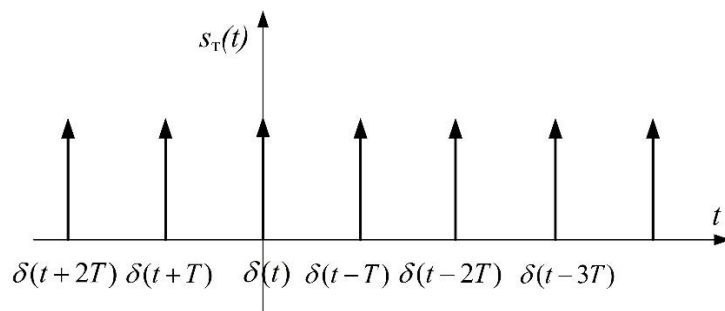


Рис. 5 Послідовність дельта-функцій (дельта-імпульсів)

Тепер, знаючи коефіцієнти C_n ми можемо записати сигнал $y_T(t)$ у вигляді ряду Фур'є у відповідності до (21.6) та (21.7):

$$y_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{jn\omega_d t} \quad (21.8)$$

і використати це представлення $y_T(t)$ у формулі (21.1) замість $\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t-kT)$.

Тоді отримуємо:

$$s_d(t) = s(t) \cdot y_T(t) = s(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{jn\omega_d t} \quad (21.9)$$

Тепер для отримання формули (21.4) нам залишилося тільки знайти спектральну функцію сигналу $s_d(t)$ шляхом застосування прямого

перетворення Фур'є з використанням отриманого представлення дискретизованого сигналу $s_d(t)$ у вигляді (21.9):

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_d(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[s(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_d t} \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{jn\omega_d t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j(\omega - n\omega_d)t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\omega - n\omega_d) \end{aligned} \quad (21.10)$$

Нагадаємо, що ми виходимо з того, що спектральна функція первинного безперервного сигналу $S(\omega)$, який піддано дискретизації за часом, нам відома. Власне, завдання саме в тому й полягало, щоб знайти зв'язок між спектрами дискретизованого та первинного безперервного сигналів. Цей зв'язок наочно демонструється отриманою формулою.

Дана формула вказує, що спектр $S_d(\omega)$ дискретизованого дельта-функціями сигналу являє собою нескінченний ряд зсунутих на $\omega_d = 2\pi/T$ один щодо іншого копій спектру $S(\omega)$ первинного безперервного сигналу $s(t)$. Відстань по частоті ω_d між сусідніми копіями спектру дорівнює частоті дискретизації $2\pi/T$.

Головна властивість спектру будь-якого дискретного сигналу полягає в тому, що його спектр є періодичним, і його період дорівнює круговій частоті дискретизації $2\pi/T$.

Слід також зазначити, що через наявність у формулі (21.10) множника $1/T$ спектр дискретизованого сигналу має розмірність, яка збігається з розмірністю сигналу.

Якщо ж замість абстрактних, фізично нездійсненних дельта-функцій в допоміжній послідовності $y_T(t)$ розглядати реальні функції у вигляді досить вузьких прямокутних імпульсів амплітудою U_0 і тривалістю τ_0 (рис. 3а), то спектральна функція отриманого в результаті дискретизації сигналу буде мати дещо інший вигляд:

$$S_d(\omega) = U_0 \frac{\tau_0}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\omega - n\omega_d) \frac{\sin(n\omega_d \tau_0 / 2)}{n\omega_d \tau_0 / 2} \quad (21.11)$$

Ця формула може бути отримана точно таким самим способом, яким було отримано формулу (21.10). Тільки в цьому випадку замість (21.8) використовується представлення рядом Фур'є нескінченної періодичної послідовності прямокутних імпульсів у вигляді (див. лекцію 3, формула 3.1 і лекцію 2, формула 2.20):

$$y_T(t) = \frac{A}{q} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{q}\right)}{\frac{\pi n}{q}} e^{jn\omega_d t} \quad (21.12)$$

Ця формула є наслідком розкладання прямокутного імпульсу в ряд Фур'є, яке розглянуто в лекції 5. Формула 5.2 цієї лекції показує, що коефіцієнт a_k синусно-косинусної форми ряду Фур'є для прямокутного імпульсу дорівнює:

