

Міністерство світи і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
фізико-технічний факультет
кафедра радіоелектронної автоматики

В.Б.Мазуренко

ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ

Конспект лекцій

Дніпро

2020

Наведено конспект лекцій з курсу «Основи цифрової обробки сигналів та зображень», який розроблено у відповідності до освітньо-професійних програм першого рівня вищої освіти «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та «Кібербезпека». Для студентів фізико-технічного факультету ДНУ, що навчаються за спеціальностями 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та 125 «Кібербезпека» на першому рівні вищої освіти.

Укладач: доцент кафедри радіоелектронної автоматики фізико-технічного факультету Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара Мазуренко Валерій Борисович.

Лекція 1

Тема: Вступ до цифрової обробки сигналів та зображень

Вміст

Природа аналогових і цифрових сигналів.....	2
Аналогові, дискретні та цифрові сигнали	2
Аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення	4
Цифрова обробка сигналів, її переваги та недоліки.....	4
Області застосування ЦОС	6
Предмет і завдання цифрової обробки зображень	8
Контрольні питання за темою.....	10
Рівень модуля	10
Рівень курсу.....	10

Джерел:

1. Сергієнко А.В. Цифрова обробка сигналів. - 3-е від. — SPb.: BHV-Петербург, 2011. — 768 с.: іл.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифрова обробка сигналів – М.: Техносфера, 2006. - 856 с.

Природа аналогових і цифрових сигналів

Усі сигнали, що їх сприймає, чи створює природа і, зокрема, людина – вони аналогові, тобто безперервні у часі. Але комп'ютер може працювати виключно з цифровими даними, які є дискретними, тобто визначеними лише в окремі моменти часу, вони не є безперервними. Людина не може приймати цифровий сигнал, наприклад, цифровий звук, в той час як комп'ютер не може працювати з аналоговим сигналом. Тому обов'язковою складовою системи, пов'язаною з реальним фізичним об'єктом, має бути пристрій, який спочатку перетворює аналоговий сигнал (наприклад, електричний сигнал від мікрофона, який відповідає звуку) у цифрову форму, і ще один пристрій, який потім виконує обернену задачу - перетворення сигналу з цифрової форми в аналогову (знову в електричний сигнал, який потім динамік перетворює на звуковий сигнал). Перший пристрій називається "аналого-цифровий перетворювач", скорочено АЦП. Другий пристрій "цифро-аналоговий перетворювач" – ЦАП.

Ці два пристрої: АЦП і ЦАП, – входять до складу будь-якої інформаційної або керуючої системи, коли ці системи пов'язані з фізичними об'єктами, або з природним джерелом сигналів. Аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення завжди відбувається в електричній формі. Перетворюються виключно електричні сигнали. Тобто спочатку фізична величина, як звук, наприклад, має перетворитися в електричний сигнал, а вже потім виконується перетворення сигналу на цифровий код. У зворотному напрямку: спочатку перетворення «цифра – аналог» для електричних сигналів; потім безперервний, аналоговий електричний сигнал перетворюється в певну фізичну величину, наприклад, в акустичний сигнал.

Аналогові, дискретні та цифрові сигнали

Первинний фізичний сигнал є безперервною функцією часу. Такі сигнали, що визначені в геть усі моменти часу, називають аналоговими (*analog*). Послідовність чисел, яка представляє сигнал під час цифрової обробки, є дискретним рядом (*discrete series*) і не може повністю відповідати аналоговому сигналу. Числа, що становлять послідовність, є значеннями сигналу в окремі (дискретні) моменти часу і називаються відліками сигналу (*samples*). Як правило, відліки беруться через рівні проміжки часу T , які називають періодом дискретизації (або інтервалом, кроком дискретизації – *sample time*). Величина, обернена до періоду дискретизації, називається частотою дискретизації (*sampling frequency*): $f_s = 1/T$.

Зрозуміло, що коли сигнал представлено тільки окремим набором дискретних відліків, то це призводить до втрати інформації щодо первинного аналогового сигналу, оскільки ми нічого не знаємо про поведінку сигналу в

проміжках між відліками. Однак, як буде показано в наступній лекції (розділ «Теорема Котельникова»), існує клас аналогових сигналів, для яких такої втрати інформації не відбувається і які можуть бути точно відновлені за відомими значеннями дискретних відліків.

Процес перетворення аналогового сигналу на послідовність відліків називається дискретизацією (*sampling*), а результат такого перетворення – дискретним сигналом.

Під час обробки сигналу в обчислювальних пристроях його відліки представляються у вигляді двійкових чисел, які мають лише певну обмежену кількість розрядів. Внаслідок цього відліки можуть набувати лише ті значення, які входять в деяку скінченну множину чисел. Отже, в разі представлення сигналу цифровим кодом неминуче має відбуватися округлення його відліків до тих значень, які входять в цю множину. Процес перетворення відліків сигналу у числа називається квантуванням за рівнем (*quantization*), а помилки округлення, які в цьому разі виникають, називають помилками (або *шумами*) квантування (*quantization error, quantization noise*).

Сигнал, дискретний у часі, але не квантований за рівнем, називається просто дискретним (*discrete-time*) сигналом. Сигнал, дискретний у часі і квантований за рівнем, називають цифровим *сигналом*. Сигнали, квантовані за рівнем, але безперервні в часі, на практиці зустрічаються рідко. Різницю між аналоговими, дискретними та цифровими сигналами ілюструє рис. 1.

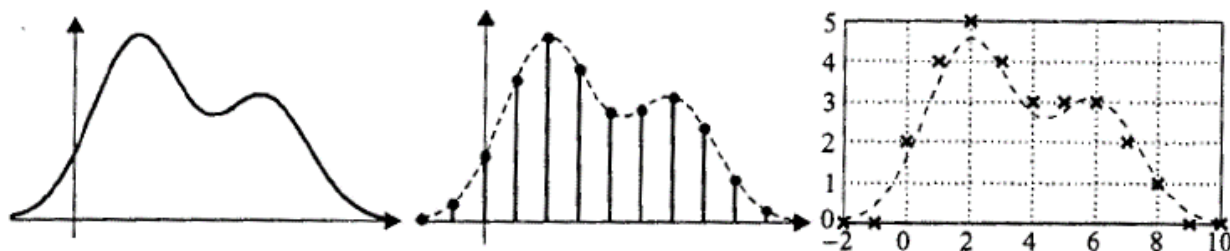


Рис. 1 – Аналоговий (ліворуч), дискретний (в центрі) та цифровий сигнали

Обчислювальні пристрої, призначені для обробки сигналів, можуть оперувати лише цифровими сигналами. Існують також пристрої, побудовані переважно на базі аналогової схемотехніки, які працюють з дискретними сигналами, представленими у вигляді імпульсів різної амплітуди або тривалості. Щоб підкреслити відсутність квантування за рівнем, такі пристрої іноді називають *дискретно-аналоговими* (ДАУ).

Дискретні та цифрові сигнали за своїми властивостями дуже близькі і описуються в теорії однаково чиним. Відмінність між ними полягає лише у наявності чи відсутності квантування. Ця відмінність практично зникає, коли крок квантування дуже малий (коли розрядність АЦП велика), або коли

послідовність цифрових відліків генерується обчислювальними засобами: в цьому разі похибка квантування визначається точністю представлення чисел дійсного типу в даному комп'ютері. Оскільки ефекти, пов'язані з квантуванням за рівнем, здебільшого незначні, то до цього курсу їх розгляд не входить.

Аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення

Узагальнена структура системи цифрової обробки сигналів наведена на рис. 2. На вхід надходить аналоговий сигнал $s_{вх}(t)$. Його дискретизація у часі та квантування за рівнем проводяться в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП; англійський термін - *Analog-to-Digital Converter*, ADC). Взагалі ці два процеси – дискретизація та квантування – є незалежними один від одного, але вони найчастіше виконуються всередині однієї мікросхеми. Вихідним сигналом АЦП є послідовність чисел, що надходить у цифровий процесор ЦП, який виконує необхідну обробку. Процесор здійснює різноманітні математичні операції над вхідними відліками; відліки, що отримані раніше, та проміжні результати можуть зберігатися у пам'яті процесора для використання у наступних обчисленнях. Результатом роботи процесора є нова послідовність чисел, що є відліками вихідного сигналу. Аналоговий вихідний сигнал $s_{вих}(t)$ відновлюється за цією послідовністю чисел за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП; англійський термін - *Digital-to-Analog Converter*, DAC). Напряга на виході ЦАП має ступінчасту форму (це також показано на рис. 2); за необхідності ця напруга за допомогою згладжувального фільтру Φ може бути перетворена вихідний сигнал, який змінюється доволі плавно.

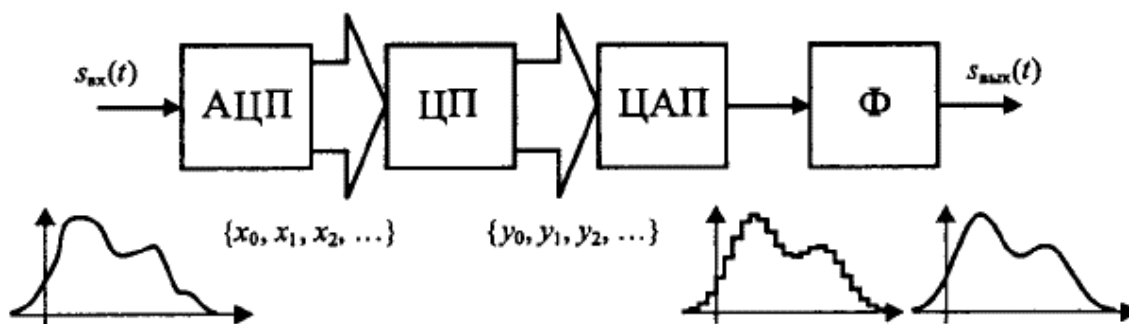


Рис. 2 – Схема побудови системи цифрового оброблення сигналів

Пристрої, реалізовані з допомогою структури типу рис. 2, можуть мати найрізноманітніший характер. У цифровій формі можна створювати фільтри, аналізатори спектру, нелінійні перетворювачі сигналів, кодувальники, шифрувачі та багато іншого.

Цифрова обробка сигналів, її переваги та недоліки

Під сигналом в загальному випадку ми розуміємо будь-яку змінну, яка передає або містить певний вид інформації, і яку можна, наприклад,

переносити, виводити на екран або виконувати з нею якісь дії. Особливий інтерес становлять такі типи сигналів:

- мова, з якою ми маємо справу, наприклад, під час розмови телефоном, прослуховуванні радіо та у повсякденному житті;
- біомедичні сигнали, такі як електроенцефалограма (сигнали мозку);
- звуки та музика, подібні до тих, що відтворює програвач;
- відео- та теле- зображення;
- сигнали радарів, які досліджують заданий діапазон та пеленгують віддалені цілі.

Сигнали, які існують у природі, є за своєю формою аналоговими. Це означає безперервну зміну в часі певних фізичних величин (наприклад, звукові хвилі). Сигнали, що застосовуються в ЦОС (Цифровій Обробці Сигналів), зазвичай походять від аналогових сигналів, дискретизованих через рівні інтервали часу і перетворених у цифровий вигляд.

Обробка цифрового сигналу зазвичай потрібна задля усунення інтерференції чи шуму, отримання спектру даних чи перетворення сигналу на зручнішу форму. В даний час ЦОС використовується в багатьох галузях, де раніше застосовувалися лише аналогові методи. В наш час з'явилися абсолютно нові області застосування, де було складно або неможливо користуватися аналоговими пристроями. Привабливість ЦОС обумовлена такими основними перевагами.

- ✓ Гарантована точність. Точність визначається лише кількістю задіяних бітів.
- ✓ Досконала відтворюваність. Можна з повною ідентичністю відтворити кожен елемент, оскільки відсутні відхилення, зумовлені стійкістю окремих складових. Наприклад, використовуючи методи ЦОС, цифрові записи можна копіювати або відтворювати багаторазово без погіршення якості сигналу.
- ✓ Відсутнє спотворення характеристик через температуру або старість.
- ✓ Напівпровідникові технології дозволяють підвищити надійність, зменшити розміри, знизити вартість, знизити енергоспоживання та збільшити швидкість роботи.
- ✓ Значна гнучкість. Системи ЦОС можна запрограмувати та перепрограмувати на виконання різних функцій без зміни устаткування. Це, мабуть, одна з найважливіших особливостей ЦОС.
- ✓ Висока продуктивність. ЦОС можна використовувати для виконання функцій, які неможливі під час аналогової обробки сигналів. Наприклад, можна отримати лінійну фазову характеристику та реалізувати складні алгоритми адаптивної фільтрації.

- ✓ У деяких випадках інформація може бути записана в цифровому вигляді, і обробляти її можна тільки методами ЦОС.

У ЦОС також є і свої недоліки. Однак завдяки новим технологіям значення цих недоліків постійно зменшується.

- Швидкість та витрати. Проекти ЦОС можуть бути затратними, особливо за великої ширини смуги сигналу. В даний час швидкісні АЦП/ЦАП (аналого-цифрові/цифро-аналогові перетворювачі) або занадто дорогі, або не мають достатньої роздільної здатності для великої ширини смуги. На даний момент для обробки сигналів у мегагерцовому діапазоні можна використовувати лише спеціалізовані інтегральні схеми, але вони є досить дорогими. Більш того, більшість пристроїв ЦОС ще не мають достатньої швидкості і можуть обробляти сигнали тільки із середньою шириною смуги. Сигнали із шириною близько 100 МГц все ще обробляються аналоговими методами. Проте пристрої ЦОС стають дедалі швидкіснішими.
- Час на розробку. Поки ви не знайомі з методиками ЦОС, і у вас немає необхідних ресурсів (програмних пакетів тощо), розробка коштів ЦОС буде забирати дуже багато часу, а в деяких випадках буде майже неможлива. Гостра нестача фахівців у цій галузі добре відома. Проте ситуація змінюється, оскільки вже багато випускників вузів розуміються на цифрових методах, а комерційні організації все частіше починають використовувати у своїй продукції переваги ЦОС.
- Проблеми кінцевої розрядності. У реальних ситуаціях економічні міркування наказують використовувати в алгоритмах ЦОС обмежену кількість бітів. Якщо для представлення змінної використовується недостатнє число бітів, то у деяких системах ЦОС це призводить до істотного зниження якості роботи системи.

Області застосування ЦОС

ЦОС – це одна з галузей сучасної електроніки, що найбільш швидко розвиваються, яка застосовується в будь-якій області, де інформація міститься в цифровому вигляді або контролюється цифровим процесором. До областей застосування можна віднести такі.

- Інструментальні засоби/контроль
 - спектральний аналіз;
 - контроль положення та швидкості;
 - зниження шуму;
 - стискання інформації.
- Мова/аудіо
 - розпізнавання мови;

- синтез мови;
- озвучування тексту;
- цифрові аудіосистеми.
- Військові цілі
- безпечний зв'язок;
- робота з радарями;
- робота з сонарами;
- керування ракетами.
- Обробка зображень
- розпізнавання зразків;
- комп'ютерний зір;
- поліпшення зображення;
- факсиміле;
- супутникові карти погоди;
- анімація.
- Телекомунікації
- усунення відлуння;
- адаптивне вирівнювання;
- транскодери;
- розширення спектру;
- відеоконференції;
- передавання даних.
- Біомедицина
- спостереження за пацієнтами;
- сканери;
- карти електроенцефалограми мозку;
- аналіз електрокардіограм;
- зберігання (покращення) рентгенівських знімків.
- Споживчі цілі
- цифрові мобільні телефони;
- супутникова система зв'язку;
- цифрове телебачення;
- цифрові камери;
- телефонний зв'язок, музика та відео;
- цифрові автовідповідачі, факси та модеми;
- системи голосової пошти;
- інтерактивні розважальні системи;
- керування системами в автомобілях.

З одного погляду на цей зовсім неповний перелік можна зрозуміти велике значення ЦОС. Про усвідомлення значення ЦОС свідчить постійне

використання потужних засобів ЦОС виробниками напівпровідникової техніки. У той же час не вистачає інженерів, які мають достатні знання у цій сфері. Мета даного курсу – забезпечити розуміння методів ЦОС та їх реалізації, дати студентам можливість опанувати практичні знання з такого важливого предмета.

Предмет і завдання цифрової обробки зображень

Цифрова обробка і розпізнавання зображень є самостійною дисципліною, яка швидко розвивається. Цифрова обробка зображень передбачає обробку цифрових зображень за допомогою комп'ютерів або спеціалізованих пристроїв, які побудовані на цифрових сигнальних процесорах. Обробку зображень проводять не тільки для поліпшення зорового сприйняття зображень, але й задля класифікації об'єктів, яка виконується шляхом аналізу зображень.

У 60-ті роки минулого століття набула розвитку специфічна наука про зображення – «іконіка», яка присвячена дослідженню загальних властивостей зображень, цілей та завдань їх перетворення, обробки та відтворення, розпізнавання графічних образів. Термін «іконіка» походить від грецького «*eikon*», що означає зображення, образ. Сьогодні під ним розуміють «створення та обробку зображень за допомогою обчислювальних машин», що збігається з поняттям комп'ютерної обробки зображень.

Області застосування цифрової обробки нині значно розширюються, витісняючи аналогові методи обробки сигналів зображень. Методи цифрової обробки широко застосовують у промисловості, мистецтві, медицині, космосі. Вони застосовуються задля керування процесами, автоматизації виявлення та супроводження об'єктів, розпізнаванні образів та у багатьох інших застосунках. Цифрова передача зображень з космічних апаратів, цифрові канали передачі сигналів зображень вимагають забезпечення передачі все більших за об'ємом потоків інформації. Якщо для передавання цифрового сигналу кольорового телебачення необхідно передавати потоки порядку 216 Мбіт/с, то для передавання сигналу телебачення високої чіткості швидкість передачі має становити близько 1 Гбіт/с. Формування зображень, покращення якості та автоматизація обробки медичних зображень, включаючи зображення, створювані електронними мікроскопами, рентгенівськими апаратами, томографами тощо, є предметом дослідження та розробки. Сьогодні в медичній техніці широко застосовуються системи формування зображення, його перетворення на цифрову форму, візуалізація та документування шляхом введення в комп'ютер зображень за допомогою спеціалізованих пристроїв захоплення відео. Автоматичний аналіз у системах дистанційного спостереження широко застосовується задля аналізу

місцевості, у лісовому господарстві, наприклад, для автоматичного підрахунку площі вирубок, у сільському господарстві для спостереження за дозріванням урожаю, під час розвідки, у системах протипожежної безпеки. Контроль якості продукції виконується завдяки автоматичним методам аналізу сцен.

Комп'ютерна обробка зображень застосовується у завданнях експертизи живопису неруйнівними методами. Для відновлення старих фільмів застосовуються методи автоматичної компенсації дефектів відео, отриманого після перетворення кіно-зображення у відео.

Сьогодні важко уявити область діяльності, де можна обійтися без комп'ютерної обробки зображень. Інтернет, стільниковий телефон, відеокамера, фотоапарат, сканер, принтер, які так широко увійшли в наш побут, – немислимі без комп'ютерної обробки зображень.

Під час комп'ютерної обробки зображень вирішується широке коло завдань, таких як покращення якості зображень; вимірювання параметрів; спектральний аналіз багатовимірних сигналів; розпізнавання зображень; стиснення зображень.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Цифрова обробка сигналів, її переваги та недоліки.
2. Области застосування ЦОС.
3. Предмет та завдання цифрової обробки зображень.

Лекція № 2

Тема: Цифрові сигнали. Види сигналів. Теорема Котельникова.

Зміст

Процес перетворення аналогового сигналу на цифровий	2
Цифровий сигнал як числова послідовність	3
Стандартні послідовності та операції над ними	4
Відмінності у властивостях дискретних та безперервних комплексних експоненціальних та синусоїдальних послідовностей.....	8
Співпадіння послідовностей за кругових частот, які відрізняються на 2π	8
Періодичність	9
Зростання періоду осциляцій в разі зростання частоти вище, ніж π	11
Частота Найквіста	12
Теорема Котельникова. Вибір частоти дискретизації.....	13
Контрольні питання за темою.....	15
Рівень модуля	15
Рівень курсу	15

Источники:

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. — СПб.: БХВ–Петербург, 2011. — 768 с.: ил.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Техносфера, 2006. – 856с.

Процес перетворення аналогового сигналу на цифровий

Сигнали, які визначені в усі моменти часу, називають **аналоговими** (*analog*). Послідовність чисел, що представляє сигнал у цифровій обробці, є дискретним рядом (*discrete series*). Числа, що складають послідовність, є значеннями сигналу в окремі (дискретні) моменти часу, і вони називаються **відліками** сигналу (*samples*). Відліки беруться через рівні проміжки часу T , які зветься **періодом дискретизації** (або інтервалом, кроком дискретизації – *sample time*). Величина, обернена до періоду дискретизації, називається **частотою дискретизації** (*sampling frequency*): $f_s = 1/T$.

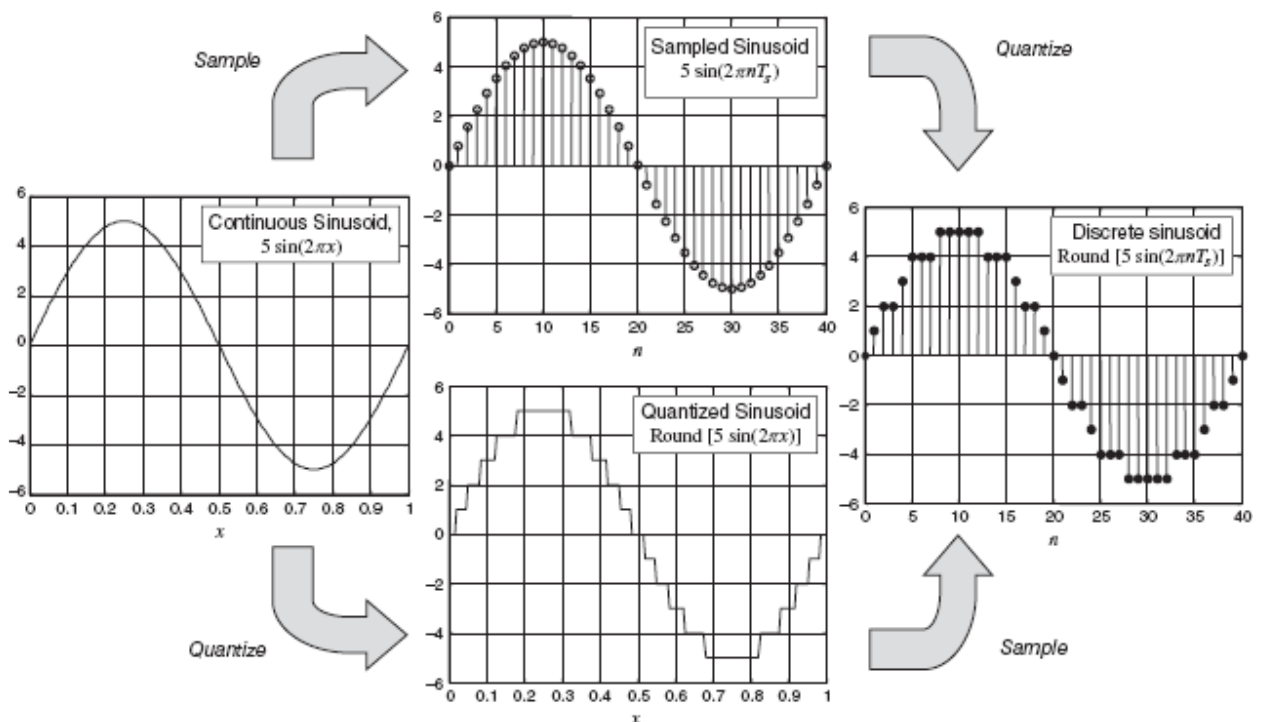


Рис 2.1 Процеси дискретизації та квантування під час перетворення аналогового сигналу на цифровий сигнал

Процес перетворення аналогового сигналу в послідовність відліків називається **дискретизацією** (*sampling*), а результат такого перетворення – дискретним сигналом.

Під час обробки сигналу в обчислювальних пристроях його відліки представляються у вигляді двійкових чисел, що мають обмежене число розрядів. Внаслідок цього відліки можуть приймати значення лише з певної кінцевої множини і, отже, при поданні сигналу неминуче відбувається його округлення. Процес перетворення відліків сигналу в числа називається **квантуванням за рівнем** (*quantization*), а виникаючі при цьому помилки округлення – помилками (або *шумами*) квантування (*quantization error, quantization noise*).

Сигнал, дискретний у часі та квантований за рівнем, називають **цифровим** (*digital*) сигналом.

Цифровий сигнал як числова послідовність

Математично дискретні сигнали є послідовностями чисел. Числова послідовність x , n -й член у якій позначають через $x[n]$, формально записується як

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < +\infty, \quad (2.1)$$

де n – ціле число.

Послідовність – це функція, визначена на множині цілих чисел. Зауважимо, що ми використовуємо квадратні дужки для позначення аргументу, а аргумент безперервної функції беремо в круглі дужки. Насправді такі послідовності виникають, наприклад, в разі перетворення аналогового сигналу в дискретну форму. І тут числове значення n -го члена послідовності дорівнює величині аналогового сигналу $x(t)$ в момент часу nT , тобто.