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) = \frac{2A}{q} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}} \quad (21.13)$$

Коефіцієнти комплексної та синусно-косинусної форми ряду Фур'є, як відомо (дивись формулу 4.19 лекції 4), пов'язані наступним співвідношенням:

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \quad (21.14)$$

Оскільки b_k для прямокутного імпульсу дорівнює нулю, то й маємо, що для прямокутного імпульсу

$$C_k = \frac{A}{q} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}} \quad (21.15)$$

звідки й витікає на основі (21.5) формула (21.12). Підставляємо цю формулу (21.12) в вираз (21.1) і тоді дискретизований сигнал отримуємо в наступному аналітичному вигляді:

$$s_d(t) = s(t) \cdot y_T(t) = s(t) \frac{A}{q} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{q}\right)}{\frac{\pi n}{q}} e^{jn\omega_d t} \quad (21.16)$$

Саме цю формулу й використовують замість (21.8). Якщо зробити усі необхідні математичні викладки, то в кінцевому рахунку отримаємо формулу (21.11) для спектральної функції сигналу, дискретизація якого відбувалася реальними прямокутними імпульсами, а не абстрактними дельта-функціями. Амплітудний спектр сигналу за реальної дискретизації представлено нижче.

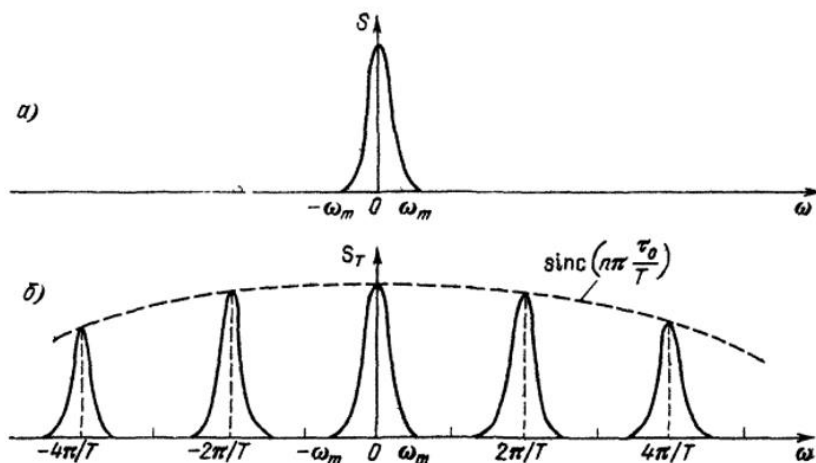


Рис. 6 - Спектральні функції первинного безперервного сигналу (а) і реальна спектральна функція дискретизованого (б) сигналу

Тобто, спектр $S_d(\omega)$ дискретизованого прямокутними імпульсами сигналу являє собою послідовність спектрів $S(\omega)$ вихідного сигналу $s(t)$, зсунутих один щодо іншого на $\omega_d = 2\pi/T$, які вбувають за законом $\frac{\sin(n\omega_d\tau_0/2)}{n\omega_d\tau_0/2}$.

Одержаний графік спектральної функції реального дискретного сигналу представлено на малюнку 6.

Отримання спектральної функції дискретизованого сигналу за відліками

Розглянемо інший спосіб отримання спектральної функції дискретного (цифрового) сигналу. Подання $s_d(t)$ в формі (21.3) істотно спрощує спектральний аналіз дискретних сигналів. Наприклад, спектральну функцію $S_d(\omega)$ можна визначити безпосередньо за сукупністю часових відліків $s(kT)$, без звернення до спектру $S(\omega)$ первинного аналогового сигналу. Дійсно, застосувавши пряме перетворення Фур'є до виразу (21.3) в випадку, коли сигнал $s(t)$ з'являється в момент часу нуль [тоді $k = 0, 1, \dots, \infty$], отримаємо:

$$\begin{aligned}
 S_d(\omega) &= \int_0^{\infty} s_d(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} s(kT) \delta(t - kT) \right] e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} s(kT) \int_0^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT) e^{-j\omega kT}
 \end{aligned}
 \tag{21.17}$$

Перетворення, які було виконано при виведенні цієї формули, використовують властивість лінійності перетворення Фур'є (див. лекцію 7), а також фільтрувальну властивість дельта-функції (див. лекцію 1).

Характер спектру дискретизованого сигналу ще раз демонструє частотно-часову дуальність перетворення Фур'є:

- періодичний сигнал - \gg дискретний спектр;
- періодичний спектр - \gg дискретний сигнал.

На початку була представлена формула (21.4), яка передбачає, що відліки $s(kT)$ отримано шляхом дискретизації аналогового сигналу $s(t)$, і вона показує зв'язок між спектрами дискретизованого і аналогового сигналів. Формула (21.17) дозволяє розрахувати спектр послідовності відліків $s(kT)$, ніяк не зв'язуючи ці відліки з аналоговим сигналом. Важливо вказати, що ці дві формули дають однаковий результат.

Відновлення безперервного сигналу за дискретними відліками

Рисунок 4 наочно демонструє і спосіб відновлення безперервного сигналу по дискретним відлікам. Для цього необхідно пропустити дискретний сигнал через ідеальний фільтр нижніх частот (ФНЧ) з частотою зрізу, яка дорівнює половині частоти дискретизації. АЧХ такого фільтра показана на рис. 4 пунктиром.

Зрозуміло, що точне відновлення сигналу можливо, якщо зсунуті копії спектра не перекриваються. З рис. 4 видно, що для цього необхідно, щоб частота дискретизації як мінімум в два рази перевищувала верхню граничну частоту в спектрі сигналу ω_b :

$$\omega_d > 2\omega_b \quad (21.18)$$

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Аналого-цифрове і цифро-аналогове перетворення.
2. Аналітичне подання дискретизованого сигналу.
3. Спектр дискретного сигналу.
4. Отримання спектральної функції дискретизованого сигналу за відліками.

ЛЕКЦІЯ № 22

Тема: Частота Найквіста. Теорема Котельникова.

Зміст

Частота Найквіста	2
Відновлення безперервного сигналу за дискретними відліками (продовження)	3
Теорема Котельникова	5
Двійкова фазова маніпуляція.....	7
Контрольні питання за темою.....	8
Рівень модуля	8
Рівень курсу	8

Джерела:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.

Частота Найквіста

Гармонійний сигнал може бути адекватно представлений дискретними відліками, якщо його частота не перевищує половини частоти дискретизації (ця частота називається частотою Найквіста (*Nyquist frequency*)- $f_N = f_d/2 = 1/(2T)$; $\omega_N = \omega_d/2 = \pi/T$). Походження цього обмеження пояснює рисунок 1. В залежності від співвідношення між частотою Найквіста і частотою гармонійного сигналу, що дискретизується, можливо мати такі три випадки.

1. Якщо частота гармонійного сигналу менше частоти Найквіста, то дискретні відліки дозволяють правильно відновити аналоговий сигнал (рис. 1, а).

2. Якщо частота гармонійного сигналу дорівнює частоті Найквіста, то дискретні відліки дозволяють відновити аналоговий гармонійний сигнал з тією ж частотою, але амплітуда і фаза відновленого сигналу (він показаний пунктирною лінією) можуть бути спотворені (рис. 1, б). У найгіршому випадку всі дискретні відліки синусоїди можуть виявитися рівними нулю.

3. Якщо частота гармонійного сигналу більше частоти Найквіста, то відновлений за дискретними відліками аналоговий сигнал буде також гармонійним (він показаний пунктирною лінією), але з іншою частотою (рис. 1, в). Даний ефект носить назву появи помилкових частот (*aliasing*), ми продовжимо його розгляд в наступному розділі.