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < +\infty. \quad (2.2)$$

Число T називають *кроком дискретизації*, а число, зворотне до нього, $\frac{1}{T}$ – *частотою дискретизації*. Хоча послідовність може виникати не тільки в результаті перетворення сигналів, все рівно її член $x[n]$ зручно називати n -м відліком. Слід зауважити, що позначення послідовності у вигляді (2.2) досить громіздко, через це ми будемо вживати термін «послідовність $x[n]$ », хоча запис $x[n]$, строго кажучи, відноситься до окремого члена послідовності. Дискретні сигнали (тобто послідовності) зазвичай зображають так, як показано на рис. 3. Абсциса графіка представлена у вигляді безперервної прямої, проте важливо усвідомлювати, що величина $x[n]$ визначена лише за цілих значень аргументу n . Невірно думати, що $x[n]$ дорівнює нулю, коли n не є цілим числом. Насправді за цих аргументів $x[n]$ просто не визначено.

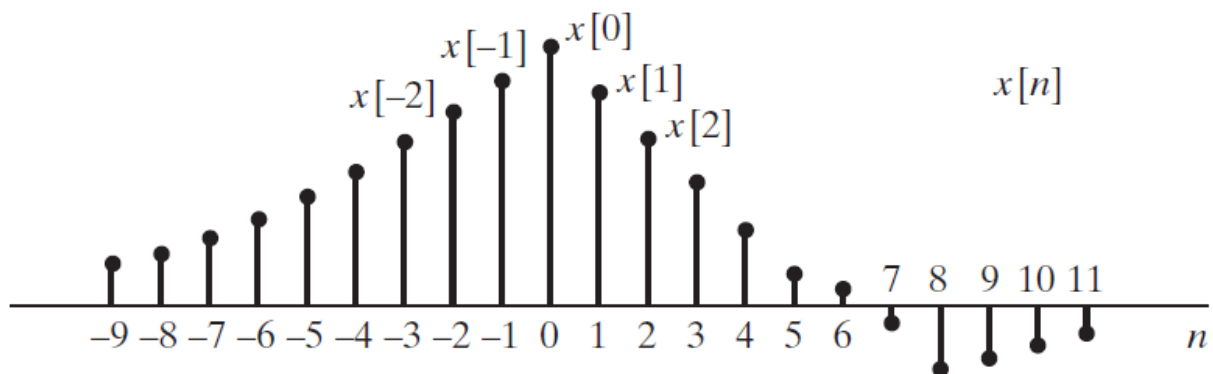


Рис. 2.1 Графічне представлення дискретного сигналу

В якості прикладу на рис. 4 а) показано фрагмент мовного сигналу, що відповідає варіаціям акустичного тиску, у вигляді функції від часу, а на рис. 4,

б) наведено послідовність відліків цього сигналу. У той час як вихідний мовний сигнал $s(t)$ визначено в будь-який момент часу t , дискретна послідовність $x[n]$ несе інформацію про цей сигнал лише для певних моментів часу. З теореми про дискретне представлення (Котельникова–Найквіста) випливає, що початковий сигнал можна відновити з послідовності відліків з будь-яким бажаним ступенем точності, якщо відліки були зроблені з достатньою частотою.

Стандартні послідовності та операції над ними

Під час аналізу дискретних сигналів, а також в системах обробки сигналів з послідовностями проводять деякі перетворення, основні з яких є наступні.

Добуток і сума двох послідовностей $x[n]$ і $y[n]$ визначаються почленно, тобто $z[n] = x[n] \cdot y[n]$ – добуток, а $w[n] = x[n] + y[n]$ – сума цих послідовностей.

Добутком послідовності $x[n]$ на число a вважається послідовність, що виходить з $x[n]$ в результаті множення кожного його члена на число a .

Послідовність $y[n]$ називають затриманою, або зсунутою версією послідовності $x[n]$, якщо

$$y[n] = x[n - n_0] \quad (2.3)$$

де n_0 - ціле число.

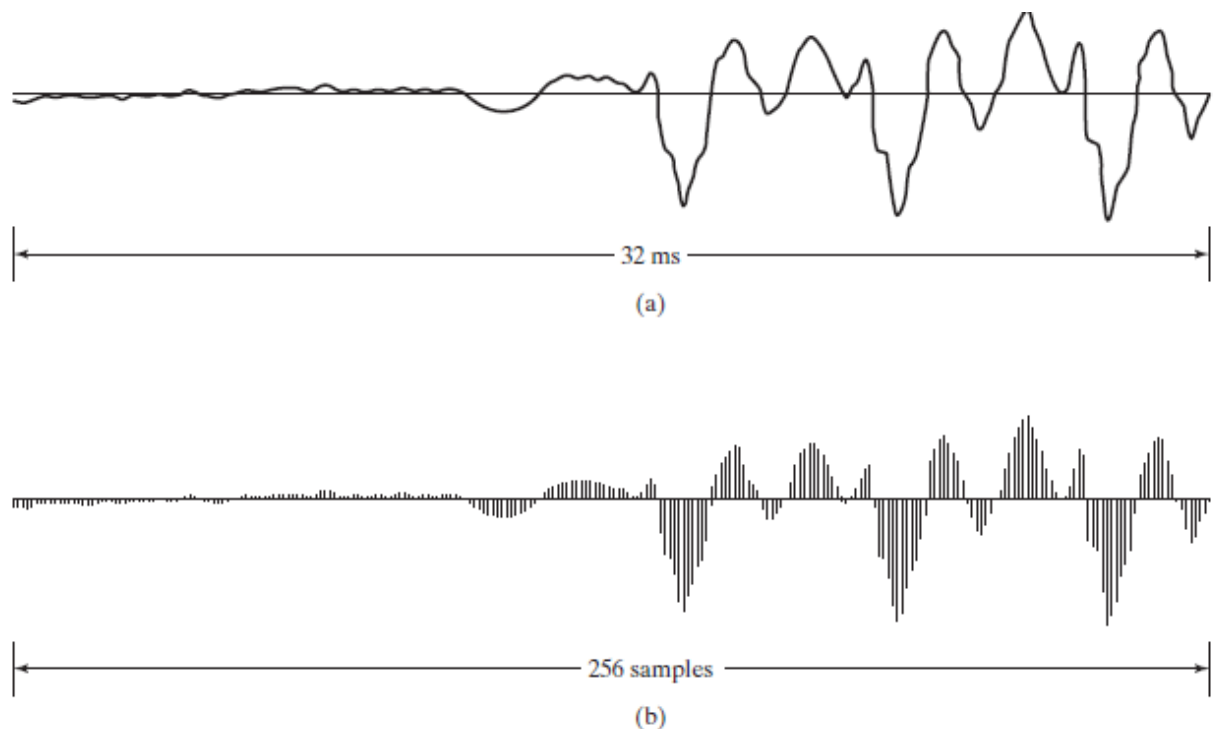


Рис. 2.2. а) фрагмент безперервного мовного сигналу; б) послідовність відліків, отримана з фрагмента а), якщо крок $T = 125$ мкс

Деякі з послідовностей особливо важливі під час обговорення теорії дискретних сигналів та систем. Їх представлено на рис. 2.3, а нижче надано їх опис.

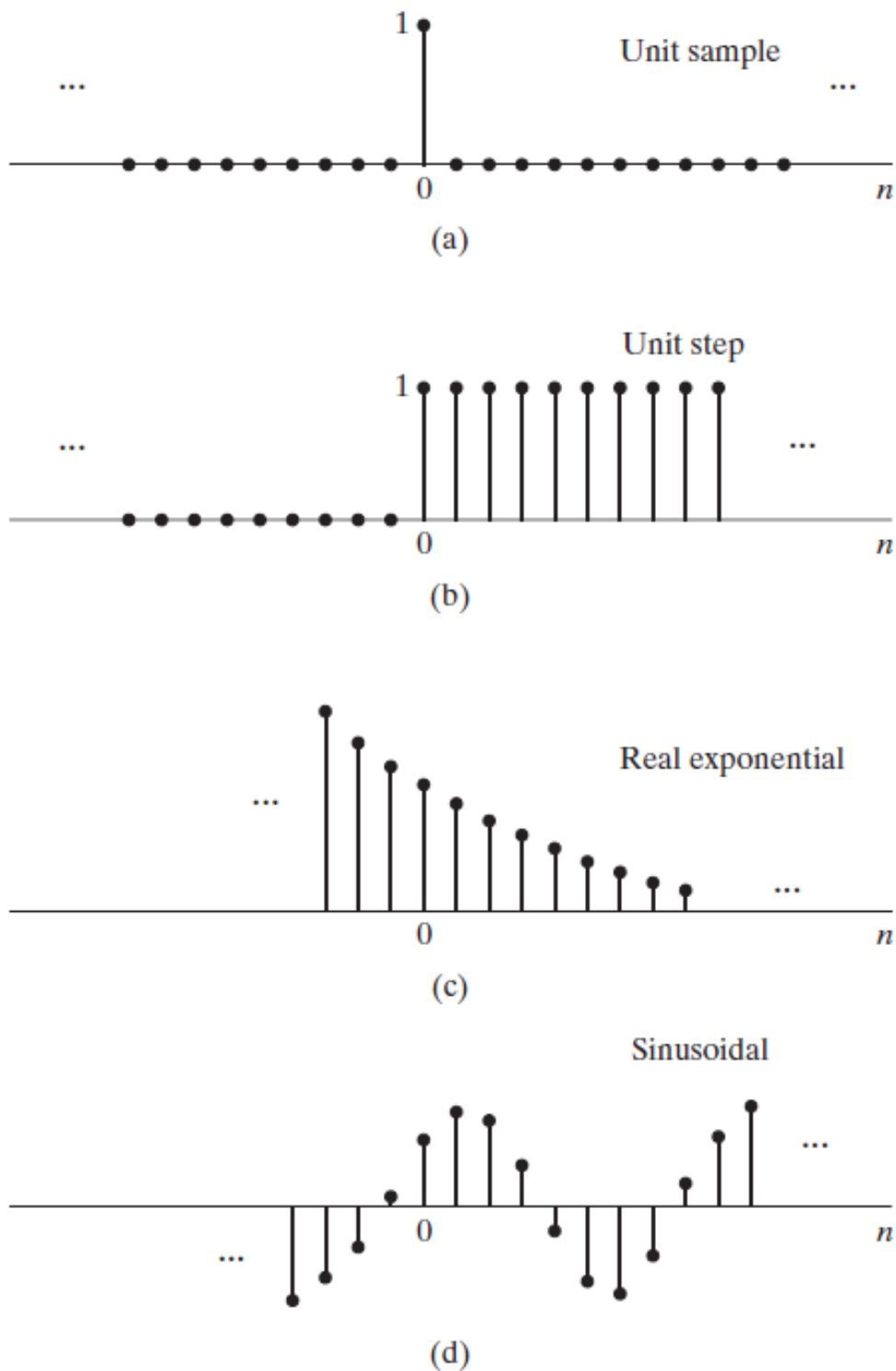


Рис. 2.3. Деякі стандартні послідовності: одиничний імпульс, одиничний стрибок, дійсна експонента, синусоїдальний сигнал

Одиничний імпульс (рис. 2.3а)) визначається як

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Як ми переконуємося, одиничний імпульс грає ту саму роль в теорії дискретних сигналів, як і дельта-функція Дірака в теорії безперервних сигналів. Послідовність з єдиним ненульовим відліком зручно називати *дискретним імпульсом*, або просто *імпульсом*. Слід зазначити, що дискретний імпульс – поняття значно простіший і зрозуміліше, ніж дельта-функція.

До однієї з важливих властивостей одиничного імпульсу відноситься той факт, що будь-яка послідовність може бути виражена у вигляді лінійної комбінації зсунутих одиничних імпульсів. Наприклад, послідовність $p[n]$ з рис. 2.4 подається у вигляді:

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7] \quad (2.5)$$

а для довільної послідовності справедливе співвідношення:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (2.6)$$

Формулу (2.6) буде використано для представлення дискретних лінійних систем.

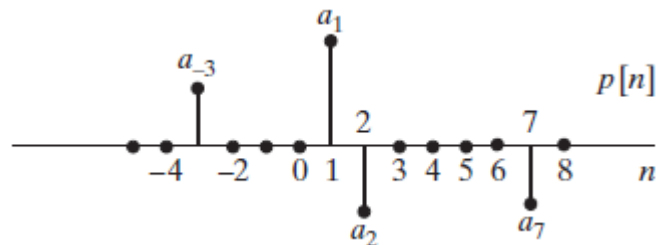


Рис. 2.4. Приклад послідовності, яка представляється у вигляді кінцевої лінійної комбінації зсунутих імпульсів

Одиничний стрибок (рис. 2.3b) визначається формулою

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Одиничний стрибок виражається через імпульс як:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (2.8)$$

тобто n -й відлік одиничного стрибка дорівнює сумі всіх членів імпульсної послідовності аж до n -го. Альтернативне представлення одиничного стрибка в термінах імпульсу отримуємо в результаті сумування зсунутих імпульсів: так само як у рівнянні (2.6). Усі ненульові члени одиничного стрибка дорівнюють одиниці, тому

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (2.9)$$

З іншого боку, імпульсна послідовність може бути виражена через одиничний стрибок як різниця:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (2.10)$$

Експонентна послідовність найбільш важлива для представлення та аналізу лінійних стаціонарних дискретних систем. Загалом такі послідовності записуються як

$$x[n] = A\alpha^n \quad (2.11)$$

Якщо A і α – дійсні числа, то відповідна послідовність теж називається дійсною. Якщо $0 < \alpha < 1$ і A позитивно, то значення послідовності позитивні і вони зменшуються коли n зростає – так як це показано на рис. 2.3с. Якщо $-1 < \alpha < 0$, то знаки членів послідовності чергуються, проте їх абсолютні значення зменшуються однаковою мірою. Нарешті, за $|\alpha| > 1$ послідовність зростає по абсолютній величині разом зі зростанням n .

Комбінування стандартних послідовностей

Доволі часто стандартні послідовності комбінуються для отримання якихось інших, нових послідовностей. Експоненціальну послідовність, члени якої дорівнюють нулю за $n < 0$, можна визначити як

$$x[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

що має досить незграбний вигляд. Така послідовність може бути задана простіше, а саме як вираз $x[n] = A\alpha^n u[n]$.

Синусоїдальна послідовність також грає не останню роль. В загальній формі вона має такий вигляд

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (2.13)$$

де A і φ – дійсні константи (рис. 2.3d).

Експоненціальна послідовність $A\alpha^n$ з комплексним α являє собою *комплексну експоненціальну послідовність*. Вона має дійсну та уявну частини,

які є синусоїдами. Більш точно, якщо $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ і $A = |A|e^{j\varphi}$, то послідовність $A\alpha^n$ можна записати одним з наступних способів

$$\begin{aligned} x[n] &= A\alpha^n = |A|e^{j\varphi} |\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ця послідовність осцилює з експоненціально зростаючою обвідною, якщо $|\alpha| > 1$, або з обвідною, що експоненціально зменшується, в разі $|\alpha| < 1$. (В якості найпростішого прикладу розберіть випадок $\omega_0 = \pi$).

Коли $|\alpha|=1$, послідовність називається *комплексною синусоїдальною послідовністю*:

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A|\cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A|\sin(\omega_0 n + \varphi) \quad (2.15)$$

В цьому випадку як дійсна, так й уявна частини послідовності змінюються синусоїдально залежно від n . За аналогією з випадком безперервного часу величину ω_0 називають (круговою) частотою комплексної синусоїди або комплексної експоненти, а φ – її фазою. Проте зауважимо, що n – ціле число без розміру. Тому ω_0 має вимірюватися в радіанах. Якщо ми хочемо відстежити тісну аналогію з випадком безперервного часу, то нам необхідно визначити одиницю частоти як радіани на відлік, а n вимірювати у відліках.

Відмінності у властивостях дискретних та безперервних комплексних експоненціальних та синусоїдальних послідовностей

Співпадіння послідовностей за кругових частот, які відрізняються на 2π

Той факт, що змінна n у формулі (2.15) завжди приймає лише цілі значення, підводить нас до розуміння деяких важливих відмінностей у властивостях дискретних та безперервних комплексних експоненціальних та синусоїдальних послідовностей. Різниця між безперервною та дискретною комплексною експонентою особливо помітна на частоті $(\omega_0 + 2\pi)$. В цьому випадку

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n} \quad (2.16)$$

Більш загальний факт: можна легко переконатися, що комплексні експоненціальні послідовності з частотами $(\omega_0 + 2\pi r)$, де $r \in \mathbb{Z}$, не відрізняються одна від одної! Аналогічне твердження справедливе також для синусоїдальних послідовностей:

$$x[n] = A \cos((\omega_0 + 2\pi r)n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \varphi) \quad (2.17)$$

Наслідки наявності цієї властивості у послідовностей, отриманих дискретизацією синусоїдальних та інших сигналів, ми ще зустрінемо згодом. На даний момент ми просто зазначимо, що під час розгляду комплексних експоненціальних сигналів, які мають вигляд $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$, або дійсних синусоїдальних сигналів типу $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$, ми повинні обмежуватись частотами, що лежать в інтервалі довжиною 2π , наприклад $-\pi < \omega_0 \leq \pi$, або $0 < \omega_0 \leq 2\pi$.

Періодичність

Наступна важлива відмінність дискретних комплексних експонентів та синусоїд від безперервних стосується їх періодичності. У безперервному випадку як синусоїдальний, так і комплексний експоненціальний сигнал є періодичною функцією, період якої дорівнює 2π , поділеному на частоту. У дискретному випадку послідовність вважають періодичною, якщо

$$x[n] = x[n + N] \text{ для всіх } n \quad (2.18)$$

де період N – ціле число. Перевіряючи цю умову для дискретних синусоїд, отримуємо:

$$A \cos(\omega_0 n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi) \quad (2.19)$$

звідки

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.20)$$

Аналогічне твердження має місце і для комплексної експоненціальної послідовності. Вона буде N -періодичною, тільки якщо

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \quad (2.21)$$

Ця рівність справедлива тоді і лише тоді, коли $\omega_0 N = 2\pi k$, як у співвідношенні (2.20). Отже, комплексна експоненціальна та синусоїдальна послідовності зовсім не обов'язково змінюються з періодом $\frac{2\pi}{\omega_0}$ в залежності від n , вони взагалі можуть бути неперіодичними! Їх періодичність, або неперіодичність залежить від значення частоти ω_0 .

Комбінуючи умову (2.20) з попереднім спостереженням про непомітність різниці частот ω_0 і $(\omega_0 + 2\pi r)$, отримуємо, що існує рівно N різних

значень частоти, за яких відповідна послідовність має період N , а саме тоді, коли $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Ця властивість комплексних експоненціальних та синусоїдальних послідовностей носить базовий характер як для теорії, так і для розробки чисельних алгоритмів у дискретному аналізі Фур'є.

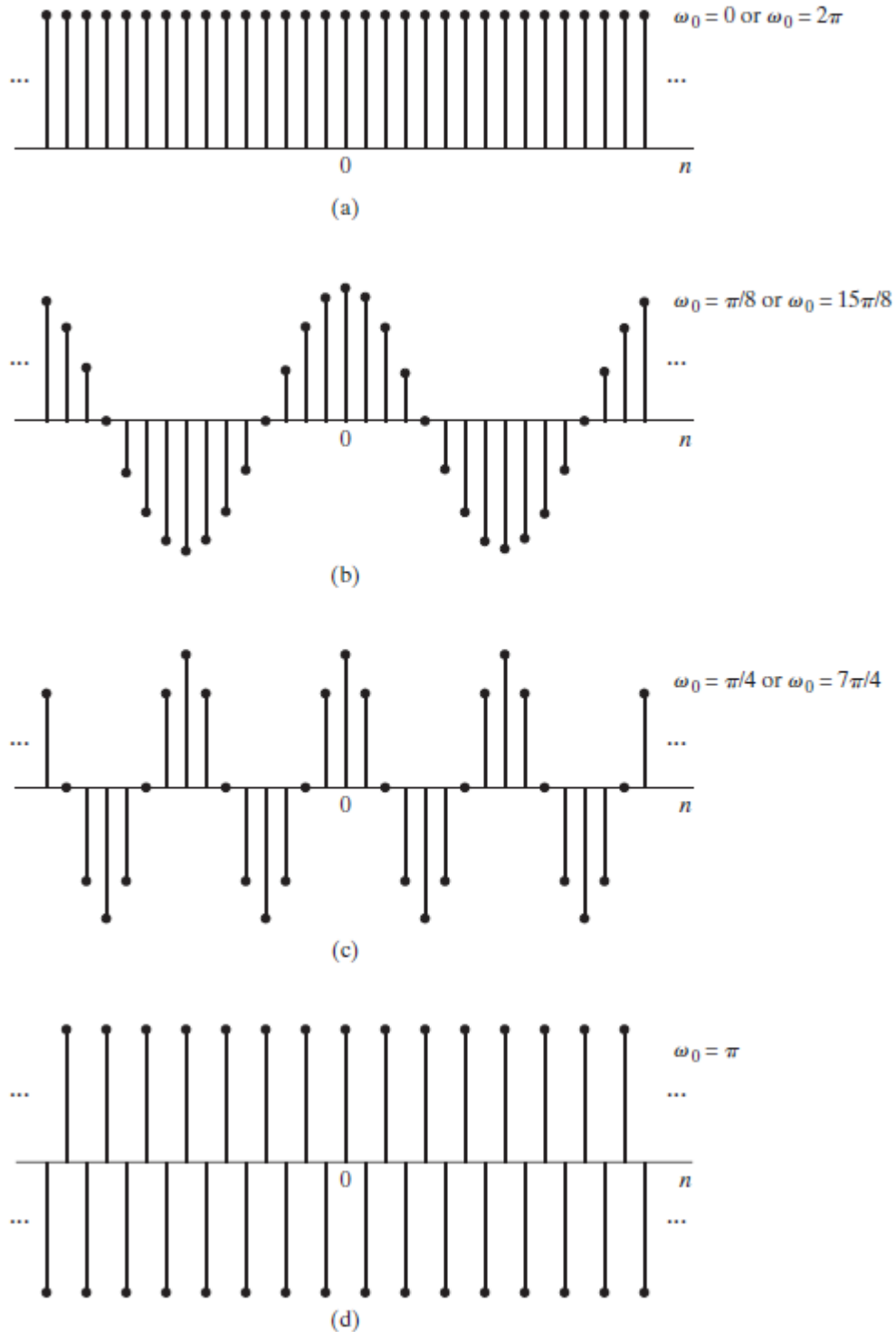


Рис. 2.5. Послідовності $\cos(\omega_0 n)$ для деяких значень ω_0

Вимога цілісності змінної n призводить до того, що деякі синусоїдальні сигнали взагалі не мають періоду. Наприклад, хоч би яке ціле число $N \neq 0$ ми

не взяли, рівність $\cos(n+N) = \cos(n)$ буде порушуватися для всіх цілих значеннях змінної n . Тобто у сигналу $x_3[n] = \cos(n)$ періоду не існує! Ці та інші властивості дискретних синусоїд, що суперечать їх безперервним двійникам, виникають внаслідок обмеження «часу» n на множині цілих чисел.

Приклад 2.2. Періодичні та неперіодичні дискретні синусоїди

Розглянемо сигнал $x_1[n] = \cos(\pi n/4)$. Його період дорівнює $N=8$. Для проведення доказу зауважимо, що рівності $x_1[n+8] = \cos(\pi(n+8)/4) = \cos(\pi n/4 + 2\pi) = \cos(\pi n/4) = x_1[n]$ справедливі для всіх цілих n , що й потрібно для встановлення періодичності дискретних сигналів.

Зростання періоду осциляцій в разі зростання частоти вище, ніж π

Попри наше інтуїтивне уявлення, пов'язане з безперервними синусоїдальними сигналами, збільшення частоти дискретної синусоїди не обов'язково тягне зменшення її періоду. Розглянемо послідовність $x_2[n] = \cos(3\pi n/8)$, що має більшу частоту, ніж $x_1[n]$, і зауважимо, що період $x_2[n]$ не є 8. Дійсно, $x_2[n+8] = \cos(3\pi(n+8)/8) = \cos(3\pi n/8 + 3\pi) = -\cos(3\pi n/8) = -x_2[n]$. Так само як і у разі послідовності $x_1[n]$, можна показати, що період сигналу $x_2[n]$ дорівнює 16. Отже, збільшення частоти $\omega_0 = 2\pi/8$ до $\omega_0 = 3\pi/8$ веде до збільшення періоду сигналу. Це відбувається через те, що дискретний сигнал визначено лише за цілих значень n .

Повертаючись до відмінностей між безперервними та дискретними синусоїдами, необхідно зазначити, що верхні та нижні частоти також по різному проявляють себе у безперервному та дискретному випадках. В разі зростання частоти Ω_0 безперервний сигнал $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi)$ осцилює дедалі швидше. Дискретний синусоїдальний сигнал $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ теж збільшує швидкість осцилювання в разі зростання ω_0 від 0 до π . Однак під час зміни частоти від π до 2π його коливання уповільнюються, що відображено на рис. 2.5.