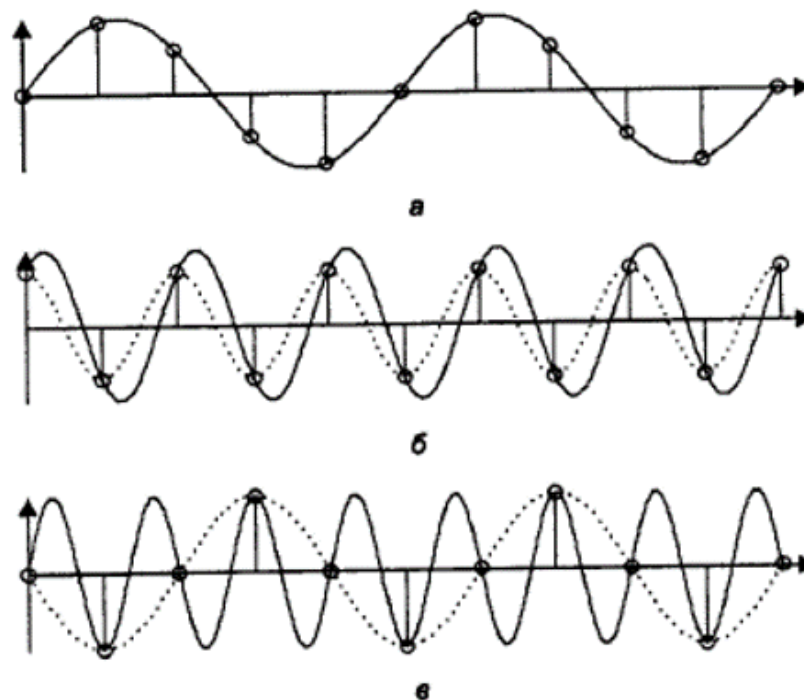


Рис. 1 - Дискретизація гармонійних сигналів з різною частотою

Відновлення безперервного сигналу за дискретними відліками (продовження)

На рисунку 2 представлено спосіб відновлення безперервного сигналу за дискретними відліками. Для відновлення аналогового сигналу необхідно пропустити дискретний сигнал через ідеальний фільтр нижніх частот (ФНЧ) з частотою зрізу, яка дорівнює половині частоти дискретизації. АЧХ такого фільтра показано на рис. 2 пунктиром.

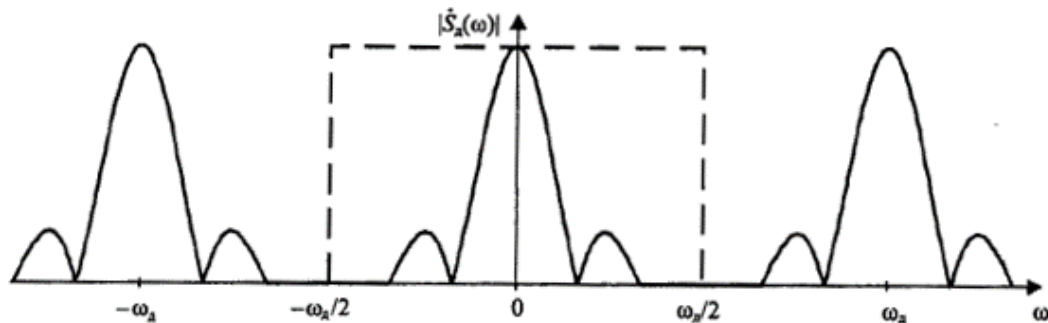


Рис. 2 - Спектр дискретного сигналу

Очевидно, що точне відновлення сигналу можливо, якщо зсунуті копії спектра не перекриваються. З рис. 2 видно, що для цього необхідно, щоб частота дискретизації як мінімум в два рази перевищувала верхню граничну частоту в спектрі сигналу ω_B :

$$\omega_d > 2\omega_B \quad (22.1)$$

У разі, якщо ця умова не виконується, зсунуті копії спектра будуть накладатися один на одного, що призведе до неминучих спотворень під час відновлення безперервного сигналу (рис. 3).

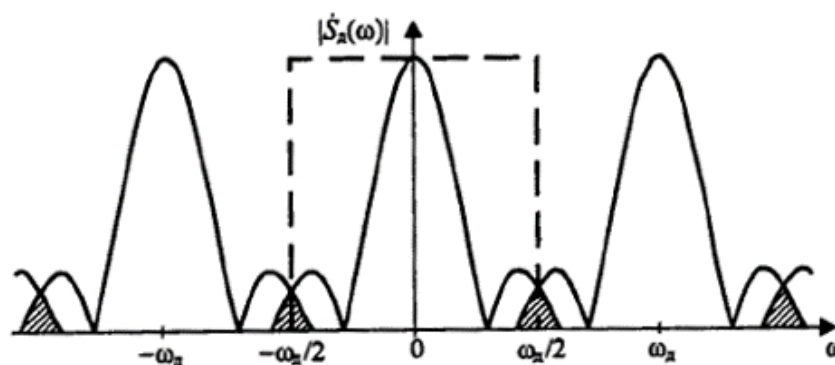


Рис. 3 - Перекриття зсунутих копій спектра за недостатньо високої частоти дискретизації

Ці спотворення викликані тим, що спектральні складові сигналу з частотами, що перевищують частоту Найквіста, яка дорівнює $\omega_d/2$, не можуть бути відновлені правильно: вони викликають накладення «хвостів» сусідніх

зсунутих копій спектру і приводять до появи помилкових частот (aliasing), про яке ми вже говорили.

Якщо сигнал, який підлягає дискретизації, містить спектральні складові з частотами, що перевищують частоту Найквіста, корисно попередньо пропустити його через ФНЧ з частотою зрізу, рівною частоті Найквіста (рис. 4). В цьому випадку все рівно будуть втрачені високочастотні складові – зберегти їх можна лише шляхом підвищення частоти дискретизації. Однак, завдяки відсутності накладення «хвостів» не відбудеться поява помилкових частот і діапазон частот $0 \dots \omega_D/2$ буде представлений в дискретному сигналі без спотворень.

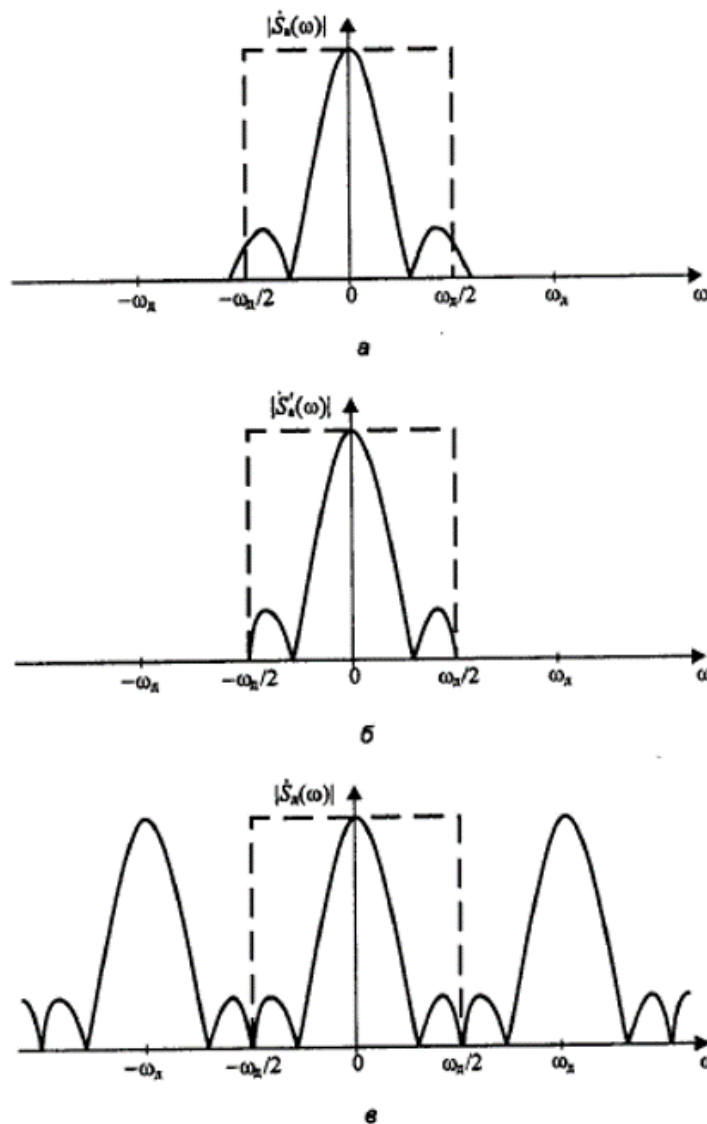


Рис. 4 – Під час дискретизації сигналу, що містить високочастотні складові (а), корисно попередньо пропустити його через ФНЧ (б), щоб уникнути появи помилкових частот (в)