Фактично, зважаючи на періодичність синусоїдального та комплексного експоненціального сигналів відносно ω_0 частоти $\omega_0 = 0$ і $\omega_0 = 2\pi$ не відрізняються один від одного. Таким чином, частоти, близькі до 0, нічим не відрізняються від частот, близьких до 2π . Як наслідок, для синусоїдальних і комплексних експоненціальних сигналів значення наближені до $2\pi k$ за будь-якого цілого k прийнято називати *нижніми* (відповідно, повільно осцилюючими), у той час як її значення в зоні $(\pi + 2\pi k)$ називають *верхніми* (відповідно швидко осцилюючими).

Частота Найквіста

Гармонійний сигнал можна адекватно представити його дискретними відліками тільки в тому випадку, якщо частота цього сигналу не перевищує половини частоти дискретизації (ця частота називається частотою Найквіста (*Nyquist frequency*) – $f_N = f_d/2 = 1/(2T)$; $\omega_N = \omega_d/2 = \pi/T$). Походження цього обмеження пояснює рис. 1.

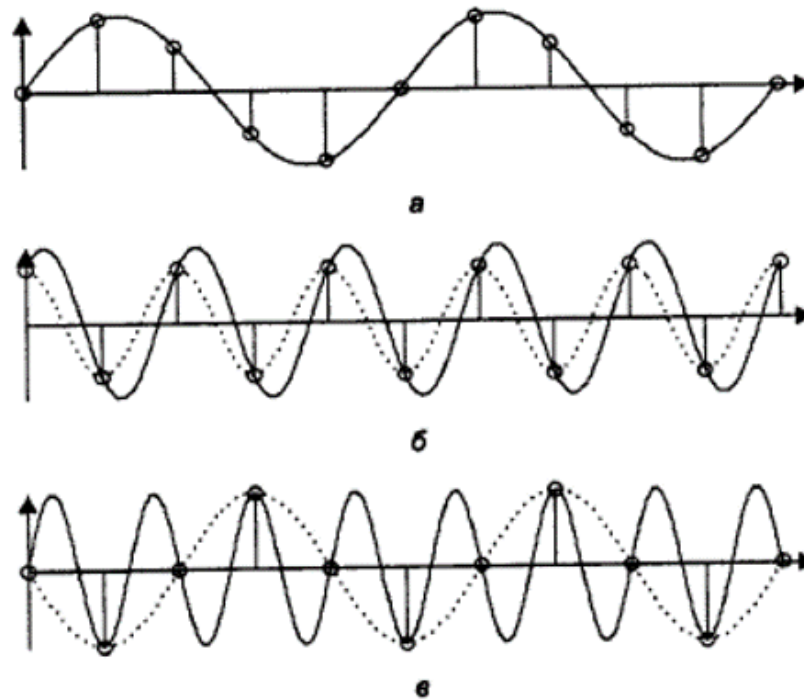


Рис. 1 – Дискретизація гармонійних сигналів з різною частотою

В залежності від співвідношення між частотою дискретизуемого гармонічного сигналу та частотою Найквіста можливі три випадки.

1. Якщо частота гармонійного сигналу менша за частоту Найквіста, дискретні відліки дозволяють правильно відновити аналоговий сигнал (рис. 1, а).

2. Якщо частота гармонійного сигналу дорівнює частоті Найквіста, то дискретні відліки дозволяють відновити аналоговий гармонійний сигнал із тією ж самою частотою, але амплітуда і фаза відновленого сигналу (його показано пунктирною лінією) можуть бути спотворені (рис. 1, б). В найгіршому випадку всі дискретні відліки синусоїди можуть бути рівними нулю.

3. Якщо частота гармонійного сигналу більша за частоту Найквіста, відновлений за дискретними відліками аналоговий сигнал (як і в попередньому випадку, його показано пунктирною лінією) буде також гармонійним, проте з іншою частотою (рис. 1, в). Цей ефект називається «появою помилкових частот» (*aliasing*).

Теорема Котельникова. Вибір частоти дискретизації.

Теорема Котельникова-Найквіста формулюється таким чином:

Будь-який сигнал $s(t)$, спектр якого не містить складових з частотами вище деякого значення f_s , можна без втрат інформації представити своїми дискретними відліками $s[n]$, взятими з частотою f_d , якщо виконується співвідношення:

$$f_d > 2f_s$$

Ця теорема свого часу була математично доведена незалежно друг від друга двома вченими: Найквістом та Котельниковим. Ця теорему використовують для обробки сигналів дуже і дуже часто.

Покажемо на прикладах, як її використовують.

Приклад 1. Людина може чути звуки, частота яких не перевищує 20кГц. Тобто ніякі звуки, частота яких вище 20 кГц людина не чує. Це верхня частота сигналу: $f_s = 20$ кГц. Тепер, якщо покластися на теорему Котельникова-Найквіста і провести дискретизацію звукового сигналу з частотою f_d , яка буде вдвічі вище, ніж f_s , тобто вище 40 кГц, то такий сигнал можна потім абсолютно точно відтворити – отримати точно такий аналоговий сигнал, точно той самий звук, який перед цим дискретизували. Людина почує первинний звук, що йшов від джерела. Жодної різниці ніхто і ніщо не зможе знайти. Таким чином, завдяки теоремі Котельникова-Найквіста ми знаємо, що якісна передача звуку відбувається в тому випадку, якщо вибрати частоту дискретизації більше, ніж 40 кГц. Саме тому під час оцифрування звуку найчастіше використовують такі стандартні значення як 44,1 кГц та 48 кГц.

Приклад 2. Людська мова включає звуки з частотами від 80 Гц до $f_s = 4$ кГц.

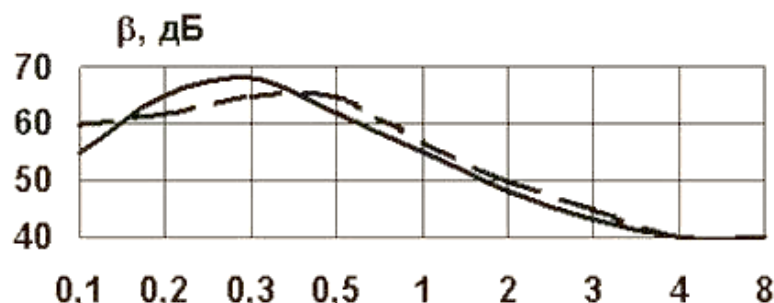


Рис. 5. Енергетичний спектр людської мови: суцільна лінія – українська мова, штрихова лінія – англійська мова

Це означає, що для того, аби дискретизувати мовну інформацію (голос людини, розмова, виступ тощо) так, щоб потім можна було її повністю відтворити, достатньо застосувати частоту дискретизації 8 кГц або більше.

Теорема Котелникова-Найквіста показує, яким має бути мінімальне значення частоти дискретизації. І в цьому полягає найцінніше значення цієї теореми для світу інформаційних технологій. Проте виникає питання, а наскільки більше мінімального значення слід обирати частоту дискретизації? Зрозуміло, що чим вища частота дискретизації, тим вища якість відновлення сигналу. Але, з іншого боку, чим вона вище, тим більшою стає кількість відліків, тим більше потрібно пам'яті, аби зберігати ці відліки, тим більше повинна бути пропускна здатність каналів передачі інформації, тим більша має бути частота дискретизації АЦП та ЦАП і тим дорожче вони стають. Тобто, з практичної точки зору немає жодного сенсу завищувати частоту дискретизації. Саме тому стандартні значення частоти дискретизації звукового сигналу - 44,1 кГц (Audio CD) і 48 кГц (Mp3), тобто, вони ненабагато вище мінімально необхідної частоти 40 кГц. Більш того, якщо сам сигнал не надто якісний, коли в ньому відсутні верхні частоти, то з метою зменшення навантаження на канали передачі даних і, відповідно, вартості цієї передачі, – використовують частоти дискретизації значно нижче, ніж 40 кГц. Так, для передачі мовної інформації в телефонії використовують частоту дискретизації 8 кГц (а іноді навіть 6 кГц). Для звичайних радіопередач достатньо застосувати частоту дискретизації 22050 Гц.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Процес перетворення аналогового сигналу на цифровий.
2. Цифровий сигнал як числова послідовність.
3. Найпростіші операції над числовими послідовностями.
4. Стандартний цифровий сигнал одиничного імпульсу.
5. Стандартний цифровий сигнал одиничного стрибка.
6. Стандартний цифровий сигнал експонентної послідовності. Комплексна експоненціальна послідовність.
7. Стандартний цифровий сигнал синусоїдальної послідовності. Комплексна синусоїдальна послідовність.
8. Відмінності у властивостях дискретних та безперервних комплексних експоненціальних та синусоїдальних послідовностей: співпадіння послідовностей на кругових частотах, які відрізняються на 2π .
9. Відмінності у властивостях дискретних та безперервних комплексних експоненціальних та синусоїдальних послідовностей: періодичність.
10. Відмінності у властивостях дискретних та безперервних комплексних експоненціальних та синусоїдальних послідовностей: зростання періоду осциляцій в разі зростання частоти вище, ніж π .
11. Частота Найквіста.
12. Теорема Котельникова. Вибір частоти дискретизації.

Лекція № 3

Тема: Дискретні системи. Частина перша.

Зміст

Дискретні системи	2
Класи дискретних систем.....	3
Системи без запам'ятовування.....	3
Лінійні системи	3
Стаціонарні системи	5
Детермінованість.....	6
Контрольні питання за темою.....	8
Рівень модуля	8
Рівень курсу	8

Джерела:

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд. – СПб.: БХВ–Петербург, 2011. – 768 с.: ил.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Техносфера, 2006. – 856с.

Дискретні системи

З математичної точки зору система з дискретним часом визначається як перетворення, або оператор, що переводить вхідну послідовність (сигнал) $x[n]$ у вихідну послідовність $y[n]$ (відгук, або реакцію системи). Це можна позначити таким чином

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} \quad (3.1)$$

та зобразити графічно так, як показано на рис. 3.1. Співвідношення (3.1) – це правило, або формула, за якою обчислюються значення реакції системи через відліки сигналу, поданого на її вхід. Необхідно зазначити, що відлік реакції системи з індексом n може залежати не тільки від одного чи двох відліків вхідного сигналу $x[n]$ чи $x[n-1]$, а навіть від усіх його відліків. Наступні приклади знайомлять із деякими простими, але корисними системами.

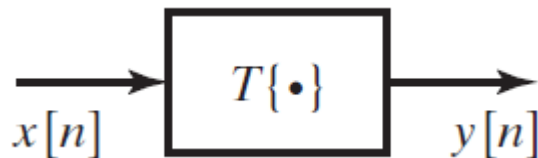


Рис. 3.1. Графічне представлення дискретної системи

Приклад 3.1. Ідеальна система затримки

Ідеальна система затримки (ІСЗ) визначається формулою

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \quad (3.2)$$

де n_d – фіксоване натуральне число, яке називається затримкою системи. Іншими словами, ІСЗ зміщує вхідну послідовність вправо на n_d відліків. Якщо у формулі (3.2) взяти в якості n_d фіксоване від'ємне ціле число, то система зрушуватиме вхідну послідовність вліво на $|n_d|$ відліків, що відповідає випередженню часу.

У прикладі 3.1 для обчислення відліку реакції системи використовується лише один відлік вхідної послідовності. У наступному прикладі це не так.

Приклад 3.2 Ковзне середнє

Загальна система ковзного середнього має вигляд:

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times (x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] + \dots + x[n - M_2]) \quad (3.3)$$

Вона обчислює n -й відлік вихідної послідовності як середнє арифметичне значення $(M_1 + M_2 + 1)$ відліків вхідної послідовності,

розташованих навколо n -го відліку. На рис. 3.2 зображена вхідна послідовність як функція від змінної k та її відліки, які беруть участь в обчисленні вихідного відліку $y[n]$ для випадку, коли $n = 7$, $M_1 = 0$ і $M_2 = 5$. Отриманий відлік $y[7]$ дорівнює $1/6$ суми всіх відліків, що знаходяться між вертикальними пунктирними лініями. Для обчислення $y[8]$ обидві пунктирні лінії треба зсунути вправо на одну позицію.

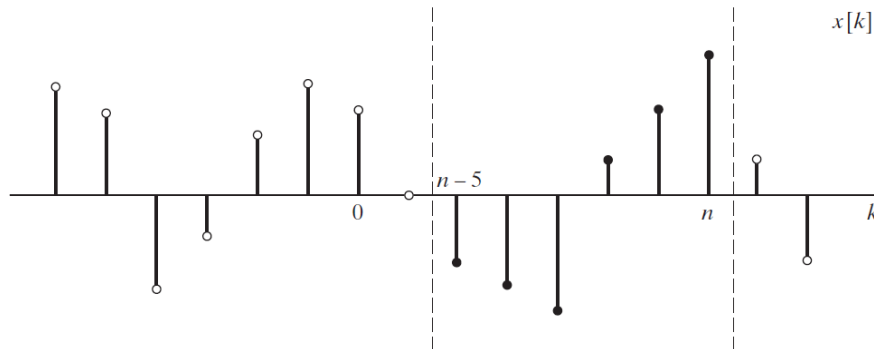


Рис. 3.2. Члени послідовності, що беруть участь у обчисленні ковзного середнього

Класи дискретних систем

Класи систем визначаються шляхом накладення певних обмежень на властивості перетворення T . Особливе значення мають системи, обмеження та властивості, що обговорюються саме у цій лекції.

Системи без запам'ятовування

Систему, n -й відлік реакції $y[n]$ якої для кожного n залежить лише від одного відліку з тим самим індексом n вхідного сигналу $x[n]$, називають системою без запам'ятовування.

Приклад 3.3. Система без запам'ятовування

Прикладом може бути система, в якій

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \forall n \quad (3.4)$$

Система прикладу 3.1 відноситься до систем без запам'ятовування лише тоді, коли $n_d = 0$. Якщо це не так, то кажуть, що система з прикладу 3.1 має «пам'ять» і в разі позитивного n_d (затримка часу), і в разі негативного n_d (випередження часу). Система з прикладу 3.2 не має пам'яті, тільки тоді, коли $M_1 = M_2 = 0$.

Лінійні системи

Клас лінійних систем визначається за принципом суперпозиції. Якщо $y_1[n]$ та $y_2[n]$ – це є відгуки системи на сигнали $x_1[n]$ і $x_2[n]$, то систему називають лінійною тоді і тільки тоді, коли

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \quad \text{и} \quad T\{ax_1[n]\} = aT\{x_1[n]\} \quad (3.5)$$

де a – довільна константа. Першу з властивостей називають *адитивністю*, а другу – *однорідністю*. Обидві властивості можна записати однією формулою за принципом *суперпозиції*:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}, \quad (3.6)$$

де a та b – довільні константи. Останнє співвідношення легко може бути переписано для кількох сигналів, зокрема

$$\text{якщо} \quad x[n] = \sum_k a_k x_k[n], \quad \text{то} \quad y[n] = \sum_k a_k y_k[n], \quad (3.7)$$

де $y_k[n]$ – реакція системи на поданий сигнал $x_k[n]$.

Використовуючи визначення, легко перевірити, що системи прикладів 3.1 та 3.2 лінійні. Зразок нелінійної системи наведено в прикладі 3.3.

Приклад 3.4. Суматор

Система, що визначається рівнянням

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (3.8)$$

називається суматором, оскільки значення її реакції в момент часу n дорівнює сумі всіх попередніх відліків вхідної послідовності аж до n -го. Щоб довести лінійність суматора, нам необхідно показати, що він задовольняє принципу суперпозиції за будь-яких вхідних сигналах, не обмежуючись окремими випадками. Подамо на вхід суматора дві довільні послідовності $x_1[n]$, $x_2[n]$ і обчислимо відповідні відгуки:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] \quad (3.9)$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_2[k] \quad (3.10)$$

Якщо тепер на вхід суматора подати сигнал $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, то за принципом суперпозиції незалежно від вибраних констант a і b ми маємо отримати рівність. Перевіримо це, базуючись на визначенні (3.8):

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \sum_{k=-\infty}^n x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^n (ax_1[k] + bx_2[k]) = \\ &= a \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^n x_2[k] = ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отже, суматор насправді задовольняє принципу суперпозиції, тобто є лінійною системою.

У загальному випадку довести, що деяка система не є лінійною (якщо вона і справді нелінійна), набагато простіше, ніж довести її лінійність (якщо вона все ж таки лінійна). Для цього достатньо пред'явити пару вхідних послідовностей та констант, для яких порушується принцип суперпозиції.

Приклад 3.5. Нелінійна система

Розглянемо систему

$$w[n] = \log_{10} |x[n]| \quad (3.12)$$

Ця система – нелінійна. Для доказу нам достатньо знайти один контрприклад, тобто пару сигналів, для якої порушується принцип суперпозиції. Візьмемо сигнали $x_1[n]=1$ і $x_2[n]=10$. Відповідні відгуки: $w_1[n]=0$ та $w_2[n]=1$. Вимога однорідності для лінійних систем у цій ситуації диктує, що має виконуватися співвідношення $w_2[n]=10w_1[n]$, оскільки $x_2[n]=10x_1[n]$. Однак, в нашому випадку це не виконується. Виходить, що система – нелінійна.

Стаціонарні системи

До стаціонарних відносять системи, для яких тимчасове зсув (або затримка) вхідної послідовності ініціює відповідний зсув вихідної послідовності. Більше формально визначення виглядає так. Нехай дискретна система визначена формулою $y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$. Ця система називається стаціонарною, якщо для будь-якої вхідної послідовності $x[n]$ та довільного цілого числа n_0 виконується співвідношення $\mathbf{T}\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$. Стаціонарні системи іноді називають системами, інваріантними щодо зрушень.

Як і у випадку з лінійними системами, доказ стаціонарності даної системи вимагає узагальнених міркувань, які не допускає будь-яких специфічних припущень щодо вхідних сигналів. Усі системи з прикладів 3.1-3.5 стаціонарні. Принцип доказу стаціонарності системи ілюструють приклади 3.6 та 3.7.

Приклад 3.6. Стаціонарність суматора

Розглянемо суматор із прикладу 3.4. Покладемо $x_1[n] = x[n - n_0]$. Для доказу стаціонарності суматора нам слід обчислити $y[n - n_0]$, $y_1[n]$ і порівняти результати. За визначенням суматора маємо

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \quad (3.13)$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k - n_0]. \quad (3.14)$$

Змінивши в останній сумі параметр підсумовування на $k_1 = k - n_0$ отримаємо

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] = y[n - n_0]. \quad (3.15)$$

Таким чином, суматор й справді є стаціонарною системою. Наступний приклад знайомить із нестаціонарною системою.

Приклад 3.7. Компресор

Система, визначена співвідношенням

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty, \quad (3.16)$$

де M – натуральне число, називається ущільнювачем. Простіше кажучи, ця система відкидає $M-1$ з кожних M відліків вхідної послідовності, залишаючи тільки M -й. Вона, звичайно, нестаціонарна, у чому легко переконатися, розглянувши реакцію $y_1[n]$ системи на вхідний сигнал $x_1[n] = x_1[n - n_0]$. Якби наша система була стаціонарною, то виконувалася би рівність $y_1[n] = y_1[n - n_0]$. Проте

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x_1[Mn - n_0] \neq y_1[n - n_0] = x_1[M(n - n_0)]$$

Інший спосіб перевірки нестаціонарності системи полягає у пред'явленні контрприкладу, тобто вхідної послідовності, на якій порушується умова стаціонарності. Нехай, наприклад, $M = 2$, $x[n] = \delta[n]$ та $x_1[n] = \delta[n - 1]$. Тоді $y[n] = \delta[Mn] = \delta[n]$, але $y_1[n] = \delta[Mn - 1] = 0$. Отже $y_1[n] \neq y_1[n - 1]$, й це суперечить умові стаціонарності.

Детермінованість

Систему називають детермінованою, якщо член вихідної послідовності з номером n_0 залежить тільки від членів вхідної послідовності, номер яких не перевищує n_0 . Ця умова тягне за собою той факт, що якщо $x_1[n] = x_2[n]$ за $n \leq n_0$, то $y_1[n] = y_2[n]$ за $n \leq n_0$. Система з прикладу 3.1 детермінована, якщо $n_d \geq 0$, і не є такою за $n_d < 0$. Система з прикладу 3.2 детермінована за $M_1 = 0$ та $M_2 \geq 0$. В будь-якому іншому випадку вона недетермінована. Система з прикладу 3.3 детермінована, як і суматор з прикладу 3.4, а також нелінійна система з прикладу 3.5. А ось система з прикладу 3.7 – недетермінована за $M > 1$, оскільки $y[1] = x[M]$. Ще одна недетермінована система наведена у наступному прикладі.

Приклад 3.8. Права та ліва різницеві системи

Розглянемо *праву різницеву систему*, визначену за правилом

$$y[n] = x[n + 1] - x[n]. \quad (3.17)$$

Вона не є детермінованою, оскільки кожен з членів вихідної послідовності з номером n обчислюється як по $x[n]$, так і по $x[n+1]$. Порушення детермінованості легко помітити, взявши в якості вхідних послідовностей $x_1[n] = \delta[n-1]$ та $x_2[n] = 0$. Відповідні відгуки: $y_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ і $y_2[n] = 0$. Зауважимо, що $x_1[n] = x_2[n]$ коли $n \leq 0$. Тому, за визначенням детермінованості, має виконуватись рівність $y_1[n] = y_2[n]$ для всіх $n \leq 0$, яке порушується за $n = 0$. Отже, представивши контрприклад, ми показали, що права різницева система недетермінована.

Ліва різницева система визначається як

$$y[n] = x[n] - x[n-1]. \quad (3.18)$$

Кожен член вихідної послідовності цієї системи залежить від члена з тим самим номером вхідної послідовності та одного попереднього. Отже, вона детермінована.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Концепція дискретної системи.
2. Ідеальна система затримки.
3. Система ковзного середнього.
4. Дискретні системи без запам'ятовування.
5. Лінійні системи. Приклади лінійних та нелінійних систем.
6. Стаціонарні системи.
7. Класи детермінованих та недетермінованих систем.

Лекція № 4

Тема: Дискретні системи. Частина друга: згортка.

Зміст

Стійкість.....	2
Лінійні стаціонарні системи.....	3
Приклад обчислення дискретної згортки.....	8
Контрольні питання за темою.....	9
Рівень модуля	9
Рівень курсу	9

Джерела:

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3–е изд. – СПб.: БХВ–Петербург, 2011. – 768 с.: ил.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Техносфера, 2006. – 856с.

Стійкість

Кажуть, що система *стійка*, якщо її реакція на будь-який сигнал з обмеженою амплітудою є *обмеженою*. Дано визначення: послідовність $x[n]$ називається *обмеженою*, якщо знайдеться таке скінченне позитивне число B_x , що

$$\forall n \quad |x[n]| \leq B_x < \infty. \quad (4.1)$$

Таким чином, в стійкій системі для кожної обмеженої вхідної послідовності знайдеться така позитивна константа B_y , що

$$\forall n \quad |y[n]| \leq B_y < \infty. \quad (4.2)$$

Важливо усвідомити, що властивість, яку ми тут визначили, – це властивість системи, а не вхідних послідовностей. Інакше кажучи, ми можемо представити якусь пару сигналів на вході та виході системи, які відповідають умові (4.2). Але наявність такої пари, або декількох таких пар, та навіть нескінченної множини таких пар, ще не означає стійкості цієї системи. Певна система буде стійка тільки в тому випадку, коли вказана властивість (4.2) притаманна абсолютно всім можливим для цієї системи парам сигналів «вхід-вихід». Наприклад, для нестійкої системи ми можемо знайти низку обмежених сигналів, на які наша система дає обмежені відгуки, проте це ніяк не означає що система стійка, оскільки для стійкої системи обмеженою має бути реакція на будь-яку обмежену вхідну послідовність. Тому, як тільки нам вдалося знайти хоча б одну обмежену послідовність, відгук на яку буде необмеженим, можна з упевненістю заявити, що ця система нестійка.

У наступному прикладі перевіряється стійкість вже знайомих нам систем.

Приклад 4.1. Перевірка стійкості систем

Система прикладу 3.3 є стійкою. Для підтвердження цього факту припустимо, що на вхід системи подається сигнал $x[n]$ з обмеженням по амплітуді B_x , тобто $|x[n]| \leq B_x$ для всіх n . Тоді $|y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2$. Таким чином, $B_y = B_x^2$ - верхнє обмеження реакції системи $y[n]$, й це доводить її обмеженість. Отже, перевірена система – стійка.

Використовуючи аналогічні міркування, можна довести стійкість систем з прикладів 3.1, 3.2, 3.7 та 3.8.

З іншого боку, легко переконатись у нестійкості системи прикладу 3.5. Справді, $y[n] = \log_{10}(x[n]) = -\infty$ в тому випадку, якщо $x[n]=0$, хоча відгук системи для всіх інших $x[n] \neq 0$ є скінченним.

Суматор, введений у прикладі 3.4 формулою (3.8 – див. лекцію 3), також нестійкий. Розглянемо, наприклад, послідовність $x[n] = u[n]$. Її обмеженість не викликає сумнівів, оскільки $B_x = 1$. Відгук суматора на такий сигнал має вигляд

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Послідовність $y[n]$ необмежена, оскільки за будь-якого вибору константи B_y нерівність $n+1 \leq B_y < \infty$ обов'язково порушується, коли n набуває достатньо великих значень. Отже, суматор є нестійкою системою.

Лінійні стаціонарні системи

Особливе значення має клас систем, які одночасно є як лінійними, так і стаціонарними. Ці системи відіграють провідну роль в застосунках обробки сигналів. Клас лінійних систем визначається за допомогою принципу суперпозиції рівнянням (3.6) з лекції 3. Спираючись на властивість лінійності та використовуючи представлення довільної цифрової послідовності у вигляді лінійної комбінації затриманих одиночних імпульсів (дивися лекцію 2, рівняння 2.6):

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k], \quad (4.4)$$

можна дійти висновку, що лінійна система повністю визначається своєю реакцією на зсунуті імпульсні послідовності.

Тепер сформулюємо сказане більш точно. Нехай $h[n]$ - реакція системи на вхідний сигнал у вигляді одиночного імпульсу $\delta[n]$:

$$h[n] = \mathbf{T} \delta[n] \quad (4.5)$$

Властивість стаціонарності вимагає, що якщо $h[n]$ – реакція системи на вхідний сигнал $\delta[n]$ (ця реакція називається *імпульсною характеристикою системи*), то її реакція на сигнал $\delta[n-k]$ має бути $h[n-k]$:


$$h[n-k] = \mathbf{T} \delta[n-k] \quad (4.6)$$

Тоді реакція системи $y[n]$ на довільний вхідний сигнал $x[n]$, який представляється за допомогою виразу (4.4) буде мати вигляд:

$$y[n] = \mathbf{T}x[n] = \mathbf{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\}. \quad (4.7)$$

Оскільки ми розглядаємо систему, яка є не тільки стаціонарною, але ще й лінійною, то для неї за принципом суперпозиції (3.7 – див. лекцію 3) можна

записати, що реакція системи на суму сигналів $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$ є сумою реакцій системи на кожен з цих сигналів $x[k]\delta[n-k]$:



$$\begin{aligned} y[n] &= \mathbf{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{T} \{ x[k]\delta[n-k] \} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathbf{T} \{ \delta[n-k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В цій формулі враховано, що $x[k]$ – це постійні числа, це просто значення відліків, яким у формулі (3.7) відповідають постійні коефіцієнти a_k . а реакція системи на вхідний сигнал у вигляді зміщеного одиночного імпульсу $\delta[n-k]$ являє собою зміщену на k індексів імпульсну характеристику системи $\delta[n-k]$ (4.6).

Таким чином ми виявили, що реакція лінійної стаціонарної системи на будь-яку вхідну послідовність виражається через відгуки цієї системи на вхідні сигнали $\delta[n-k]$.

Як основний наслідок цієї формули, відзначимо, що лінійна стаціонарна система (ЛС-система) повністю визначається своєю імпульсною характеристикою $h[n]$ у тому сенсі, що коли послідовність $h[n]$ відома, то спираючись на (4.8), можна обчислити відгук $y[n]$ на будь-який поданий вхідний сигнал $x[n]$.

В математиці та в теорії керування, коли відліки цифрової послідовності $y[n]$ пов'язані з відліками цифровий послідовностей $h[n]$ і $x[n]$ через правило (4.8), то послідовність $y[n]$ називають *дискретною згорткою* послідовностей $h[n]$ і $x[n]$ та вживають позначення:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (4.9)$$

Операція дискретної згортки створює послідовність $y[n]$ з двох заданих послідовностей $h[n]$ і $x[n]$. Рівняння (4.8) виражає кожен відлік вихідної послідовності через усі відліки вхідної послідовності та імпульсну характеристику системи.

Формула (4.8) показує, що кожен окремий *відлік* вхідної послідовності $x[n]$ представляється як $x[k]\delta[n-k]$, де k – номер цього відліку, й він перетворюється системою у певну вихідну *послідовність* $x[k]h[n-k]$ для якої $-\infty < n < \infty$, і що для кожного k ці послідовності підсумовуються для формування всіх вихідних послідовностей. Ця інтерпретація ілюструється рисунком 4.1 де показана імпульсна характеристика системи, проста вхідна послідовність з трьома ненульовими відліками (для прикладу), індивідуальні

відгуки на кожен такий відлік та їх сума, яка й є відгуком системи на сигнал $x[n]$. Більш конкретно, $x[n]$ можна представити як суму трьох послідовностей $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ і $x[3]\delta[n-3]$, які являють собою три ненульових відліки послідовності $x[n]$. Послідовності $x[-2]h[n+2]$, $x[0]h[n]$ і $x[3]h[n-3]$ – відгуки системи на вхідні сигнали $x[-2]\delta[n+2]$, $x[0]\delta[n]$ і $x[3]\delta[n-3]$ – відповідно. Після цього реакцію системи $y[n]$ на сигнал $x[n]$ отримуємо у вигляді суми цих індивідуальних відгуків.

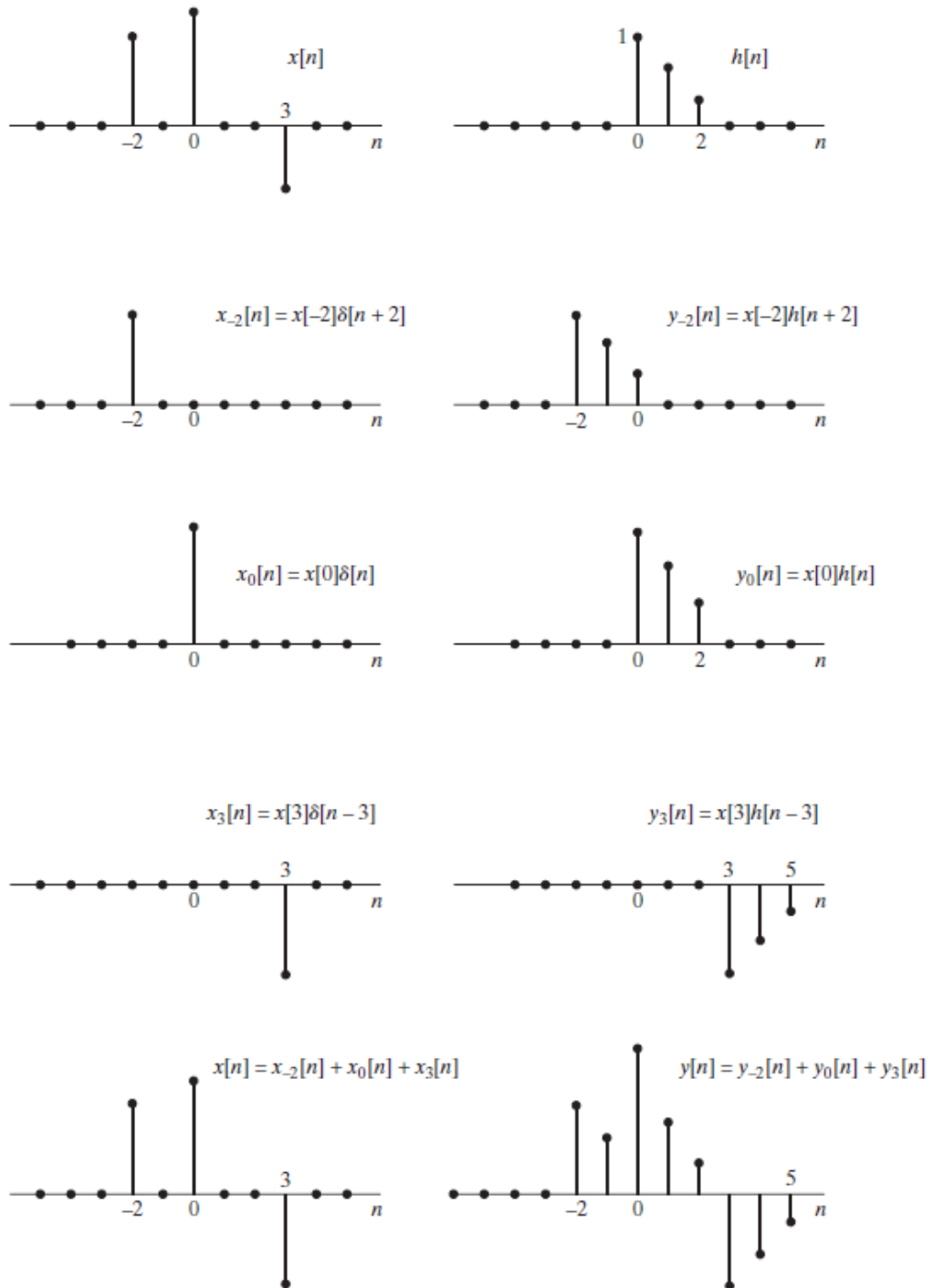


Рис. 4.1. Подання вхідної послідовності лінійної стаціонарної системи у вигляді суперпозиції відповідей на індивідуальні відліки

Хоча дискретна згортка нагадує згортку функцій з теорії безперервних лінійних систем, визначену за допомогою інтеграла Дюамеля, її не слід сприймати як апроксимацію інтегральної згортки. Ця згортка грає переважно теоретичну роль для безперервних лінійних системах, тоді як дискретна згортка, крім своєї теоретичної цінності, часто використовується задля явної реалізації дискретних лінійних систем. Тому дуже важливо напрацювати деяку інтуїцію щодо властивостей дискретної згортки в реальних обчисленнях.

Викладена інтерпретація рівняння (4.8) базується на тому, що дискретна згортка є прямим наслідком лінійності і стаціонарності системи. Проте дещо інший погляд на цю формулу підводить нас до дуже важливої обчислювальної інтерпретації. Коли ми дивимося на співвідношення (4.8) як на формулу, що обчислює окремий відлік вихідної послідовності, то ми помічаємо, що $y[n]$ (тобто n -й член вихідної послідовності) отримується в результаті множення вхідної послідовності (записаної як функція від k) на послідовність $h[n - k]$, $-\infty < n < \infty$, а потім при кожному фіксованому n підсумовуються всі добутки з параметром k в якості параметру підсумовування.

Отже, при згортанні двох послідовностей для обчислення n -го члена результату використовуються всі відліки обох послідовностей. Ключ до повного розуміння формули полягає в усвідомленні процесу утворення послідовності $h[n - k]$, для всіх значень n , які представляють інтерес. Щоб закінчити це осмислення згортки, корисно помітити, що

$$h[n - k] = h[-(k - n)] \quad (4.10)$$

Інтерпретацію формули (4.10) краще розглянути на прикладі.

Приклад 4.2. Обчислення згортки

Припустимо, що $h[k]$ - послідовність, яка зображена на рис. 4.2a, а нам потрібно знайти $h[n - k] = h[-(k - n)]$. Визначимо $h_1[k]$ як $h[-k]$ (рис. 4.2b). Потім поставимо $h_2[k]$ як послідовність $h_1[k - n]$ затриману на n відліків по осі k , тобто $h_2[k] = h_1[k - n]$. На рис. 4.2c зображена послідовність, отримана з послідовності малюнка 4.2b зсувом на n відліків вправо. Спираючись на зв'язок між $h_1[k]$ і $h[k]$, можна показати, що $h_2[k] = h_1[k - n] = h[-(k - n)] = h[n - k]$, і таким чином, нижня послідовність малюнка є шуканим сигналом. Підсумовуючи, скажемо, що для розрахунку $h[n - k]$ нам потрібно обернути в часі відносно $k = 0$ послідовність $h[k]$, а потім зсунути отриманий результат на n відліків праворуч.

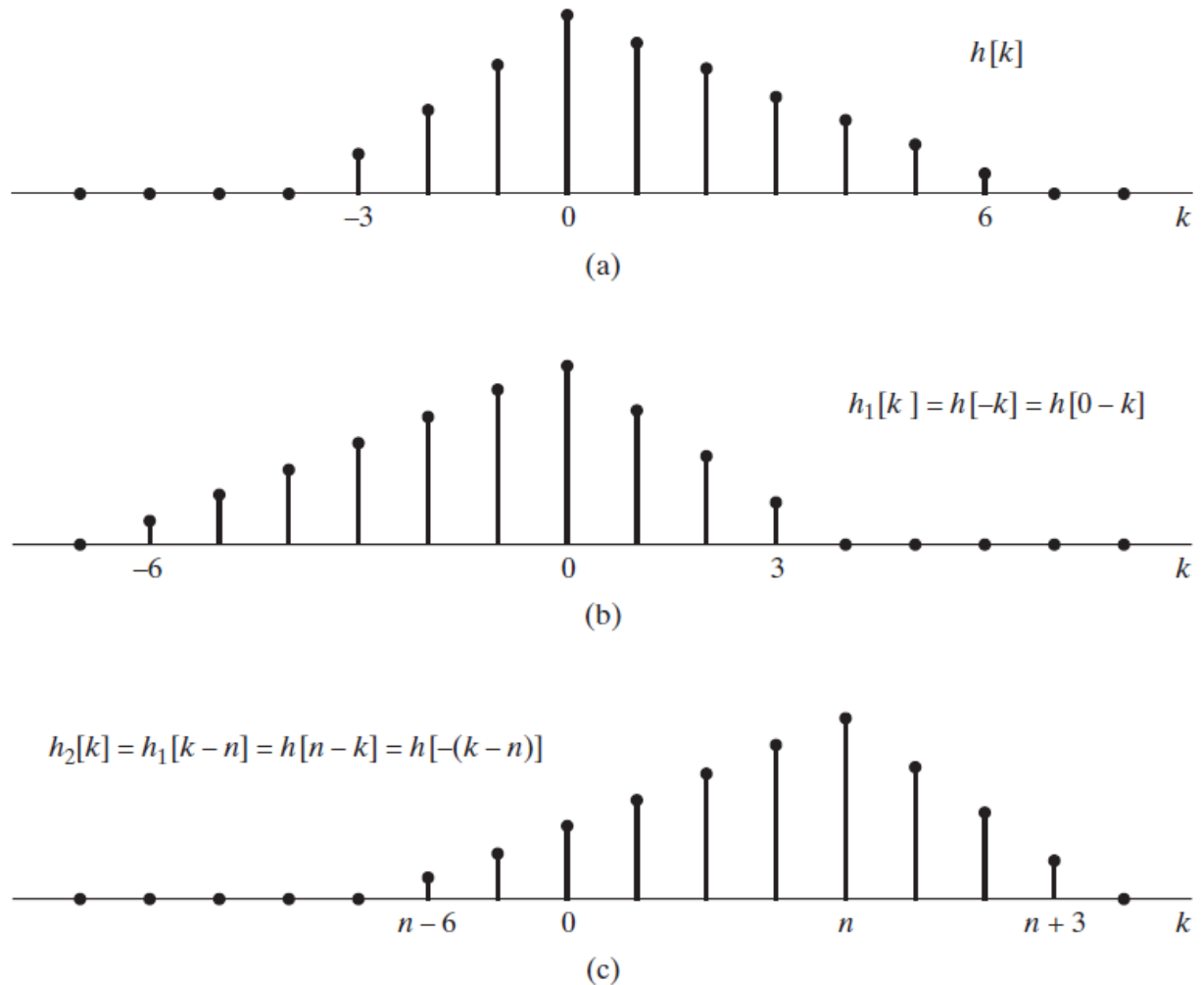


Рис. 4.2. Отримання послідовності $h[n - k]$:
 а) послідовність $h[k]$; б) послідовність $h[-k]$
 в) послідовність $h[n - k]$ за $n = 4$

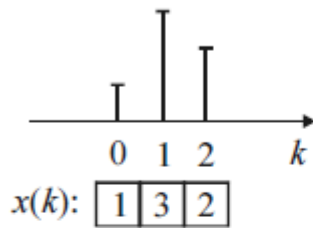
З прикладу 4.2 стає зрозуміло, що у загальній ситуації ми отримуємо послідовність $h[n - k]$, $-\infty < n < \infty$, у два етапи:

- 1) дзеркальне відображення послідовності $h[k]$ відносно нуля задля отримання $h[-k]$;
- 2) зсув відображеної послідовності праворуч на n відліків.

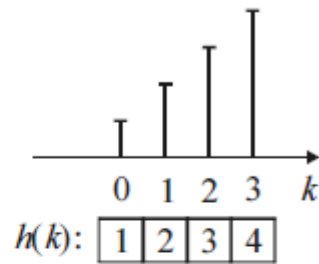
Як зазначалося вище, для обчислення згортки послідовності $x[k]$ та $h[n-k]$ перемножуються, а потім добутки сумуються і отримуємо відлік $y[n]$ вихідної послідовності. Щоб знайти інший відлік згортки, початок відліку (нульовий час) послідовності $h[-k]$ зсувається на нову позицію і процес повторюється. Ця процедура застосовується як під час цифрової обробки відліків, отриманих при дискретизації сигналів, так й в разі аналітичних обчислень, коли відліки підлягають опису за допомогою простої формули.

Приклад обчислення дискретної згортки

Вхідний сигнал



Імпульсна характеристика системи



Процедура розрахунку

$k = 0:$ $x(m):$

1	3	2
---	---	---

 $h(0 - m):$

4	3	2	1
---	---	---	---

 →

$y(0) = 1 \cdot 1 = 1$

$k = 1:$ $x(m):$

1	3	2
---	---	---

 $h(1 - m):$

4	3	2	1
---	---	---	---

 →

$y(1) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$

$k = 2:$ $x(m):$

1	3	2
---	---	---

 $h(2 - m):$

4	3	2	1
---	---	---	---

 →

$y(2) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 11$

$k = 3:$ $x(m):$

1	3	2
---	---	---

 $h(3 - m):$

4	3	2	1
---	---	---	---

 →

$y(3) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 17$

$k = 4:$ $x(m):$

1	3	2
---	---	---

 $h(4 - m):$

4	3	2	1
---	---	---	---

 →

$y(4) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$

$k = 5:$ $x(m):$

1	3	2
---	---	---

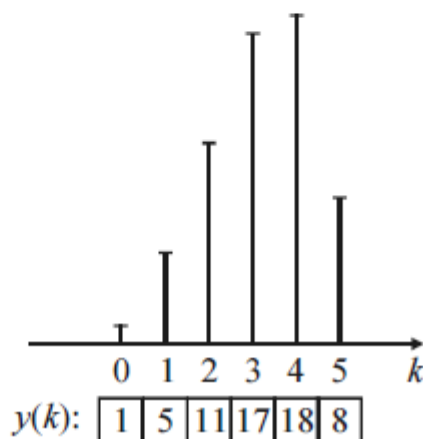
 $h(5 - m):$

4	3	2	1
---	---	---	---

 →

$y(5) = 2 \cdot 4 = 8$

Результат:



Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Концепція стійкості дискретних систем.
2. Лінійні стаціонарні дискретні системи. Імпульсна характеристика системи.
3. Знаходження реакції лінійної стаціонарної системи на довільний вхідний сигнал. Дискретна згортка.
4. Обчислення дискретної згортки.

Лекція № 5

Тема: Способи опису лінійних стаціонарних дискретних систем без зворотного зв'язку

Зміст

Різноманіття способів опису дискретних систем	2
Різницеві рівняння	3
Блок-схеми	5
Операторне представлення	8
Абстракції	8
Оператор затримки	8
Еквівалентні блок-схеми	10
Контрольні питання за темою.....	14
Рівень модуля	14
Рівень курсу	14

Джерела:

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3–е изд. – СПб.: БХВ–Петербург, 2011. – 768 с.: ил.
2. Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Техносфера, 2006. – 856с.

Різноманіття способів опису дискретних систем

По-перше, пригадаємо, що терміни «дискретна система» і «цифрова система» практично ідентичні, так само, як практично ідентичні поняття «дискретний сигнал» та «цифровий сигнал». Цифровий сигнал утворюється з дискретного шляхом квантування за рівнем. І якщо крок квантування достатньо малий, то ефекти, викликані квантуванням, практично відсутні. Сучасні аналогово-цифрові перетворювачі мають високу розрядність та, відповідно, малий крок квантування. Тому закономірності, притаманні дискретним сигналам і системам, розповсюджуються й на цифрові сигнали та системи. Зрозуміло, що, якщо крок квантування великий, то цифрові системи та сигнали не можна прирівнювати до дискретних. Тоді потрібні спеціальні методи для аналізу сигналів та систем, у яких квантування впливає на процес обробки сигналів. Проте, на практиці такі випадки зустрічаються не так часто. Тому в нашому курсі, присвяченому лише *основам* цифрової обробки сигналів, такі задачі не розглядаються, і в рамках нашого курсу терміни *дискретний* та *цифровий* вживаються як рівнозначні.

Далі вкажемо, що на даному етапі ми вивчаємо виключно лінійні стаціонарні системи, оскільки їх опис є найпростішим. Тобто всі нижченаведені твердження та висновки відносяться виключно до лінійних стаціонарних систем. Повторно це не вказуватиметься.

Переходимо до способів опису лінійних стаціонарних дискретних систем. Дамо визначення: під *способом опису* системи (або під *формою поданням* системи) ми розуміємо будь-який набір правил, який дозволяє знайти реакцію даної системи на вхідний сигнал. Ці правила можуть бути записані у будь-якій формі: математичній, графічній, табличній або навіть словесній. В теорії кіл і сигналів існує ряд правил проведення операцій, які стосуються опису систем. Таким правилом, наприклад, є алгоритм дискретної згортки, розглянутий у попередній лекції. Тому в деяких випадках для опису системи достатньо мати певний набір даних, наприклад, числову послідовність, яка є реакцією системи на вхідний сигнал у вигляді одиничного імпульсу. Така послідовність, як відомо, називається імпульсною характеристикою системи. Таким чином, в якості опису системи може використовуватися деякий набір даних, який в разі використання встановлених правил також дозволяє вирішити зазначену задачу: знайти реакцію системи на вхідний сигнал.

Отже, один спосіб опису лінійної стаціонарної дискретної системи нам вже відомо – це імпульсна характеристика системи. Вона містить в собі всю інформацію про систему. Дискретна згортка імпульсної характеристики системи та довільного вхідного сигналу дає нам числову послідовність, яка є

нічим іншим як реакцією системи на цей вхідний цифровий сигнал. В поточній лекції будуть розглянуті ще й інші способи опису систем:

- різницеві рівняння,
- блок-схеми,
- операторне представлення.

В цій лекції розглядатимуться лише системи без зворотного зв'язку. Отже, ця лекція не є повним ресурсом, який охоплює вказані форми подання систем в повному об'ємі, вона є лише початком введення у способи опису систем, яке буде продовжено у наступних лекціях.

Способи опису систем різноманітні. Вони є ефективним засобом аналізу та синтезу дискретних систем. Для різних завдань підходять різні способи опису чи, інакше кажучи, «представлення» систем. Існують методи переходу від однієї форми представлення системи до іншої. З ними ми також познайомимося.

Різницеві рівняння

Різницеве рівняння є формулою, яка показує, як за відомими відліками вхідного сигналу отримати значення якогось конкретного відліку вихідного сигналу, який має n -ий номер індексу. Різницеве рівняння показує, яким чином розрахувати будь-який n -ий відлік $y[n]$ на виході системи за відомим n -м відліком сигналу $x[n]$, який діє на вході системи в цей самий момент часу, а також за всіма відліками вхідного сигналу $x[n-1]$, $x[n-2]$, $x[n-3]$,... і т.д., що надійшли на вхід системи раніше і які також відомі, або лише за частиною цих відліків.

Найпростіший різницеве рівняння описує найпростішу систему без зворотного зв'язку і воно має ось такий вигляд:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (5.1)$$

Це рівняння пов'язує n -ий відлік вихідного сигналу $y[n]$ тільки з двома відліками на вході системи: n -м відліком $x[n]$, який діє в той же момент часу, та попереднім $x[n-1]$, тобто тим, який надійшов на вхід системи раніше на один такт дискретизації (на час T раніше, де T – крок дискретизації). У більш загальному вигляді, для більш складних систем без зворотного зв'язку, різницеве рівняння має бути записане у вигляді:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \quad (5.2)$$

В такому вигляді різницеве рівняння пов'язує n -ий відлік вихідного сигналу $y[n]$ з M попередніми відліками сигналу x : від $x[n]$ до $x[n-M]$. Наприклад, із двома попередніми:

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] \quad (5.3)$$

Вочевидь, конкретний вигляд різницевого рівняння залежить від структури системи, яку це рівняння представляє. Наприклад, деяка найпростіша система є різницеvim рівнянням (5.1). Більш складна система представляється більш складним рівнянням (5.3) і т.д. Все залежить від конкретної системи. Проте різницеві рівняння повною мірою описують будь-яку лінійну стаціонарну систему: знаючи різницеве рівняння, яким описується система, можна знайти реакцію цієї системи на будь-який вхідний цифровий сигнал. Наприклад, давайте подамо на вхід системи, що описується різницеvim рівнянням (5.1) вхідний сигнал $x[n]$ у вигляді одиничного імпульсу

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

тобто:

$$x[n] = \delta[n] \quad (5.5)$$

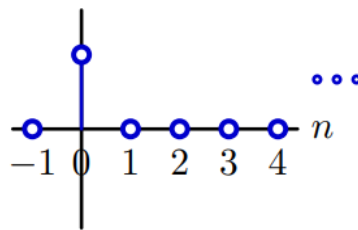


Рис. 5.1 Вхідний сигнал у вигляді одиничного імпульсу

Знайдемо реакцію системи на цей сигнал. Для цього підставляємо значення індексу n в формулу (5.1) і знаходимо відповідні значення $y[n]$:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] - x[n-1] \\
 n = -1 & \quad y[-1] = x[-1] - x[-2] = 0 - 0 = 0 \\
 n = 0 & \quad y[0] = x[0] - x[-1] = 1 - 0 = 1 \\
 n = 1 & \quad y[1] = x[1] - x[0] = 0 - 1 = -1 \\
 n = 2 & \quad y[2] = x[2] - x[1] = 0 - 0 = 0 \\
 n = 3 & \quad y[3] = x[3] - x[2] = 0 - 0 = 0 \\
 n = 4 & \quad y[4] = x[4] - x[3] = 0 - 0 = 0 \\
 & \dots
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Результат розрахунку – послідовність $y[n]$ – можна представити на графіку:

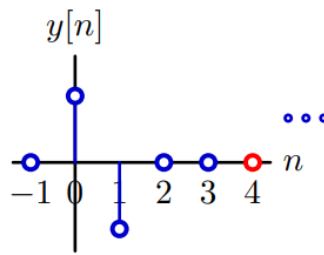


Рис 5.2 Реакція системи на вхідний сигнал у вигляді одиничного імпульсу

Отримана реакція є нічим іншим як імпульсною характеристикою системи, оскільки це – реакція системи на одиничний імпульс. Таким чином, ми навчилися, використовуючи різницеві рівняння, знаходити імпульсну характеристику системи, тобто переходити від однієї форми представлення системи до іншої форми представлення.