Теорема Котельникова

На початку даної лекції було сформульовано твердження про те, що деякі сигнали можуть бути без втрат інформації представлені своїми дискретними відліками. Отриманий в попередній лекції вираз для спектру дискретизованого сигналу дозволяє виділити той клас сигналів, для яких це можливо, та визначити спосіб такого відновлення.

Спектр дискретизованого сигналу являє собою суму зміщених копій спектру первинного аналогового сигналу, при цьому крок зміщення дорівнює частоті дискретизації ω_d . З рис. 2 видно, що якщо в спектрі аналогового сигналу не міститься складові з частотами, що перевищують частоту Найквіста ($\omega_d/2$), то зсунуті копії спектра не будуть перекриватися. У цьому випадку використання ідеального ФНЧ з прямокутною АЧХ дозволить виділити вихідну (незміщену) копію спектру, зосереджену навколо нульової частоти, і, таким чином, точно відновити вихідний аналоговий сигнал.

АЧХ ідеального ФНЧ, що відновлює аналоговий сигнал, наведено на рис. 5 зліва. Коефіцієнт передачі в смузі пропускання дорівнює T , а не одиниці, щоб компенсувати множник $1/T$ у формулі (21.4) попередньої лекції. За допомогою зворотного перетворення Фур'є знайдемо імпульсну характеристику фільтра (рис. 5 праворуч):

$$h(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}} \quad (22.2)$$

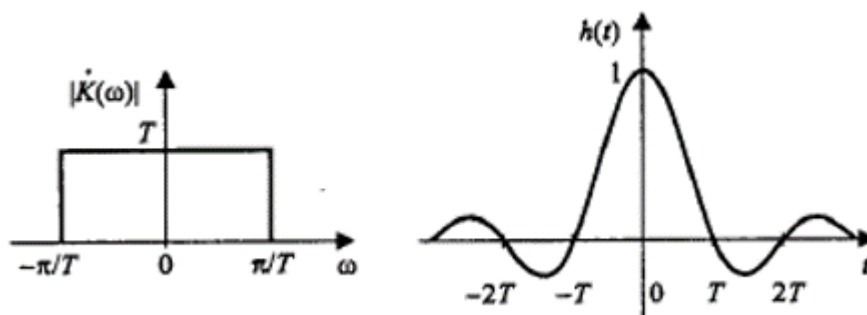


Рис. 5 – Амплітудно-частотна (зліва) та імпульсна (праворуч) характеристики ідеального відновлювального фільтра

Дискретизований сигнал (див. формулу 21.3 лекції 21) являє собою суму дельта-функцій. При проходженні такого сигналу через відновлювальний ФНЧ кожна дельта-функція породить на виході відповідним чином зміщену і масштабовану копію імпульсної характеристики фільтра. Вихідний сигнал який в точності відповідає первинному аналоговому сигналу), таким чином,

буде представляти собою суму зсунутих і помножених на відліки сигналу копій імпульсних характеристик ідеального ФНЧ (22.2):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)}{\pi \frac{t-kT}{T}} \quad (22.3)$$

Підводячи підсумок всьому вищесказаному, сформулюємо *теорему Котельникова*: будь-який сигнал $s(t)$, спектр якого не містить складових з частотами вище деякого значення, може бути без втрат інформації представлено своїми дискретними відліками $\{s(kT)\}$, взятими з інтервалом T , який задовольняє наступній нерівності:

$$T \leq \frac{1}{2f_B} = \frac{\pi}{\omega_B} \quad (22.4)$$

Відновлення вихідного безперервного сигналу $s(t)$ за набором його дискретних відліків $\{s(kT)\}$ здійснюється за формулою (22.3).

Дана теорема також називається теоремою Найквіста (*Nyquist theorem*) або теоремою дискретизації (*sampling theorem*).