Блок-схеми

Блок схеми використовують графічні засоби для представлення систем, зокрема для цього застосовуються такі графічні елементи:



– сумування,



– множення на постійний коефіцієнт N ,



– затримка на один такт (зсув вправо на одну позицію).

З використанням цих графічних елементів найпростішу систему, що описується різницевою рівнянням (5.1), можна представити наступною блок-схемою:

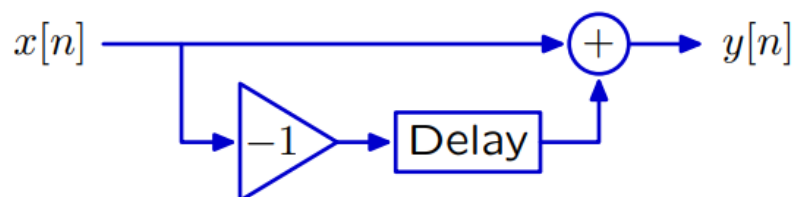


Рис. 5.3 Блок-схема найпростішої системи

Ця схема показує, що для того, аби отримати вихідний відлік $y[n]$, необхідно скласти вхідний відлік $x[n]$ з інвертованим (помноженим на -1) попереднім відліком, тобто відліком, який був на один такт раніше (а це якраз і є відлік $x[n-1]$), проте затриманим на один такт. Цю затримку на один такт виконує елемент **Delay**.

Подивимося, як користуватися цією блок-схемою. Для цього знов подамо на вхід системи одиничний імпульс, та розглянемо, що станеться із системою, яка перебувала перед цим у стані спокою.

Стан спокою – це такий стан системи, коли на вході і виході системи сигнали до моменту n_0 весь час дорівнювали нулю: $x[n] = 0, y[n] = 0$ для всіх $n < n_0$. Якщо ж ми кажемо, що система до моменту приходу одиничного імпульсу знаходилася у стані спокою, то це означає, що для всіх індексів, менших 0-го, всі відліки вхідного та вихідного сигналу були нульовими: $x[n] = 0, y[n] = 0$ для всіх $n < 0$:

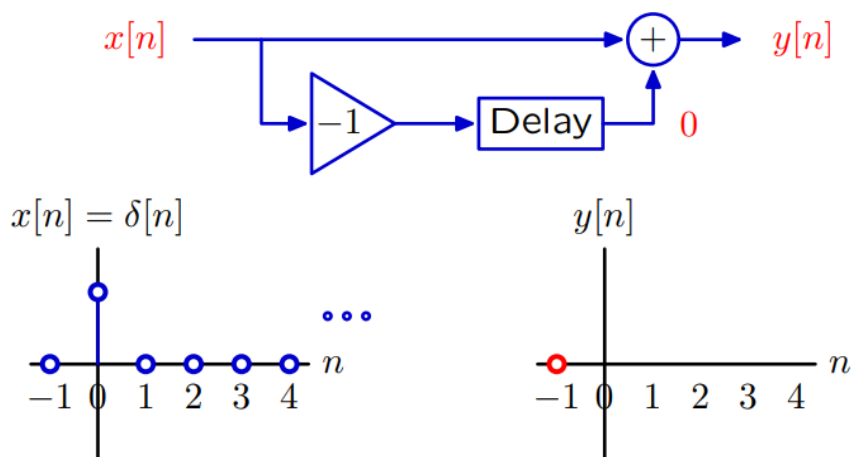


Рис. 5.4 Система (5.1) в стані спокою до приходу одиничного імпульсу.

Тепер настає час, коли $n=0$ і на вхід надходить одиниця. Вона інвертується та надходить на вхід елемента затримки. Але на виході елемента затримки стоїть попереднє значення вхідного сигналу, яке відповідає індексу $n = -1$ і це значення дорівнює нулю. У сумі отримуємо вихідний сигнал $y[0] = 1$.

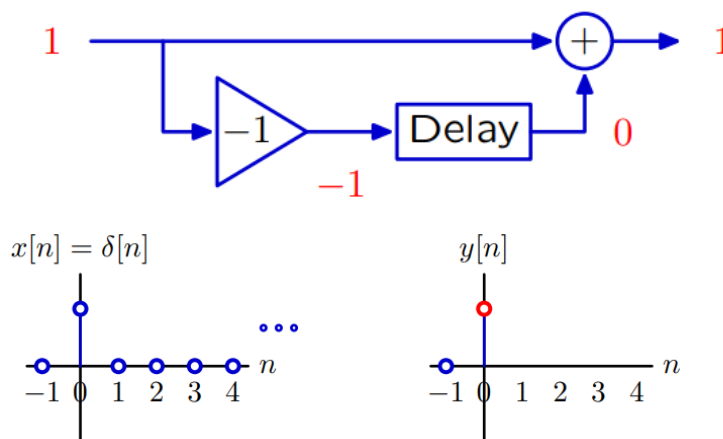


Рис. 5.5 Система (5.1) в стані $n = 0$.

Переходимо до індексу $n=1$. Тепер на вході діє відлік $x[1] = 0$, але попереднім був відлік $x[0] = 1$ і саме це значення, помножене на -1 тепер стоїть на виході елемента затримки. Складаючи його зі значенням $x[1] = 0$, отримуємо, що $y[1] = -1$

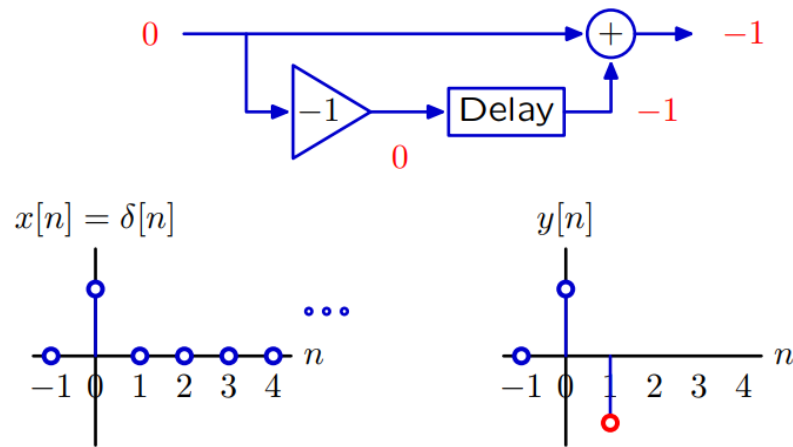


Рис. 5.6 Система (5.1) в стані $n = 1$

Переходячи до індексу $n = 2$, ми бачимо, що на вході діє відлік $x[2]=0$, попередній відлік також був нульовим $x[1]=0$, відповідно, на виході елемента затримки також встановлено 0. Сума нулів дає нам нульове значення вихідного сигналу: $y[2] = 0$. Переходячи до наступних індексів: 3-го, 4-го і т.д., – ми весь час будемо отримувати ту ж саму картину. Тобто, для всіх індексів, починаючи з другого і вище, значення вихідного сигналу дорівнюватиме нулю.

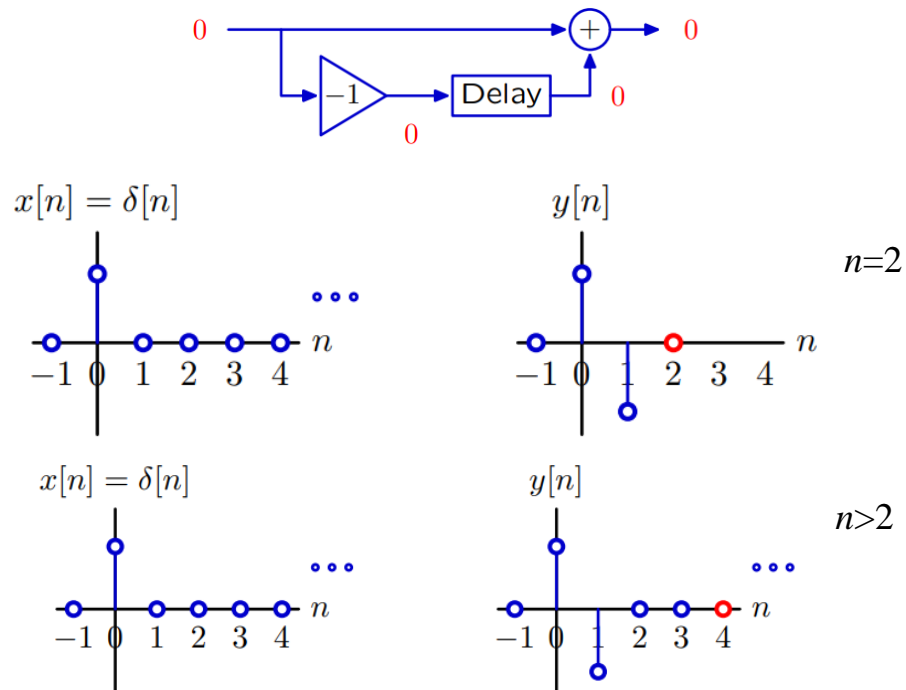





Рис. 5.7 Система (5.1) в стані $n = 2$ та всіх наступних станах

Як приклад застосування блок-схем для опису дискретних систем ми розглянули проходження одиничного імпульсу через систему і, таким чином отримали імпульсну характеристику системи, тобто ми знову зробили перехід від одного способу опису систем до іншого: від блок-схеми до імпульсної характеристики.

Важливою перевагою блок-схем є їхня наочність. Проте основною їх перевагою є те, що блок-схеми відкривають прямий шлях до побудови лічильних пристроїв та алгоритмів. Кожному елементу блок-схеми відповідає елемент лічильного пристрою, таким чином з їх сукупності можна створити цифровий пристрій загалом. Те саме стосується і алгоритмів.

Елемент блок-схеми	Елемент лічильного пристрою	Елемент алгоритму
	Суматор	Підсумовування
	Підсилювач	Множення
	Лінія затримки	Затримка

Операторне представлення

Абстракції

До цього часу ми завжди говорили лише про окремі відліки сигналів. Всі описи зводилися до того, як отримати, обчислити n -ий відлік вихідного сигналу $y[n]$ за відомим поточним $x[n]$, а також попередніми $x[n-1]$, $x[n-2]$, $x[n-3]$,... відліками вхідного сигналу. Тобто до того, як із відліків знову отримати відлік. Ми не говорили про сигнали повністю, а лише про відліки та алгоритми переходу від одних відліків до інших. Настав час змінити цю ситуацію та перейти до обговорення сигналів загалом.

Перейдемо до абстракцій. Тобто замість окремих відліків $x[n]$ (n змінюється від $-\infty$ до $+\infty$) введемо позначення X – для сигналу загалом. Будемо розуміти, що X включає всі відліки цього сигналу, тобто всі $x[n]$ для всіх n від $-\infty$ до $+\infty$. Те ж саме стосується й сигналу, наприклад, Y , який включає в себе всі відліки $y[n]$ відразу. Або Z , або Y_1 , або Y_2 , або будь-якого іншого сигналу. Будь-який сигнал включає всі свої відліки. Тепер ми говоритимемо про сигнали.

Оператор затримки

Введемо оператор затримки, або інакше – оператор зміщення вправо, і позначимо його R . Цей оператор зміщує всю числову послідовність, весь сигнал вправо на один індекс. Це означає, що оператор R затримує кожен відлік сигналу на один крок дискретизації. Тобто затримує сигнал на один такт. Наприклад застосуємо цей оператор до сигналу X , який є одиничним

імпульсом. Тобто, виконаємо операцію $Y = RX$. Результат виконання цієї операції представлено на рисунку:

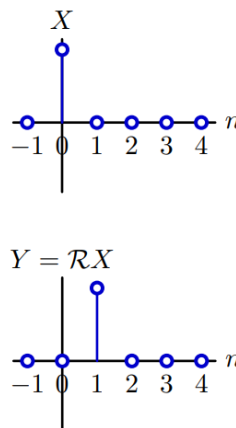


Рис. 5.8 Застосування оператора R до сигналу у вигляді одиничного імпульсу.

Якщо ми візьмемо більш складний сигнал, наприклад такий, як на рисунку 5.9, то результат буде таким самим: вся послідовність зміститься вправо:

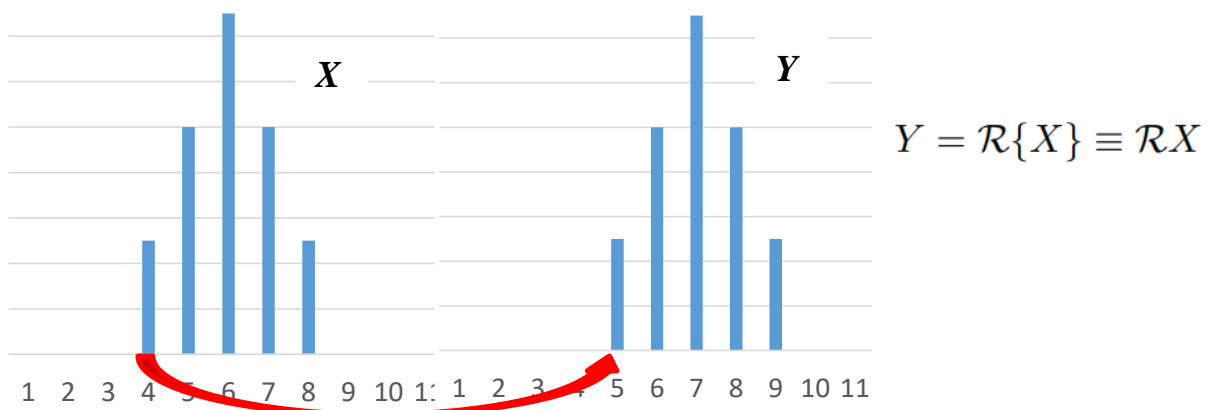


Рис. 5.9 Застосування оператора R до певного сигналу

Як бачимо, ми отримали той самий сигнал, але зміщений на одну позицію вправо – замість того, щоб починатися в момент часу, який відповідає 4-му індексу, він починається в момент часу, який відповідає 5-му індексу: сигнал Y затримано на один крок дискретизації, він приходить на один такт пізніше, ніж сигнал X .

Тепер, коли ми ввели абстракції сигналів та оператор зміщення вправо, ми можемо в якості прикладу переписати різницеве рівняння (5.1) у вигляді:

$$Y = X - RX \tag{5.7}$$

а блок-схему (рис. 5.3) можемо перемалювати таким чином:

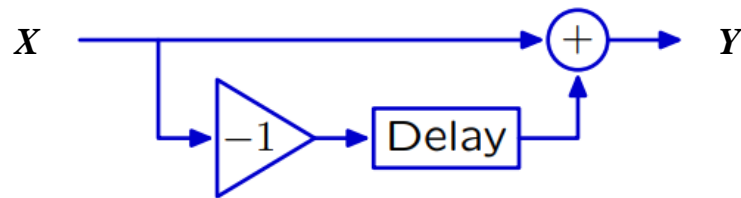


Рис. 5.10 Подання найпростішої системи блок-схемою на основі абстрактних сигналів

Слід пам'ятати, що тепер ми розуміємо процес таким чином: операції проводяться над сигналами повністю, наприклад: множиться *увесь* сигнал на -1 (тобто всі відліки відразу); вправо зміщується *увесь* сигнал (тобто всі відліки відразу), тощо.

Еквівалентні блок-схеми

Подання систем за допомогою операторів є найпотужнішим засобом для побудови та оптимізації алгоритмів цифрової обробки. Як було зазначено раніше, елементи алгоритму і лічильних пристроїв наочно виражаються блок-схемами. У цьому розділі буде показано, як ці два способи працюють спільно.

Розглянемо послідовне з'єднання систем або, як його ще називають, каскадну побудову систем. Отже, з'єднаємо послідовно дві найпростіші системи, представлені блок-схемою рисунку 5.10.

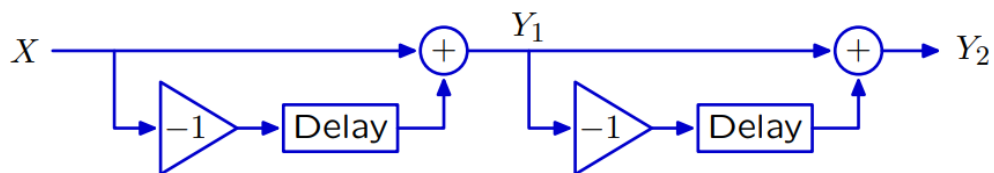


Рис. 5.11 Послідовне (каскадне) з'єднання систем

Сигнал на вході системи – X , сигнал на виході першого каскаду – Y_1 , він є вхідним сигналом для другого каскаду. Сигнал на виході всієї системи – Y_2 . Запишемо в операторній формі різницеві рівняння для першого каскаду:

$$Y_1 = (1 - R)X \quad (5.8)$$

Для другого каскаду

$$Y_2 = (1 - R)Y_1 \quad (5.9)$$

Підставляємо в рівняння (5.9) значення Y_1 з рівняння (5.8) та отримуємо різницеве рівняння в операторній формі для всієї системи:

$$Y_2 = (1 - R)(1 - R)X \quad (5.10)$$

Провівши множення співмножників один на одне (адже це оператори!), можна записати отриманий вираз наступним чином:

$$Y_2 = (1-R)(1-R)X = (1-2R+R^2)X \quad (5.11)$$

Помножувач $(1-2R+R^2)$, який пов'язує вхідний та вихідний сигнали – це і є **оператор** системи. Згадаймо, що системи ми розглядаємо в такий спосіб (лекція 3):

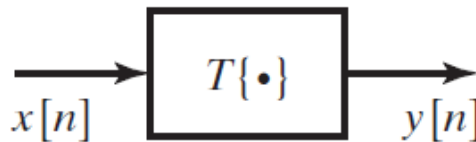


Рис. 5.12 Система та системний оператор

де $y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$ – оператор системи, що пов'язує вхідний та вихідний сигнали.

Тепер спробуємо попрацювати з різницеvими рівняннями у їхній звичайній формі (5.1), з урахуванням позначення сигналів (і, відповідно, – відліків), наведене на рисунку 5.11. Отримуємо таке:

$$\begin{aligned} y_2[n] &= y_1[n] - y_1[n-1] = \\ &= (x[n] - x[n-1]) - (x[n-1] - x[n-2]) = \\ &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Схожість структури оператора $(1-2R+R^2)$, представленого у вигляді полінома, та структури отриманого різницевого рівняння системи (5.12) очевидна. Відліку $x[n-1]$, затриманому на один такт, відповідає оператор R у першому ступені. Затриманому на два такти відліку $x[n-2]$ відповідає оператор R , зведений у другий ступень, тобто R^2 . Взагалі, показник ступеню, в який підноситься оператор R , відповідає кількості тактів затримки сигналу. Коефіцієнти, що стоять при операторах в ступеню, який відповідає кількості тактів затримки, – однакові! Тобто, між структурою різницевого рівняння та структурою оператора системи існує цілком однозначна відповідність!

Оператор системи, так само, як і імпульсна характеристика системи, так само, як і різницеvі рівняння, так само, як і блок-схема містить в собі всю інформацію про систему. За допомогою оператора системи можна знайти реакцію на будь-який вхідний сигнал.

Якщо ж тепер використувувати системний оператор у формі $(1 - 2R + R^2)$ в якості основи для побудови блок-схеми системи, то ми отримаємо блок-схему, яка наведена на наступному малюнку:

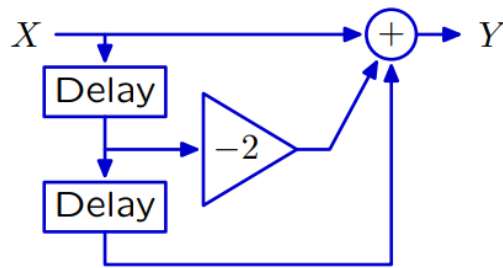


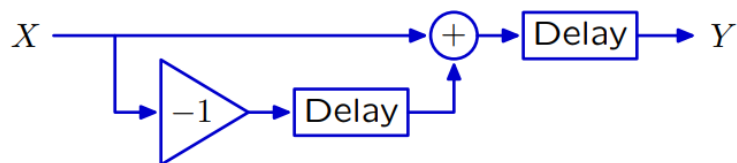
Рис. 5.13 Блок-схема на основі оператора $(1 - 2R + R^2)$

Отримана схема суттєво відрізняється від блок-схеми, наведеної на малюнку 5.11. Але ж обидві схеми як на рис. 5.11, так й на рис. 5.13 описують одну й ту ж саму систему! В цьому випадку кажуть, що ці блок-схеми – еквівалентні.

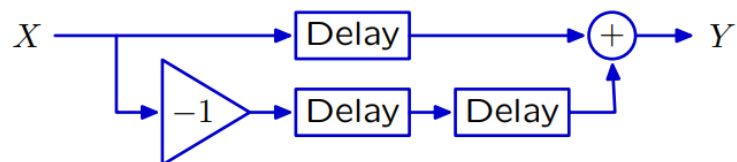
Це означає, що одна й та ж сама система може бути представлена різними блок-схемами! Отже, одна й та ж сама система може бути представлена різними алгоритмами, чи, інакше кажучи, різними розрахунковими схемами!



Нижче наведені інші приклади еквівалентних блок-схем, тобто схем, які мають різний вигляд, але представляють ту ж саму систему, оскільки відповідають тому ж самому оператору системи.

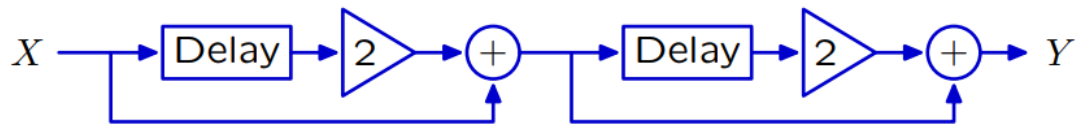


$$Y = R(1 - R)X$$

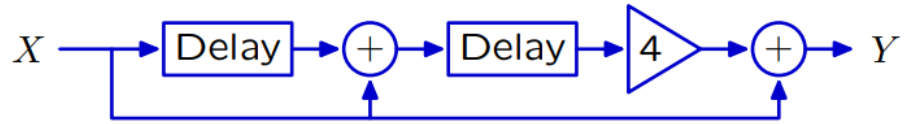


$$Y = (R - R^2)X$$

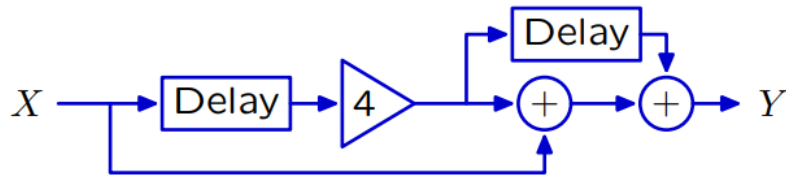
Рис. 5.14 Приклад еквівалентних блок-схем системи, оператор якої має вигляд $R(1 - R)$



$$Y = (2\mathcal{R} + 1)(2\mathcal{R} + 1) X$$



$$Y = (4\mathcal{R}^2 + 4\mathcal{R} + 1) X$$



$$Y = (4\mathcal{R}^2 + 4\mathcal{R} + 1) X$$

Рис. 5.15 Приклад еквівалентних блок-схем системи, оператор якої має вигляд $(2\mathcal{R} + 1)(2\mathcal{R} + 1)$

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Різницеві рівняння як спосіб опису лінійної стаціонарної дискретної системи без зворотного зв'язку.
2. Блок-схеми як спосіб опису лінійної стаціонарної дискретної системи без зворотного зв'язку.
3. Операторне представлення як спосіб опису лінійної стаціонарної дискретної системи без зворотного зв'язку.
4. Еквівалентні блок-схеми в описі лінійних стаціонарних дискретних систем без зворотного зв'язку.

Лекція № 6

Тема: Способи опису лінійних стаціонарних дискретних систем: системи із зворотним зв'язком.

Зміст

Опис суматора як системи зі зворотним зв'язком	2
Системи із зворотним зв'язком	6
Різницеві рівняння у загальному вигляді	7
Види імпульсної характеристики	8
Скінченні та нескінченні імпульсні характеристики	8
Збіжні та розбіжні імпульсні характеристики	9
Контрольні питання за темою	11
Рівень модуля	11
Рівень курсу	11

Джерела:

1. Сергієнко А.Б. Цифрова обробка сигналів. - 3-тє вид. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 768 с.: іл.
2. Опенгейм А., Шафер Р. Цифрова обробка сигналів - М: Техносфера, 2006. - 856с.
3. https://uk.wikipedia.org/wiki/Ділення_многочленів

Опис суматора як системи зі зворотним зв'язком

У попередніх лекціях було розглянуто такі способи опису систем:

- імпульсна характеристика,
- різницеве рівняння,
- блок-схема,
- операторне представлення.

Важливо вказати, що до сьогодні ми розглядали виключно системи без зворотного зв'язку. Спробуємо тепер розібратися, що ж це таке – системи з зворотнім зв'язком, та яким чином можна їх описувати? Для того, аби відповісти на це питання, в першу чергу зазначимо, що до наведеного вище списку способів опису систем можна додати ще один спосіб – словесний опис системи, яка, наприклад, вміє виконувати ось такі рекомендації: «Аби зменшити обсяг пам'яті, необхідний для зберігання довгої послідовності чисел, значення яких близькі один до одного, збережіть перше число, а далі записуйте в пам'ять тільки різницю між наступними значеннями, що йдуть один за одним».

Даний опис є *вказівкою*, рецептом того, як отримати бажаний результат: зменшити об'єм пам'яті. Й система виконує цю вказівку, виконує дії за вказаним рецептом. Проте, цю саму систему, яка робить теж саме, можна задати й по-іншому, висунувши певну *вимогу* до системи. Наприклад, ми хочемо, щоб виконувалася ось така вимога щодо співвідношення між вхідним та вихідним сигналами:

$$Y - RY = X \quad (6.1)$$

У термінах різницевих рівнянь ця вимога записується таким чином:

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \quad (6.2)$$

А тепер подивимося, яка система може виконати таку вимогу? Перепишемо операторне рівняння (6.1) трохи інакше:

$$Y = RY + X \quad (6.3)$$

Відповідне різницеве рівняння набуде вигляду:

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (6.4)$$

Ось тепер стає зрозуміло, що це за система. Це – суматор! Він робить складання значень усіх попередніх відліків вхідного сигналу. Суматор був розглянутий як приклад 3.4 у лекції 3. Тоді ми його визначали формулою

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (6.5)$$

Здається дивним, що зовсім різні за виглядом формули визначають одну й ту ж саму систему – суматор. Але ми вже знаємо, що це нормально, оскільки розглядали еквівалентні блок-схеми у попередній лекції. До речі, яка блок-схема системи, що описується операторним рівнянням (6.3)? Ось вона на рисунку 6.1:

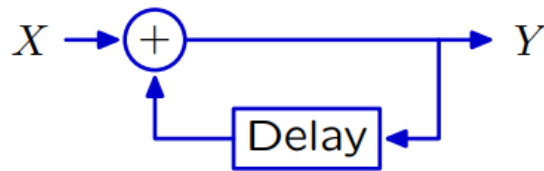


Рис. 6.1 Блок-схема суматора на основі операторного рівняння (6.3)

А тепер те саме, але на основі різницевого рівняння:

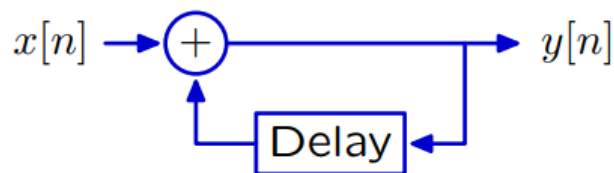


Рис. 6.2 Блок-схема суматора на основі різницевого рівняння (6.4)

Блок схема працює наступним чином: новий відлік вихідного сигналу $y[n]$ отримується як сума відліку вхідного сигналу $x[n]$, який діє в цей самий момент часу n , і значення попереднього відліку вихідного сигналу $y[n-1]$. Відлік $y[n-1]$ ми отримуємо на виході елемента затримки, який затримує відлік вихідного сигналу на один такт. Пристрій затримки запам'ятовує попереднє значення вихідного сигналу $y[n-1]$ й видає це значення на своєму виході в момент часу n , хоча на його вході в цей час вже діє поточний відлік $y[n]$, який точно також буде запам'ятовуватися, але буде виданий вже в майбутньому такті роботи системи, в момент часу $n+1$.

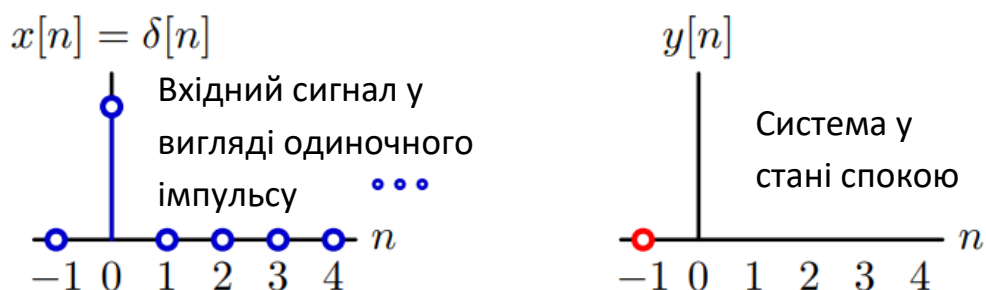


Рис. 6.3 На вхід суматора в стані спокою подається одиничний імпульс

Якщо подати на вхід цієї системи, яка від початку перебуває у стані спокою, сигнал у вигляді одиничного імпульсу $x[n]=\delta[n]$ (рис. 6.3), то вирішуючи різницеве рівняння (6.4) так, як це представлено формулами (6.6), ми зможемо отримати імпульсну характеристику суматора (рис. 6.4).

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] + y[n-1] \\
 n = -1 & \quad y[-1] = x[-1] + y[-2] = 0 + 0 = 0 \\
 n = 0 & \quad y[0] = x[0] + y[-1] = 1 + 0 = 1 \\
 n = 1 & \quad y[1] = x[1] + y[0] = 0 + 1 = 1 \\
 n = 2 & \quad y[2] = x[2] + y[1] = 0 + 1 = 1 \\
 n = 3 & \quad y[3] = x[3] + y[2] = 0 + 1 = 1 \\
 n = 4 & \quad y[4] = x[4] + y[3] = 0 + 1 = 1 \\
 & \dots
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

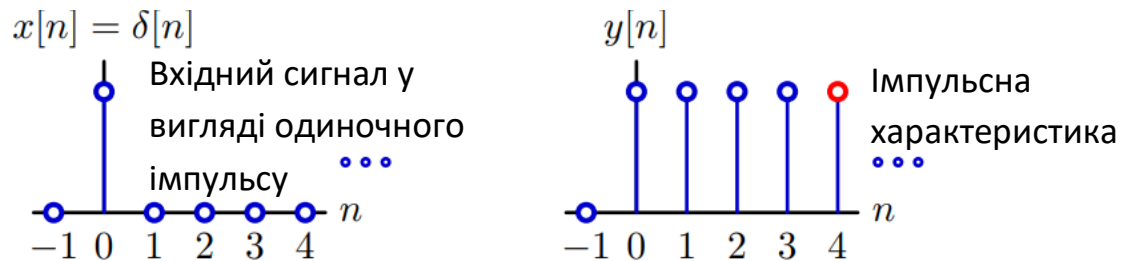


Рис. 6.4 Імпульсна характеристика суматора

Отриманий графік підтверджує, що система (6.3) функціонує як суматор.

Як було встановлено у попередній лекції, одні й ті ж самі системи можуть бути представлені абсолютно різними блок-схемами, і, відповідно, абсолютно різними розрахунковими схемами, тобто різними способами реалізації алгоритму. А ми пам'ятаємо, що цифрові системи – це алгоритми! Тепер розглянемо той самий суматор, але на основі формули (6.5). Розкриємо цю формулу:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + \dots
 \tag{6.7}$$

Відповідна цій формулі блок-схема (рис. 6.5) виглядає зовсім інакше, ніж блок-схема на малюнку 6.1, хоча і та й інша описують ту ж саму систему, той самий алгоритм.

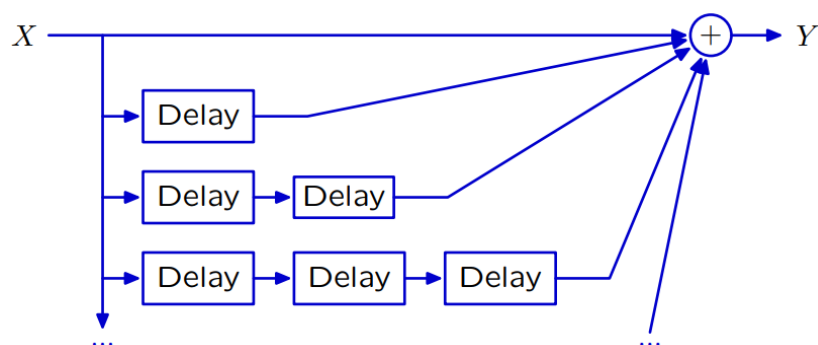


Рис. 6.5 Блок-схема суматора на основі формули (6.7)

Як так виходить? Щоб зрозуміти це, перепишемо різницеве рівняння (6.7) в операторному вигляді. При цьому кожній затримці відліків сигналу $x[n]$

ставимо у відповідність оператор затримки R , піднесений до степеню, показник якого дорівнює кількості тактів затримки. Наприклад, $x[n-4] \rightarrow R^4$. В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} Y &= X + RX + R^2X + R^3X + \dots \\ Y &= (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)X \end{aligned} \quad (6.8)$$

Задамося питанням: чи справді рівняння (6.8) та рівняння (6.1), яке можна переписати будь-яким з наступних способів

$$(1-R)Y = X \quad Y = RY + X \quad Y = \frac{1}{1-R} X, \quad (6.9)$$

описують одну й ту ж саму систему? Щоб це перевірити, зробимо таким чином. Будемо вважати, що на вхід системи (6.9) надходить сигнал X_1 , йому відповідає сигнал на виході цієї системи Y_1 :

$$(1-R)Y_1 = X_1 \quad (6.10)$$

А в цей же час на вхід системи (6.8) надходить сигнал X_2 , відповідно сигнал на її виході Y_2 :

$$Y_2 = (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)X_2 \quad (6.11)$$

Далі вважаємо, що сигнали на вході: X_1 і X_2 – однакові. Тепер залишилося перевірити, чи однакові сигнали Y_1 і Y_2 на виході? Якщо $Y_2 = Y_1$, то системи однакові, тобто системи (6.8) і (6.9) – це одне й те ж саме. Отже:

$$Y_2 = (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)X_2 = (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)X_1, \quad (6.12)$$

тому що $X_1 = X_2$. Підставимо замість X_1 ліву частину виразу (6.10), потім зробимо множення та віднімання:

$$\begin{aligned} Y_2 &= (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)X_1 = (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)(1-R)Y_1 = \\ &= ((1 + R + R^2 + R^3 + \dots) - (R + R^2 + R^3 + \dots))Y_1 = Y_1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Таким чином, ми отримали, що завжди $Y_2 = Y_1$. Отже, рівняння (6.8) і (6.9) описують одну й ту ж саму систему. Звідси також випливає, що оператори, що зв'язують вхідний та вихідний сигнал у цих виразах, рівні між собою:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{1-R} X \\ Y &= (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)X \\ \frac{1}{1-R} &= (1 + R + R^2 + R^3 + \dots) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Насправді, це дійсно так. Суто математично, виходячи з правил ділення поліномів, з якими можна познайомитися за посиланням [3]:

$$1 - \mathcal{R} \left| \begin{array}{r} 1 + \mathcal{R} + \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^3 + \dots \\ 1 \\ \hline 1 - \mathcal{R} \\ \mathcal{R} \\ \hline \mathcal{R} - \mathcal{R}^2 \\ \mathcal{R}^2 \\ \hline \mathcal{R}^2 - \mathcal{R}^3 \\ \mathcal{R}^3 \\ \hline \mathcal{R}^3 - \mathcal{R}^4 \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{1-R} = (1 + R + R^2 + R^3 + \dots) \quad (6.15)$$

Таким чином, суматор може бути представлений простим дробом $\frac{1}{1-R}$, але може бути представлений і нескінченним поліномом $1 + R + R^2 + R^3 + \dots$, де R – оператор затримки.

Системи із зворотним зв'язком

Системи, представлені блок-схемами на рисунках 6.1 та 6.2 є системами із зворотним зв'язком. У цих системах існують гілки, які пов'язують вихідний сигнал із самим собою. Ці гілки утворюють петлі зворотного зв'язку, завдяки яким попереднє значення сигналу бере участь у формуванні поточного значення сигналу. На зазначених блок-схемах видно ці петлі: якщо йти у напрямку стрілок, то знову приходиш в ту ж саму точку. Таких петель не було в системах, які розглядалися в попередніх лекціях – то були системи без зворотного зв'язку. Нижче наведено приклади блок-схем систем із зворотним зв'язком та без зворотного зв'язку. Важливо навчитися аналізувати блок-схеми та знаходити петлі зворотного зв'язку, якими циркулюють сигнали, якщо, зрозуміло, вони там є. Так само важливо навчитися робити правильний висновок про відсутність у системі зворотних зв'язків, якщо їх там дійсно немає.

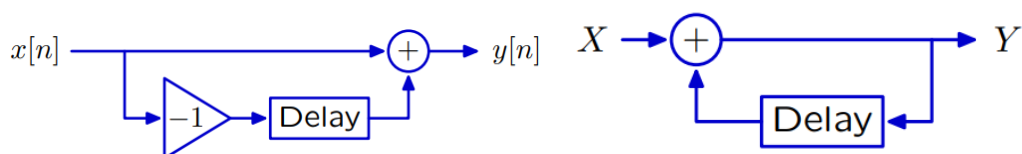


Рис. 6.6 Приклад систем без зворотного зв'язку (ліворуч) та зі зворотним зв'язком (праворуч)

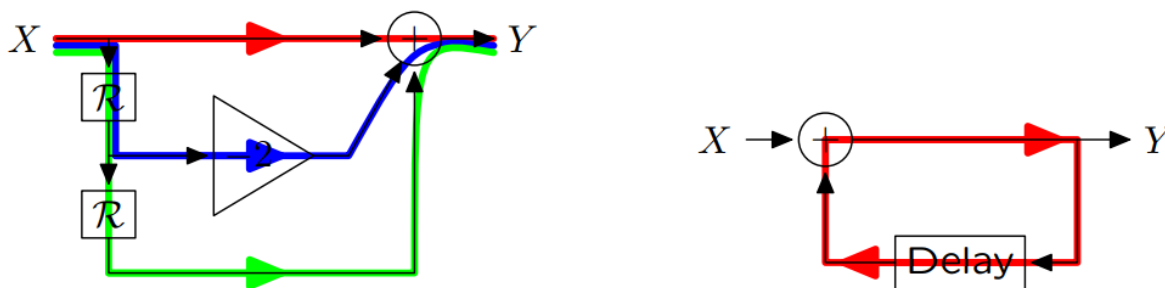


Рис. 6.7 Приклад систем без зворотного зв'язку (ліворуч) та зі зворотним зв'язком (праворуч)

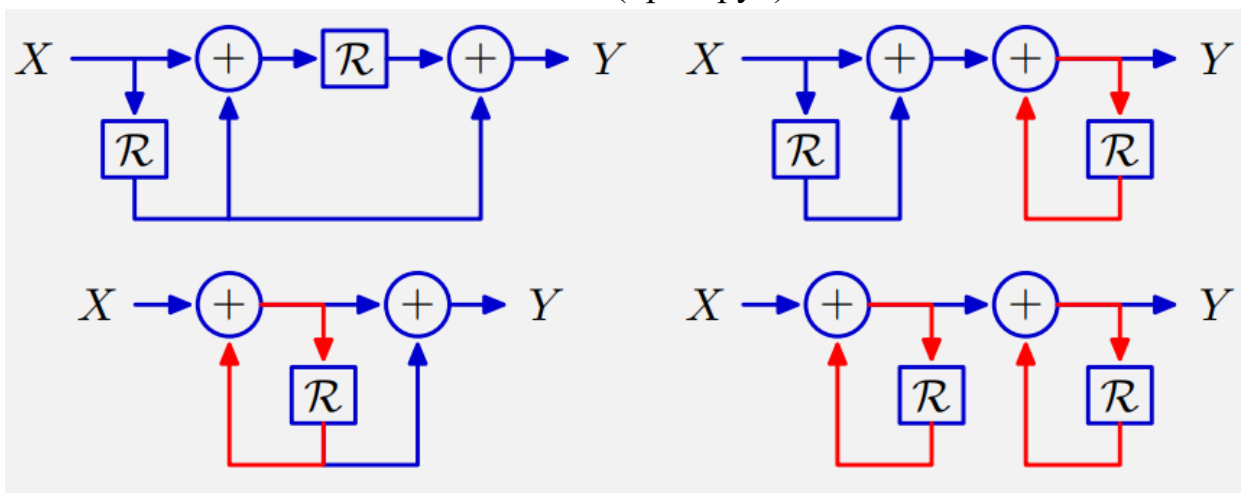


Рис. 6.8 Приклади систем без зворотного зв'язку та зворотного зв'язку – петлі зворотного зв'язку виділені червоним кольором.

Різницеві рівняння у загальному вигляді

У попередніх лекціях ми розглядали різницеві рівняння виключно у вигляді

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \tag{6.16}$$

Наприклад, найпростіша різницева схема має ось такий вигляд:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \tag{6.17}$$

Різницеві рівняння, в яких присутні попередні відліки лише вхідних сигналів, відповідають виключно системам без зворотного зв'язку. У першій же найпростішій системі зі зворотним зв'язком, яку ми розглянули в цій лекції (6.4), вже з'являється відлік вихідного сигналу, затриманий на один такт. Рівняння (6.4) можна записати у вигляді:

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \tag{6.18}$$

У такій формі різницевого рівняння відліки вихідного сигналу зібрані ліворуч, а відліки вхідного сигналу – праворуч. І якщо крім поточного значення вихідного сигналу в різницевому рівнянні присутні ще й попередні його значення, то це означає, що система містить зворотні зв'язки. Таким чином, за виглядом різницевого рівняння можна відразу визначити, чи є зворотні зв'язки в системі чи ні?

Резюмуючи сказане, запишемо вид різницевого рівняння для будь-якої лінійної стаціонарної дискретної системи:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \quad (6.19)$$

Відповідні операторні форми представлення систем мають вигляд

$$Y \sum_{k=0}^N a_k R^k = X \sum_{m=0}^M b_m R^m \quad (6.20)$$

Одна лінійна стаціонарна дискретна система відрізняється від іншої лінійної стаціонарної дискретної системи числами N і M , а також коефіцієнтами a_k і b_m . Однак, якщо дискретна система лінійна та стаціонарна, то обов'язково має існувати представлення (6.19) та (6.20). І у зворотний бік: якщо дискретна система не є лінійною та стаціонарною, то для неї не існує представлення (6.19) та (6.20). І ще: якщо для системи існує представлення (6.19) і (6.20), то ця система і лінійна, і стаціонарна.

Види імпульсних характеристик

Кожна система має свою імпульсну характеристику, що відрізняється від імпульсних характеристик інших систем. Якщо ж дві системи мають абсолютно однакову імпульсну характеристику, то ці дві системи – ідентичні.

За виглядом імпульсної характеристики можна визначити класи систем. Клас систем – це сукупність систем, які мають загальні властивості. Тобто, за виглядом імпульсної характеристики можна визначити основні властивості системи. Тому в теорії цифрових систем виділяють окремі види імпульсних характеристик. Насамперед – це *скінченні* та *нескінченні* імпульсні характеристики. Також виділяють *збіжні* та *розбіжні* імпульсні характеристики систем.

Скінченні та нескінченні імпульсні характеристики

Імпульсну характеристику найпростішої системи без зворотного зв'язку (рис 6.9а), яка реалізує найпростішу різницеву схему, було отримано в попередній лекції. Вона має вигляд, представлений малюнку 6.9б.

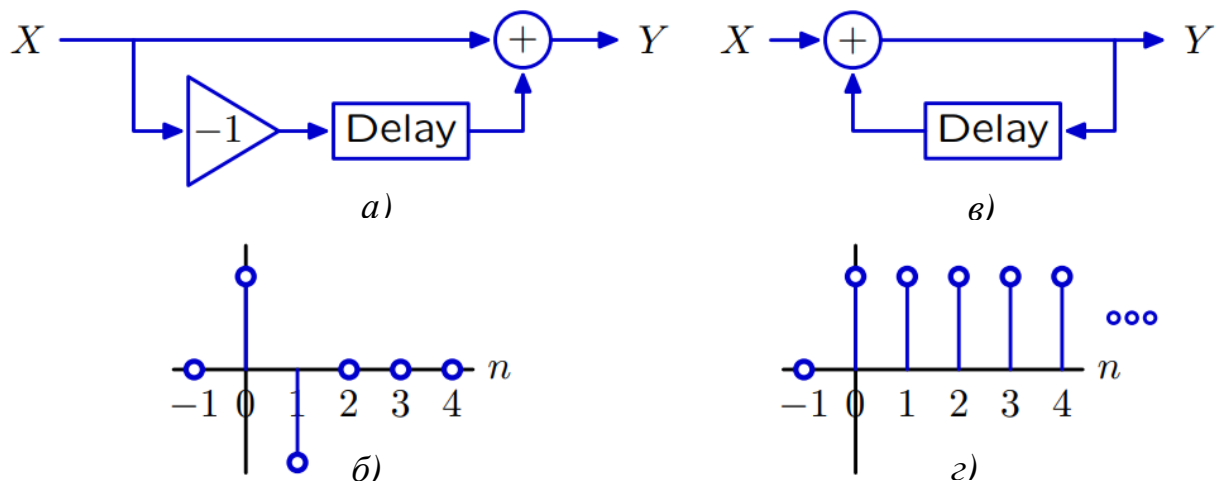


Рис 6.9 Блок-схеми та імпульсні характеристики систем

- а) блок схема найпростішої системи без зворотного зв'язку та імпульсна характеристика цієї системи (б); в) блок схема найпростішої системи зі зворотним зв'язком та імпульсна характеристика цієї системи (г)

Як можна побачити з рисунку, імпульсна характеристика набуває деяких значень, відмінних від нуля, лише на початкових індексах, коли $n=0$ і $n=1$. За більших індексів значення відліків дорівнюють нулю. Це – *скінченна імпульсна характеристика*. В загальному випадку скінченна імпульсна характеристика (СІХ) – це така імпульсна характеристика, яка зі зростанням номеру індексу рано чи пізно встановлюється в нуль, після чого свого нульового значення вже не змінює. Системи, які мають таку імпульсну характеристику, називають СІХ-системами.

На відміну від щойно розглянутої характеристики імпульсна характеристика найпростішої системи із зворотним зв'язком (рис 6.9в) є нескінченною, вона ніколи не приходить у нульове значення. Це – *нескінченна імпульсна характеристика* (НІХ), а системи, які мають подібну імпульсну характеристику, називають НІХ-системами.

Системи без зворотного зв'язку (33) не можуть мати нескінченну імпульсну характеристику. Системи без 33 – це завжди СІХ-системи. А от імпульсна характеристика систем з 33 в загальному випадку є нескінченною, тому системи з 33 відносяться до класу СІХ-систем.

Збіжні та розбіжні імпульсні характеристики

На наступному рисунку наведено блок-схеми та імпульсні характеристики деяких систем.

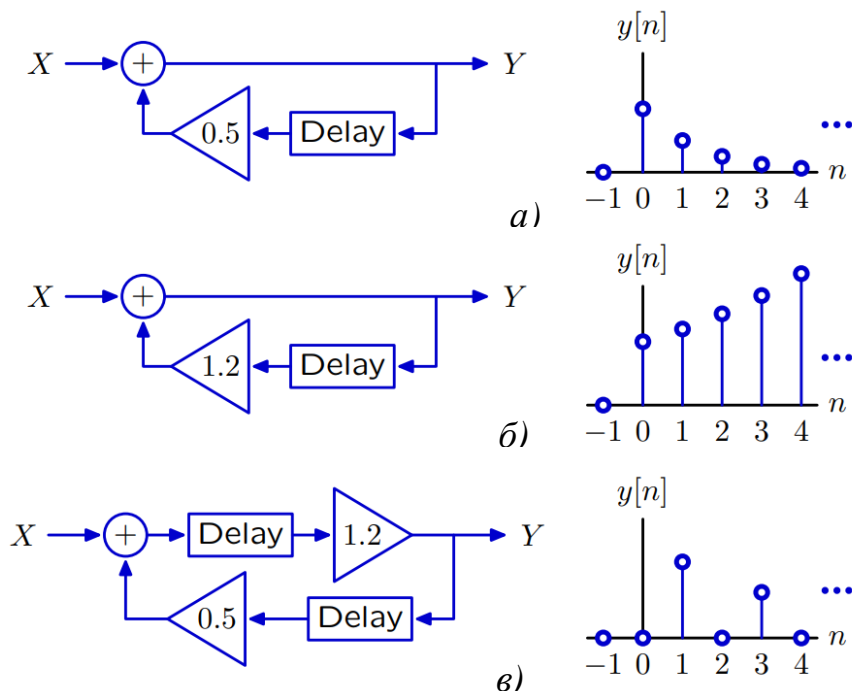


Рис. 6.10 Збіжна (а і в) та розбіжна (б) імпульсні характеристики

Як ми бачимо, у деяких систем (рис. 6.10а та рис. 6.10в) імпульсні характеристики з часом прагнуть до нуля. Такі характеристики називають *збіжними*. На рис. 6.10б бачимо характеристику, значення відліків якої постійно збільшуються і, якщо нескінченно продовжити графік вправо, то на графіку ці значення також будуть прагнути до нескінченності, вони з часом розходяться, розбігаються, тому їх називають *розбіжними*. Очевидно, що система, яка має розбіжну імпульсну характеристику, є нестійкою (визначення стійких і нестійких систем дивись в лекції 4), оскільки її реакція на обмежений сигнал (одиначний імпульс є обмеженим сигналом) є необмеженою.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Опис суматора як системи із зворотним зв'язком.
2. Системи із зворотним зв'язком.
3. Різницеві рівняння у загальному вигляді.
4. Види імпульсних характеристик дискретних систем.