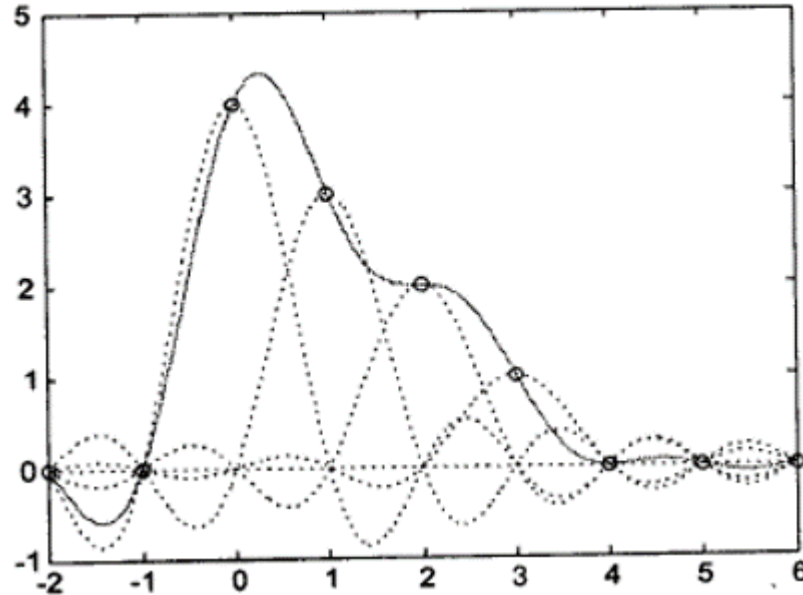


Рис. 6 - Відновлення безперервного сигналу за його дискретними відліками

Формула (22.3) являє собою розкладання сигналу $s(t)$ в ряд по системі функцій $\{\varphi_k(t)\}$, званої базисом Котельникова:

$$\varphi_k = \frac{\sin\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)}{\pi \frac{t-kT}{T}} \quad (22.5)$$

Формування безперервного сигналу за його дискретними відліками пояснює рис. 6. Пунктиром показані графіки окремих складових формули (22.3), суцільною лінією – відновлений сигнал.

Двійкова фазова маніпуляція

Цифровий сигнал для його передачі послідовним кодом через радіоефір має бути підданий модуляції за допомогою гармонійного коливання високої частоти. Найчастіше для цієї мети застосовується так звана двійкова фазова маніпуляція (англ. BPSK - *binary phase-shift keying*) – найпростіша форма фазової модуляції (дивись лекцію 19). Робота схеми двійкової фазової маніпуляції полягає в зміщенні фази опорного коливання на одне з двох значень: нуль або π (180°).

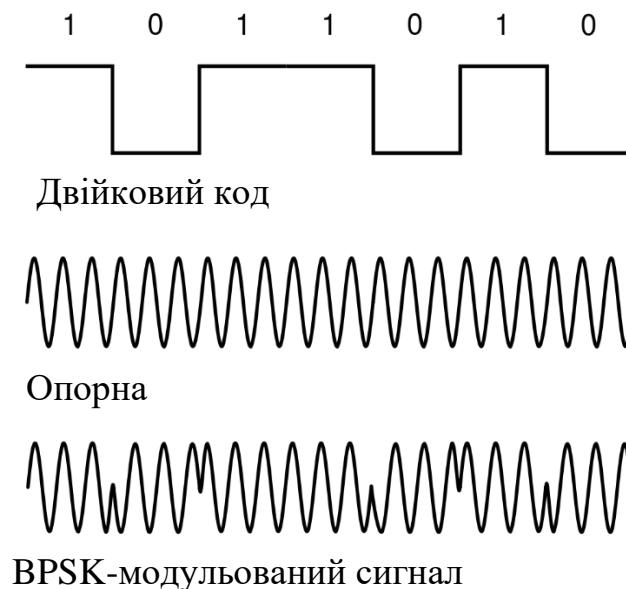


Рис. 7 - Двійкова фазова маніпуляція

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Частота Найквіста.
2. Відновлення безперервного сигналу за дискретними відліками.
3. Теорема Котельникова. Базис Котельникова.
4. Двійкова фазова маніпуляція