Лекція № 7

Тема: Фундаментальні рішення та полюси систем.

Зміст

Фундаментальні рішення	2
Полюси системи	3
Полюси системи другого порядку.....	4
Використання передавальної функції системи задля знаходження полюсів.....	9
Система Фібоначчі.....	10
Комплексні полюси.....	13
Контрольні питання за темою.....	15
Рівень модуля	15
Рівень курсу	15

Джерела:

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3–е изд. – СПб.: БХВ–Петербург, 2011. – 768 с.: ил.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Техносфера, 2006. – 856с.
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Деление_многочленов_столбиком
4. https://uk.wikipedia.org/wiki/Розкладання_на_прості_дроби

Фундаментальні рішення

Розглянемо найпростішу лінійну стаціонарну дискретну систему із зворотним зв'язком у двох варіантах, що відрізняються один від одного коефіцієнтом посилення в лінії зворотного зв'язку (рис. 7.1). В одному випадку цей коефіцієнт дорівнює 0.5, а в іншому 1.2. Імпульсні характеристики обох цих систем також наведено на рисунку 7.1.

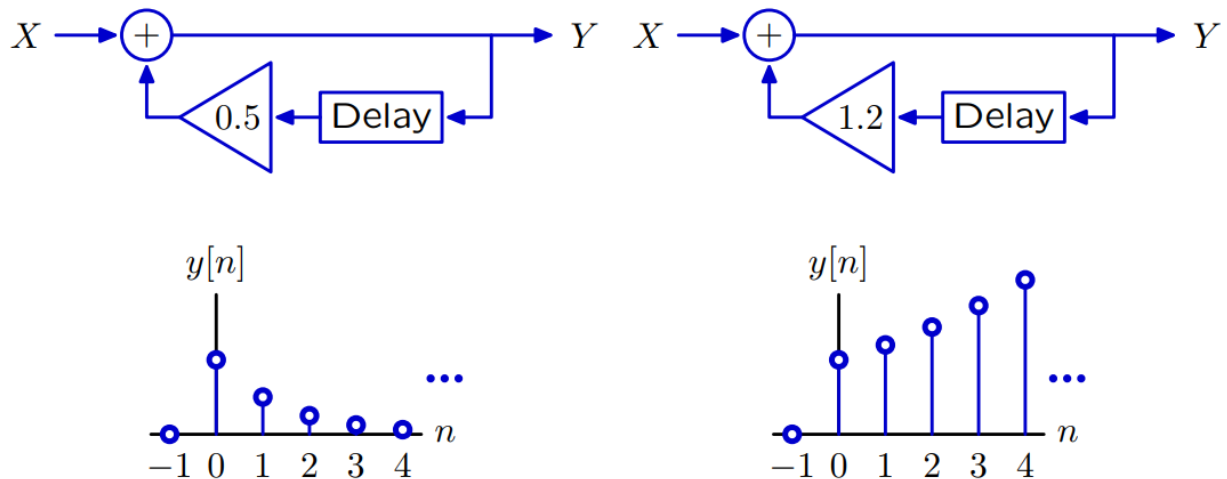


Рис. 7.1 – Найпростіші системи із зворотним зв'язком та їх імпульсні характеристики.

У першому випадку (рис. 7.1 зліва) імпульсна характеристика являє собою збіжну послідовність, яка описується рівнянням геометричної прогресії з основою 0.5:

$$y[n] = 0.5^n \quad (7.1)$$

Це рівняння випливає з того факту, що кожен наступний відлік вихідного сигналу системи, яка на рисунку 7.1 розташована зліва, в 0.5 разів менший, аніж попередній. Імпульсна характеристика системи, яка на малюнку 7.1 справа, також є геометричною прогресією, але вже з основою 1.2. Причина та сама: кожен наступний відлік вихідного сигналу – це попередній вихідний відлік, помножений на 1.2. Отримана імпульсна характеристика розходиться, що однозначно свідчить про те, що система справа – нестійка.

Таким чином, імпульсна характеристика найпростішої системи є геометричною прогресією з певною основою p_0 (в наведеному прикладі для лівої системи $p_0 = 0.5$, для правої системи $p_0 = 1.2$):

$$h[n] = p_0^n \quad (7.2)$$

Згадаймо визначення з математики: *фундаментальними рішеннями* рівняння називають такі рішення, з яких можна сконструювати всі інші

рішення. Математично доведено, що рішення (7.2) є фундаментальним рішенням будь-якого різницевого рівняння, яке описує реакцію лінійної стаціонарної дискретної системи на одиничний вхідний сигнал. А це означає, що імпульсна характеристика будь-якої лінійної стаціонарної дискретної системи складається із суми рішень виду:

$$h[n] = A_0 p_0^n + A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots \quad (7.3)$$

Імпульсні характеристики різних систем відрізняються лише числами $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ – основами геометричних прогресій, із суми яких складається імпульсна характеристика, а також коефіцієнтами $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$, на які ці геометричні прогресії множаться.



Завжди імпульсна характеристика будь-якої лінійної стаціонарної дискретної системи є зваженою сумою геометричних прогресій виду p_0^n . І нічого більше!

Геометрична прогресія є фундаментальним рішенням різницевого рівняння, що описують лінійні стаціонарні дискретні системи з одиничним сигналом на вході.

Полюси системи

Геометрична прогресія p_0^n є реакцією найпростішої системи із зворотним зв'язком на одиничний імпульс. Вигляд імпульсної характеристики, тобто вигляд послідовності, утвореної за правилами геометричної прогресії, залежить від її основи, в даному найпростішому випадку ця основа дорівнює коефіцієнту посилення в лінії зворотного зв'язку (рис. 7.1).

Важливо звернути увагу, що хоч вихідна послідовність (7.2) і є нескінченною, хоч вона і складається з нескінченного числа цифрових значень $[n=0 \dots +\infty]$, насправді її вигляд абсолютно однозначно визначається лише одним числом – значенням p_0 . Основу геометричної послідовності p_0 називають полюсом системи. За значенням полюса p_0 і номере індексу та використовуючи формулу (7.2), завжди можна розрахувати величину n -го відліку імпульсної характеристики найпростішої системи.

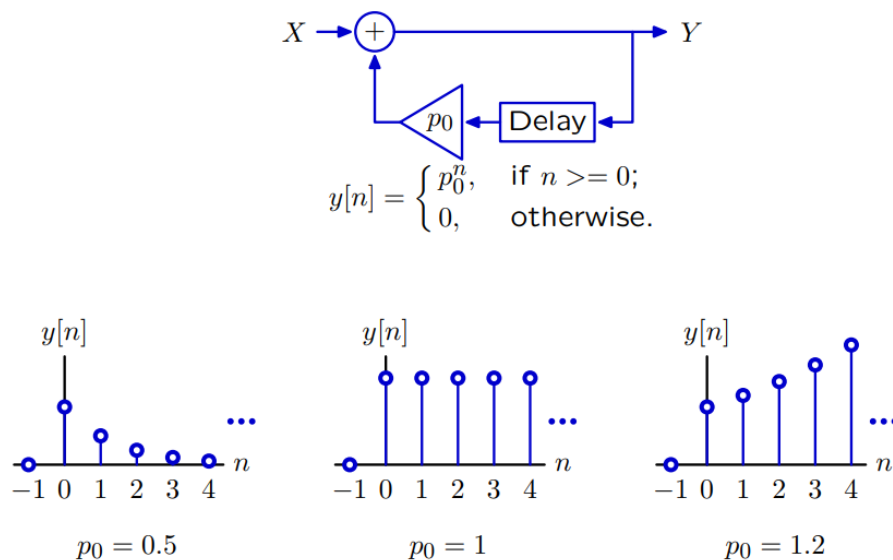
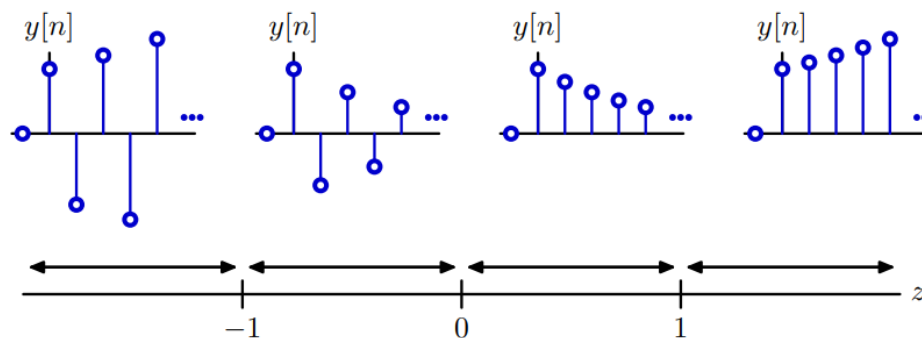


Рис. 7.2 Загальний вигляд імпульсної характеристики залежно від значення полюса найпростішої системи із зворотним зв'язком

Наступний рисунок розкриває зв'язок між значенням полюса та виглядом фундаментального рішення – імпульсної характеристики найпростішої системи зі зворотним зв'язком.



- $p_0 < -1$: значення – розбігаються, знаки – чергуються
- $-1 < p_0 < 0$: значення – збігаються, знаки – чергуються
- $0 < p_0 < 1$: значення – монотонно збігаються
- $p_0 > 1$: значення – монотонно розбігаються

Рис. 7.3 – Зв'язок між значенням полюса та виглядом фундаментального рішення

Полюси системи другого порядку

У найпростішої системи із зворотним зв'язком (рис. 7.2), яка є системою першого порядку, є лише один полюс p_0 . У складніших систем, тобто у систем вищого порядку, число полюсів більше. Це число відповідає порядку систем. Який порядок системи, – таким є і кількість полюсів. Порядок системи

визначається максимальним ступенем оператора затримки у лівій частині операторного представлення системи

$$Y \sum_{k=0}^N a_k R^k = X \sum_{m=0}^M b_m R^m \quad (7.4)$$

Тобто порядком системи, представленої рівнянням (7.4), є значення числа N . Якщо ж для представлення системи використовується різницеве рівняння у вигляді

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \quad (7.5)$$

то порядок системи визначається максимальним значенням затримки вихідного сигналу, яке присутнє у різницевому рівнянні системи. Тобто, знову ж таки – числом N .

Якщо полюси системи відомі, можна записати рівняння для імпульсної характеристики системи у відповідності до (7.3).

Виникає питання: як знайти ці полюси системи, а також зважені коефіцієнти $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$, що присутні в рівнянні (7.3)? Розглянемо для прикладу систему, яку представлено на наступному рисунку разом зі своєю імпульсною характеристикою.

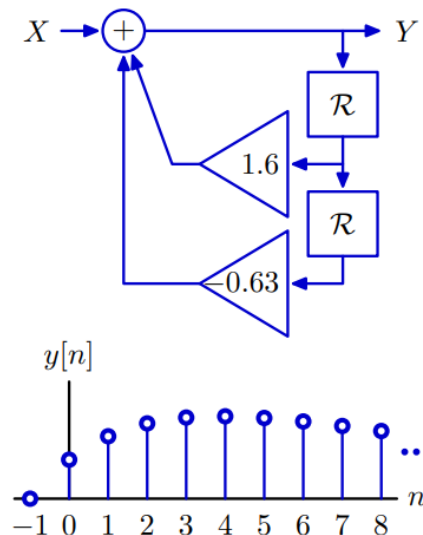


Рис. 7.4 Система другого порядку та її імпульсна характеристика.

У відповідності до представленої блок-схеми система в операторному вигляді повинна описуватися наступним чином:

$$Y = X + 1.6RY - 0.63R^2Y,$$

А якщо ж зібрати зліва вихідний сигнал, а вихідний справа, то (7.6)

$$(1 - 1.6R + 0.63R^2)Y = X$$

Щоб знайти полюси системи, спочатку необхідно розкласти оператор системи $(1-1.6R+0.63R^2)$ на співмножники, й це ми можемо зробити, коли знайдемо корені квадратного рівняння $1-1.6R+0.63R^2=0$. Ці корені дорівнюють 0.7 і 0.9. Можемо відразу сказати, що це і є полюси аналізованої системи: $p_0=0.7, p_1=0.9$. Їх рівно два, оскільки порядок системи – другий. Отже:

$$1-1.6R+0.63R^2 = (1-0.7R)(1-0.9R) \quad (7.7)$$

Тоді в операторному вигляді зв'язок між вхідним сигналом X і вихідним сигналом Y може бути записаний в наступному вигляді:

$$(1-0.7R)(1-0.9R)Y = X \quad (7.8)$$

Отримане рівняння відповідає блок-схемам системи (які еквівалентні друг другу), представленим нижче:

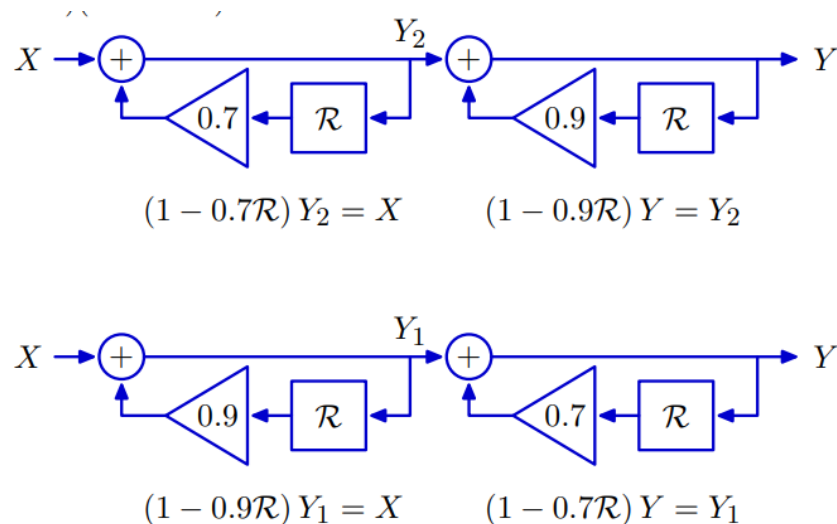


Рис. 7.5 Еквівалентні блок-схеми системи другого порядку

Блок-схеми на малюнках 7.4 і 7.5 представляють одну й ту ж саму систему.

Запишемо операторний функціонал аналізованої системи $H(R)$. *Операторний функціонал* або просто «функціонал» – це відношення вихідного сигналу до вхідного, записане в операторній формі:

$$H(R) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1-1.6R+0.63R^2} = \frac{1}{(1-0.7R)(1-0.9R)} \quad (7.9)$$

Далі, згідно до правил алгебри [4] отриманий складний дріб можна розкласти (й при цьому єдиним чином) на прості дроби:

$$\frac{Y}{X} = \frac{4.5}{1-0.7R} - \frac{3.5}{1-0.9R} \quad (7.10)$$

$$Y = \frac{4.5}{1-0.7R} X - \frac{3.5}{1-0.9R} X$$

Отже, ми отримали сукупність двох найпростіших систем із зворотним зв'язком:

$$Y_1 = \frac{1}{1-0.9R} X \quad (7.11)$$

$$Y_2 = \frac{1}{1-0.7R} X \quad (7.12)$$

Вихідний сигнал Y усієї системи другого порядку отримуємо як зважену суму вихідних сигналів Y_1 і Y_2 цих найпростіших систем першого порядку з ваговими коефіцієнтами 4.5 та -3.5 відповідно:

$$Y = 4.5Y_1 - 3.5Y_2 \quad (7.13)$$

Блок-схему такої системи представлено на наступному рисунку. Вочевидь вона теж еквівалентна блок-схемам на малюнках 7.4 і 7.5, оскільки отримана з того ж самого різницевого рівняння (7.6).

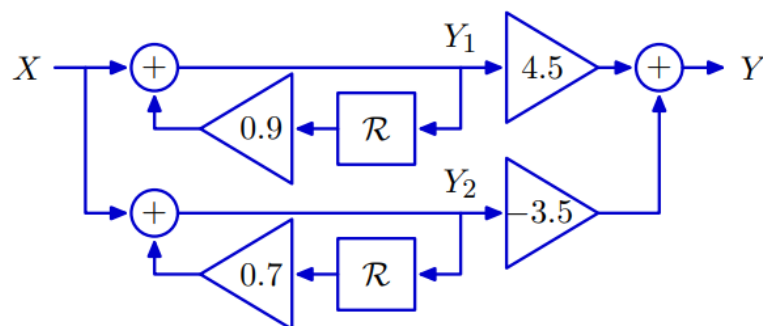


Рис. 7.6 Блок-схема системи на основі функціоналу (7.10)

Оскільки імпульсна характеристика системи (7.11) на основі рішення (7.2) має вигляд

$$y_1[n] = 0.9^n \quad (7.14)$$

а системи (7.12) відповідно:

$$y_2[n] = 0.7^n \quad (7.15)$$

то з урахуванням зваженого підсумовування сигналів отримуємо, що імпульсна характеристика аналізованої системи другого порядку має вигляд:

$$h[n] = 4.5y_1[n] - 3.5y_2[n] = 4.5 \times 0.9^n - 3.5 \times 0.7^n \quad (7.16)$$

У графічному вигляді отриманий результат можна зобразити таким чином:

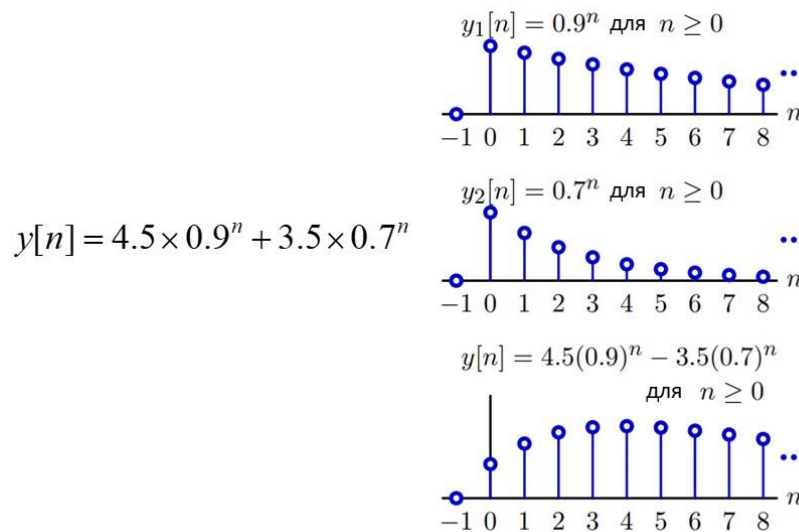


Рис. 7.7 Імпульсна характеристика системи як сума фундаментальних рішень

Як і слід було очікувати, отримана результуюча імпульсна характеристика збігається з характеристикою, представленою на рисунку 7.4.

Отже, на розглянутому прикладі системи другого порядку ми навчилися знаходити полюси системи та імпульсну характеристику лінійної стаціонарної дискретної системи за виглядом різницевого рівняння, яке описує цю систему.

Резюмуючи все вище сказане, запишемо наступне. Для того, щоб знайти полюси системи та імпульсну характеристику лінійної стаціонарної дискретної системи будь-якого порядку, необхідно:

- 1) розкласти оператор системи на співмножники;
- 2) розкласти функціонал системи на прості дроби, знаменником яких є співмножники, отримані в пункті 1); кожен із дробів відповідає найпростішій системі зі зворотним зв'язком;
- 3) записати фундаментальні рішення (7.2), які відповідають найпростішим системам першого порядку, отриманим в результаті розкладання на прості дроби в попередньому пункті;
- 4) користуючись співвідношенням (7.3) отримати імпульсну характеристику системи як зважену суму отриманих у пункті 3) фундаментальних рішень, де в якості вагових коефіцієнтів виступають чисельники найпростіших дробів, отриманих у пункті 2).

Використання передавальної функції системи задля знаходження полюсів

Полюси системи найкраще знаходити за передавальною функцією системи. Що таке передавальна функція?

Передавальною функцією дискретної системи (інакше: «дискретна передатна функція») є функція $H(z)$ від комплексного числа z , яка є відношенням z -перетворення вихідного сигналу $Y(z)$ до z -перетворення вхідного сигналу $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (7.17)$$

Це визначення є строгим, але для його повного розуміння необхідна інформація, яка буде дана тільки в наступній лекції. Зазначимо лише, що опис дискретних систем в переважній більшості проводиться саме в термінах z -перетворень, а не в операторній формі. Поки що ми надаємо лише деякі прості правила знаходження передавальної функції та роботи з нею.

Для того, аби від операторної форми представлення системи перейти до форми представлення в z -перетвореннях та отримати дискретну передавальну функцію $H(z)$ необхідно в операторному функціоналі системи $H(R)$ виконати заміну

$$R \rightarrow \frac{1}{z} = z^{-1} \quad (7.18)$$

або інакше кажучи: зробити підстановку (7.18).

Застосуємо цей метод на прикладі системи другого порядку, яку було розглянуто раніше (рис. 7.2). Її функціонал представлено рівнянням (7.9). Зробимо підстановку (7.18) в цьому функціоналі:

$$H(R) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 - 1.6R + 0.63R^2} \quad (7.19)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.6z^{-1} + 0.63z^{-2}}$$

Якщо тепер в отриманому виразі перейти до позитивних ступенів z , для чого достатньо і чисельник і знаменник передавальної функції $H(z)$ у виразі (7.19) помножити на z^2 , а потім розкласти знаменник на множники, то ми отримаємо значення полюсів системи в прямому вигляді:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.6z^{-1} + 0.63z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1.6z + 0.63} = \frac{z^2}{(z - 0.7)(z - 0.9)} \quad (7.20)$$

Це відбувається тому, що коренями полінома, який записаний у знаменнику передавальної функції (7.20), якраз і є полюси системи 0.7 та 0.9. Загальне правило таке:

Передавальною функцією лінійної стаціонарної дискретної системи є дріб, в чисельнику і знаменнику якого знаходяться поліноми за ступенями комплексної змінної z . Полюсами системи є корені полінома, який знаходиться у знаменнику.



Передавальну функцію $H(z)$ найчастіше записують у формі (7.19), тобто за від'ємними ступенями z . Це зручніше і наочніше, оскільки негативний ступінь показує: який у різницевому рівнянні зсув відліку сигналу вправо.

Система Фібоначчі

Далі для закріплення розглянемо систему Фібоначчі, яка є вирішенням стародавньої задачі Фібоначчі, сформульованої ним ще у 12 сторіччі. Вона звучить таким чином:

«У місце, обгороджене з усіх боків стіною, помістили пару кроликів, природа яких така, що будь-яка пара кроликів породжує іншу пару кожен місяць, починаючи з другого місяця свого існування. Скільки пар кроликів буде за рік?».

Цей процес можна проілюструвати графічно:

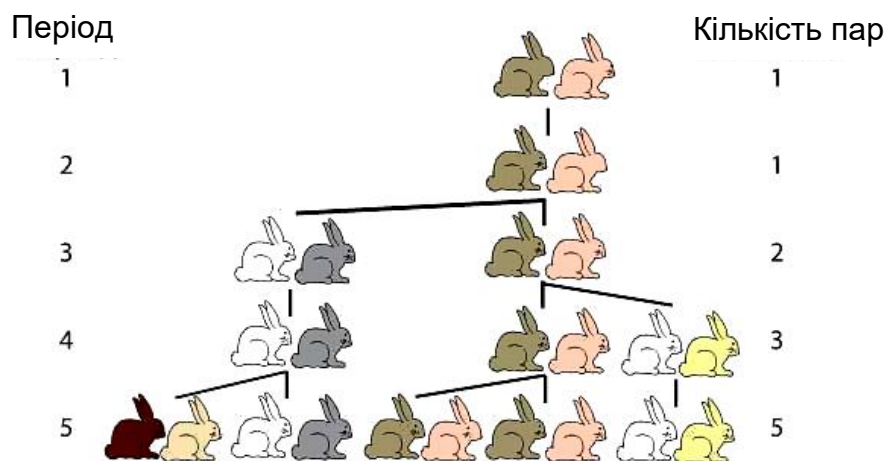


Рис. 7.8 Процес змінення кількості пар кроликів в задачі Фібоначчі

Розглянемо представлений процес збільшення кількості пар кроликів як дискретну систему зі зворотним зв'язком, якій на вхід подано одиничний імпульс: одна пара кроликів в нульовий момент часу, в усі інші моменти часу вхідний сигнал дорівнює нулю – на вхід системи нічого не надходить, оскільки «місце обгороджене з усіх боків стіною». Крок дискретизації системи – один місяць. Відліком вихідного сигналу системи є кількість пар кролів. Оскільки вхідним сигналом є одиничний імпульс, то реакцією є імпульсна характеристика системи. Тобто ми приходимо до стандартної постановки

завдання: є дискретна система, її представлено словесним описом, необхідно знайти імпульсну характеристику цієї системи.

Відповідь задачі, звичайно ж, вже давно відома. Імпульсною характеристикою такої системи є послідовність чисел Фібоначчі:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots \quad (7.21)$$

Особливістю цієї послідовності є те, що кожен наступний відлік являє собою суму двох попередніх, а відношення наступного відліку до попереднього збігається (коли $n \rightarrow \infty$) до так званого «золотому перетину», або «золотого числа» ϕ , яке дорівнює 1,6180339...

Цю систему можна представити різницеvim рівнянням:

$$y[n] = x[n] + y[n-1] + y[n-2] \quad (7.22)$$

Або інакше, у стандартній формі (відліки вихідного сигналу ліворуч, вхідного – праворуч):

$$y[n] - y[n-1] - y[n-2] = x[n] \quad (7.23)$$

Теж саме в операторній формі:

$$Y - YR - YR^2 = X \quad (7.24)$$

Операторний функціонал цієї системи:

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 - R - R^2} \quad (7.25)$$

Отже, дискретна передавальна функція системи після проведення підстановки (7.18) в операторному функціоналі системи (7.25) має вигляд:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \quad (7.26)$$

Знаходимо полюси системи, для чого перепишемо функцію $H(z)$ за позитивними ступенями z :

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \quad (7.27)$$

Полюси дорівнюють значенням коренів полінома в знаменнику передавальної функції, тобто вони являють собою рішення квадратного рівняння:

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad (7.28)$$

Ці рішення z_0 та z_1 , тобто полюси системи, дорівнюють:

$$z_{0,1} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \quad (7.29)$$

Чисельно вони рівні ϕ і $-\frac{1}{\phi}$, де $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339\dots$ – значення «золотого перетину». Таким чином, полюси системи Фібоначчі:

$$z_0 = \phi \approx 1.618 \quad \text{та} \quad z_1 = -\frac{1}{\phi} \approx -0.618 \quad (7.30)$$

Кожен із знайдених полюсів відповідає одному фундаментальному рішенню різницевого рівняння системи (7.22), до того ж одне фундаментальне рішення розбігається (для z_0), а друге (для z_1) – збігається.

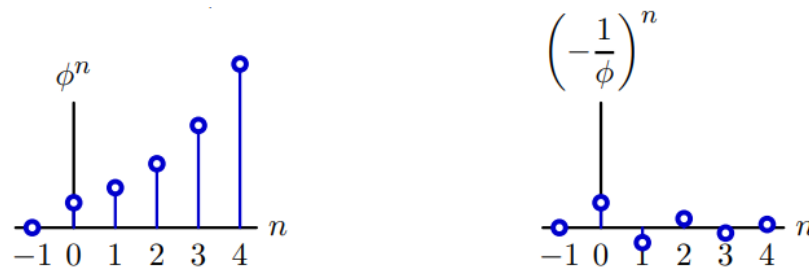


Рис. 7.9 Фундаментальні рішення системи Фібоначчі

Таким чином, операторний функціонал системи може бути розкладений на прості дроби:

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R-R^2} = \frac{\phi}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\phi R} + \frac{1}{\phi\sqrt{5}} \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}R} \quad (7.31)$$

де ϕ – значення золотого перетину.

Відповідно, імпульсна характеристика системи Фібоначчі може бути записана як зважена сума фундаментальних рішень:

$$h[n] = \frac{\phi}{\sqrt{5}} \phi^n + \frac{1}{\phi\sqrt{5}} \phi^{-n}; \quad n \geq 0 \quad (7.32)$$

Як вже було зазначено вище, імпульсна характеристика системи Фібоначчі є послідовністю (7.21). А відповідь задачі Фібоначчі відповідає відліку з індексом $n = 12$, таким чином кількість пар кроликів через 12 місяців становитиме 233.

Комплексні полюси

В усіх попередніх прикладах ми отримували полюси, які мали дійсні значення. Але з математики відомо, що коренями полінома можуть бути й комплексні числа, які завжди йдуть парами. Це означає, що серед полюсів системи може бути пара комплексно-сполучених чисел. Яким чином це позначиться на імпульсній характеристиці системи? Які фундаментальні рішення відповідають такій парі? Спробуємо відповісти на ці питання.

Розглянемо приклад. Нехай певна дискретна лінійна стаціонарна система має операторний функціонал, який має такий вигляд:

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1 - R + R^2} \quad (7.33)$$

Йому з урахуванням підстановки (7.18) відповідає дискретна передавальна функція

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2 - z + 1} \quad (7.34)$$

Знайшовши коріння рівняння

$$z^2 - z + 1 = 0 \quad (7.35)$$

знаходимо полюси системи

$$z_{0,1} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm j\pi/3} \quad (7.36)$$

Це надає нам можливість розкласти функціонал (7.33) на прості дроби:

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1 - e^{j\pi/3}R} \times \frac{1}{1 - e^{-j\pi/3}R} = \frac{1}{j\sqrt{3}} \left(\frac{e^{j\pi/3}}{1 - e^{j\pi/3}R} - \frac{e^{-j\pi/3}}{1 - e^{-j\pi/3}R} \right) \quad (7.37)$$

Найпростішій системі з функціоналом $\frac{1}{1 - e^{j\pi/3}R}$ згідно (7.2) відповідає фундаментальне рішення

$$y[n] = e^{-j\pi n/3} \quad (7.38)$$

а системі з функціоналом $\frac{1}{1 - e^{-j\pi/3}R}$ згідно (7.2) відповідає фундаментальне рішення

$$y[n] = e^{-j\pi n/3} \quad (7.39)$$

Отже, у відповідності до (7.37) шуканою зваженою сумою фундаментальних рішень, тобто – імпульсною характеристикою системи, буде така послідовність:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{j\sqrt{3}} \left(e^{j\pi/3} e^{j\pi n/3} - e^{-j\pi/3} e^{-j\pi n/3} \right) = \frac{1}{j\sqrt{3}} \left(e^{j\pi(n+1)/3} - e^{-j\pi(n+1)/3} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{e^{j\pi(n+1)/3} - e^{-j\pi(n+1)/3}}{2j} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{(n+1)\pi}{3} \end{aligned} \quad (7.40)$$

Під час виведення формули (7.40) ми застосували відому формулу Ейлера:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (7.41)$$

Ми побачили, що наявність пари комплексних полюсів спричинило появу в імпульсній характеристиці системи дискретної синусоїдальної складової (рис. 7.10):

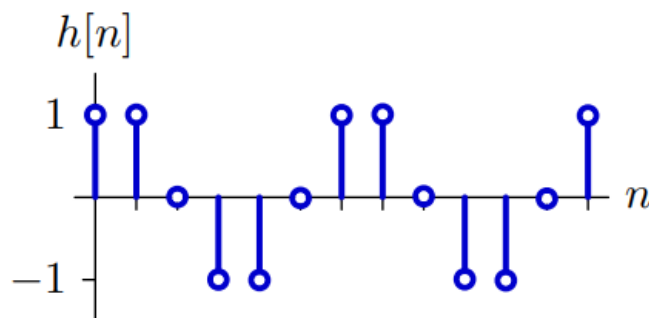


Рис. 7.10 Поява дискретної синусоїдальної складової в імпульсній характеристиці системи у разі наявності пари комплексних полюсів.

Таким чином, на основі розгляду наведеного прикладу ми дійшли до наступного висновку.

Якщо серед полюсів системи є пара комплексно-сполучених чисел, вона вносить в імпульсну характеристику системи фундаментальне рішення у вигляді дискретної синусоїди. Кожна окрема пара вносить свою окрему синусоїдальну складову.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Фундаментальні рішення в лінійних стаціонарних дискретних системах.
2. Полюси лінійної стаціонарної дискретної системи.
3. Полюси лінійної стаціонарної дискретної системи другого порядку.
4. Використання передавальної функції системи для знаходження полюсів лінійної стаціонарної дискретної системи.
5. Система Фібоначчі.
6. Комплексні полюси лінійної стаціонарної дискретної системи.

Лекція № 8

Тема: Z-перетворення**Зміст**

Введення до z -перетворення	2
Z-перетворення сигналу	3
Область визначення z -перетворення	5
Властивості z -перетворення	8
Лінійність	8
Затримка сигналу	9
Згортка сигналів	9
Передавальна функція як відношення поліномів	9
Вирішення різницевих рівнянь за допомогою z -перетворень	11
Зворотне z -перетворення	12
Контрольні питання на тему	14
Рівень модуля	14
Рівень курсу	14

Джерела:

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3–е изд. – СПб.: БХВ–Петербург, 2011. – 768 с.: ил.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Техносфера, 2006. – 856с.
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Деление_многочленов_столбиком

Введення до z -перетворення

В теорії цифрових систем та сигналів z -перетворення грає таку ж важливу роль, як і перетворення Фур'є в теорії аналогових сигналів, а перетворення Лапласа – в теорії управління. Використання z -перетворень дозволяє описувати як цифрові сигнали, так й цифрові системи в однаковій формі, одним й тим самим способом. Z -перетворення походить із самої природи цифрових об'єктів і тому дає опис цифрових сигналів та систем у найпростішій, досить короткій формі. Z -перетворення є основою для застосування частотних методів у цифровій техніці. Методи z -перетворень дуже добре розвинені. Вони дозволяють легко знаходити відгук системи на вхідний сигнал, виконувати аналіз та синтез цифрових систем. У переважній кількості випадків для опису цифрових сигналів та систем наразі використовується саме z -перетворення. Початок вивчення z -перетворень було покладено у попередній лекції в розділі «Використання передавальної функції системи для знаходження полюсів». Тоді було надано таке визначення:

Передавальною функцією дискретної системи (інакше: «дискретна передавальна функція») є функція $H(z)$ від комплексного числа z , яка є відношенням z -перетворення вихідного сигналу $Y(z)$ до z -перетворення вхідного сигналу $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (8.1)$$

Також було вказано, що для того, щоб від операторної форми представлення системи перейти до форми представлення в z -перетвореннях та отримати дискретну передавальну функцію $H(z)$, необхідно в операторному функціоналі системи $H(R)$ виконати заміну

$$R \rightarrow \frac{1}{z} = z^{-1} \quad (8.2)$$

або інакше кажучи: зробити підстановку (8.2). В якості прикладу у попередній лекції було використано систему другого порядку з операторним функціоналом, який має вигляд

$$H(R) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1 - 1.6R + 0.63R^2} \quad (8.3)$$

Зробивши підстановку (8.2) в цьому функціоналі, отримуємо передавальну функцію системи:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.6z^{-1} + 0.63z^{-2}} \quad (8.4)$$

Узагальнимо сказане. Отже, якщо є різницеве рівняння, яке описує лінійну стаціонарну дискретну систему

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m], \quad (8.5)$$

якому відповідає операторне рівняння

$$Y \sum_{k=0}^N a_k R^k = X \sum_{m=0}^M b_m R^m \quad (8.6)$$

та відповідний операторний функціонал

$$\frac{Y}{X} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m R^m}{\sum_{k=0}^N a_k R^k} = H(R), \quad (8.7)$$

тоді передавальна функція системи матиме вигляд

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (8.8)$$

Передавальна функція лінійної стаціонарної дискретної системи є дріб, в чисельнику і знаменнику якого знаходяться поліноми за степенями комплексної змінної z . Передавальну функцію $H(z)$ найчастіше записують у формі (8.4), (8.8) – за негативними степенями z . Це зручно і наочно, оскільки значення негативного ступеня показує число тактів затримки відліків сигналу у відповідному різницевому рівнянні.

Отже, ми вже знаємо, як перейти від різницевого рівняння до опису системи в z -перетвореннях. Залишилося лише розібратися з тим, як отримати z -перетворення сигналу, яке бере участь у визначенні передавальної функції (8.1), і розібратися, власне, в тому, що ж z -перетворення таки є?

Z-перетворення сигналу

Повернемося до розгляду системи Фібоначчі (лекція 7), яка описується операторним функціоналом

$$H(R) = \frac{1}{1-R-R^2} \quad (8.9)$$

Якщо поділити чисельник на знаменник в дробу (8.9), тобто полінома 1 на поліном $1-R-R^2$, то у відповідності до правил алгебри [3], ми отримаємо наступну відповідь

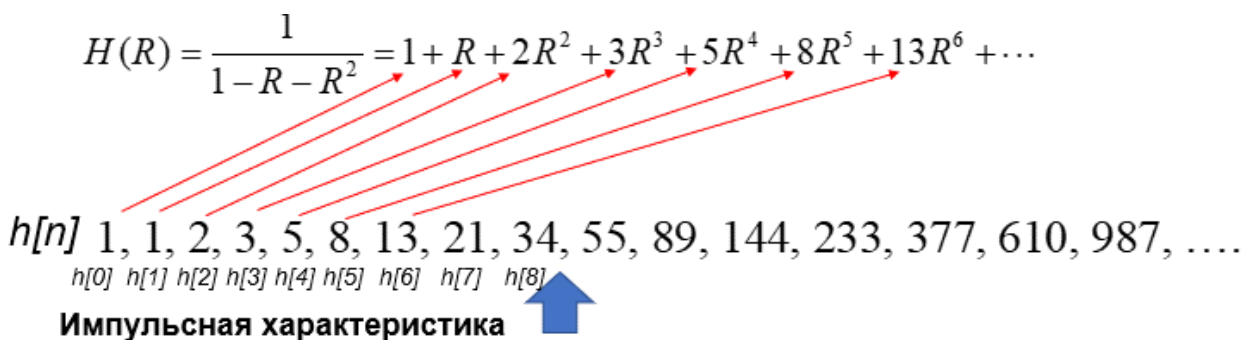
$$\begin{array}{r}
 1 - R - R^2 \overline{) \begin{array}{l} 1 + R + 2R^2 + 3R^3 + 5R^4 + 8R^5 + \dots \\ 1 \\ \hline -R - R^2 \\ R + R^2 \\ \hline -R - R^2 - R^3 \\ 2R^2 + R^3 \\ \hline 2R^2 - 2R^3 - 2R^4 \\ 3R^3 + 2R^4 \\ \hline 3R^3 - 3R^4 - 3R^5 \end{array} }
 \end{array}$$

$$H(R) = \frac{1}{1 - R - R^2} = 1 + R + 2R^2 + 3R^3 + 5R^4 + 8R^5 + 13R^6 + \dots \quad (8.10)$$

Якщо ж тепер ми звернемося до імпульсної характеристики системи Фібоначчі:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots \quad (8.11)$$

то ми з вами виявимо, що коефіцієнти у виразі (8.10), на які множитья оператор затримки R у відповідних ступенях, та значення відліків в імпульсній характеристиці (8.11) точно збігаються!



Таким чином, ми виявили зв'язок між операторним функціоналом системи та її імпульсною характеристикою:

$$H(R) = h[0] + h[1]R + h[2]R^2 + h[3]R^3 + h[4]R^4 + h[5]R^5 + h[6]R^6 + \dots \quad (8.12)$$

$$H(R) = \sum_n h[n]R^n$$

Якщо ж тепер скористатися підстановкою (8.2), то ми отримуємо зв'язок між імпульсною характеристикою та передавальною функцією системи:

$$H(z) = \sum_n h[n]z^{-n} \quad (8.13)$$

Отриманий вираз – це і є z -перетворення імпульсної характеристики системи $h[n]$. Це z -перетворення сигналу є функцією $H(z)$ від комплексної змінної z . Пригадаємо, що $h[n]$ – це сигнал на виході системи, на вхід якої подається одиничний імпульс. Тобто ми отримали z -перетворення від сигналу

$h[n]$. Точно таким самим способом отримується z -перетворення від будь-якого сигналу. Нижче надається визначення z -перетворення:

Z -перетворенням дискретного сигналу $x[n]$ є перетворення:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (8.14)$$

Z -перетворення ставить у відповідність будь-якому дискретному сигналу $x[n]$ однозначно визначену функцію від комплексної змінної z .

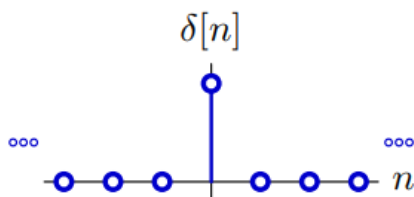


Рис. 1 – Єдиничний імпульс

Зокрема, якщо застосувати це визначення z -перетворення до сигналу у вигляді одиничного імпульсу $x[n] = \delta[n]$, то отримуємо наступне:

$$X(z) = \sum_n x[n]z^{-n} = x[0]z^0 = 1 \quad (8.15)$$

Ось тепер стає зрозумілим зв'язок між передавальною функцією системи та імпульсною характеристикою (8.13):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad \text{Якщо } X(z) = 1, \text{ то } H(z) = Y(z) \quad (8.16)$$

Тобто, передавальна функція системи $H(z)$ збігається з z -перетворенням сигналу $Y(z)$, який з'являється на виході системи, якщо на її вхід надходить сигнал у вигляді одиничного імпульсу $x[n] = \delta[n]$, тому що z -перетворення від одиничного імпульсу дорівнює одиниці $X(z) = 1$.

Застосуємо z -перетворення до сигналу, який є затриманим на один такт одиничний імпульсом $x[n] = \delta[n-1]$. Отримуємо такий результат:

$$X(z) = \sum_n x[n]z^{-n} = x[1]z^{-1} = z^{-1} \quad (8.17)$$

Якщо ж продовжити ці дослідження, то ми отримаємо, що для $x[n] = \delta[n-2]$ z -перетворення має вигляд z^{-2} , а для $x[n] = \delta[n-3]$ воно дорівнює z^{-3} , й так далі:

$$x[n] = \delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad X(z) = z^{-k} \quad (8.18)$$

Область визначення z -перетворення

Z -перетворення сигналу (8.14) є рядом (в загальні – нескінченним), і цей ряд може збігатися, а може розбігатися. Вважається, що z -перетворення сигналу існує лише тоді, коли ряд (8.14) збігається. А чи збігається ряд, чи

розбігається, залежить не тільки від виду сигналу, але й від значення комплексної змінної z . Це означає, що z -перетворення визначено не на всіх значеннях z , а лише на деякій частині цих значень. Тобто існує деяка допустима область значень z , за яких z -перетворення визначено. Коли z має значення, яке знаходиться в цій області, тоді ряд (8.14) збігається. Поза цією областю z -перетворення не визначено, воно не існує. Графічно допустиму область існування z -перетворення можна зобразити у вигляді кола на комплексній площині z .

Розглянемо поняття області визначення z -перетворення на конкретному прикладі. Для прикладу візьмемо сигнал у вигляді геометричної послідовності:

$$x[n] = \left(\frac{7}{8}\right)^n u[n] \quad (8.19)$$

Множення геометричної прогресії $\left(\frac{7}{8}\right)^n$ на сигнал одиничної сходинок $u[n]$ в опису сигналу означає, що сигнал $x[n]$ набуває ненульових значень лише на значеннях індексу $n \geq 0$, як це показано на рисунку:

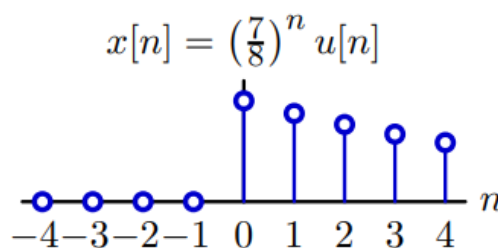


Рис. 2. Геометрична прогресія, множена на сигнал одиничної сходинок

Знайдемо область визначення z -перетворення для такого сигналу.

Щоб це зробити, спочатку знайдемо z -перетворення цього сигналу. Для цього скористаємось властивістю (8.16), яка говорить про те, що передавальна функція системи та z -перетворення імпульсної характеристики цієї системи – це є одне й те ж саме. Отже, щоб знайти z -перетворення сигналу (8.19) достатньо знайти передавальну функцію якраз тої системи, яка має імпульсну характеристику якраз у вигляді сигналу (8.19). Таку систему ми знаємо. Коли в попередній лекції ми розглядали фундаментальні рішення систем, то ми бачили, що система із зворотним зв'язком, в якій в лінії зворотного зв'язку виконується множення на коефіцієнт p_0 (Рис. 3), має імпульсну характеристику у вигляді правосторонньої геометричної прогресії

$$y[n] = (p_0)^n u[n] \quad (8.20)$$

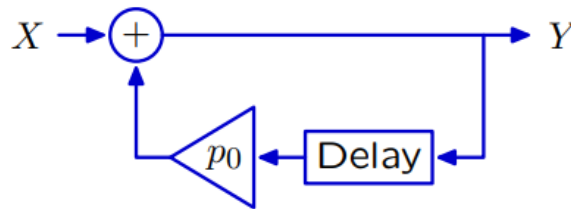


Рис. 3 – Система із зворотним зв'язком, в якій в лінії зворотного зв'язку виконується множення на коефіцієнт p_0

Операторний функціонал такої системи (див. лекцію 7) має вигляд:

$$H(R) = \frac{1}{1 - p_0 R} \quad (8.21)$$

Якщо у виразі (8.21) зробити підстановку (8.2), то отримуємо передавальну функцію цієї системи:

$$H(z) = \frac{1}{1 - p_0 z^{-1}} \quad (8.22)$$

В нашому прикладі сигналу (8.19) основа прогресії дорівнює $\frac{7}{8}$, отже, передавальна функція системи, яка має імпульсну характеристику у вигляді сигналу (8.19), має вигляд:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{8} z^{-1}} \quad (8.23)$$

І це означає, що й z -перетворення від цього сигналу також має цей самий вигляд. Отже, z -перетворення сигналу (8.19) має вигляд:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{8} z^{-1}} \quad (8.24)$$

Тепер подивимося з іншого боку: відповідно до визначення (8.14) z -перетворення сигналу являє собою нескінченний ряд:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{7}{8} \right)^n u[n] \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{7}{8} z^{-1} \right)^n u[n] \quad (8.25)$$

І ми вже знаємо, що цей ряд має збігатися до функції (8.24). Задамося питанням: а чи завжди він збігається до (8.24)? Відповідь проста: ряд (8.25) буде збігатися тільки тоді, коли значення в дужках за модулем буде менше одиниці:

$$\left| \frac{7}{8} z^{-1} \right| < 1 \quad (8.26)$$

А це буде лише тоді, коли

$$|z| > \frac{7}{8} \quad (8.27)$$

Таким чином, ми дійшли висновку, що z -перетворення сигналу (8.19) у вигляді (8.24) існує тоді і лише тоді, коли виконується умова (8.27). Умова (8.27) є описом **області визначення** z -перетворення. За межами цієї області вказане z -перетворення не існує. Графічно **область визначення** z -перетворення (8.24) можна представити на рисунку, де вона виділена на комплексній площині синім кольором, – поза кола радіусом $\frac{7}{8}$.

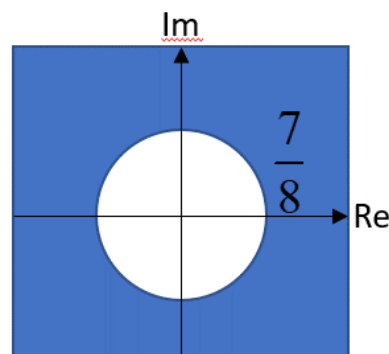


Рис. 4 – Область визначення z -перетворення (8.24)

Властивості z -перетворення

Z -перетворення має властивості, які багато в чому чудово збігаються з властивостями перетворення Фур'є та перетворення Лапласа.

Лінійність

Z -перетворення лінійно: z -перетворення від суми сигналів дорівнює сумі z -перетворень цих сигналів. Тобто, якщо $X_1(z)$ – це z -перетворення від сигналу $x_1[n]$, а $X_2(z)$ – z -перетворення від сигналу $x_2[n]$, то z -перетворення від суми сигналів $x_1[n] + x_2[n]$ буде нічим іншим окрім $X_1(z) + X_2(z)$. Лінійність z -перетворення впливає з лінійності арифметичної операції додавання: якщо $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, то

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_1[n] + x_2[n])z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} = X_1(z) + X_2(z) \end{aligned} \quad (8.28)$$

Затримка сигналу

Якщо новий сигнал утворено шляхом затримки первинного сигналу на один такт, то z -перетворення нового сигналу дорівнює z -перетворенню первинного сигналу, помноженого на z^{-1} . Тобто якщо $y[n] = x[n-1]$, то

$$Y(z) = z^{-1}X(z) \quad (8.29)$$

В загальному випадку, якщо $y[n] = x[n-m]$, то

$$Y(z) = z^{-m}X(z) \quad (8.30)$$

Таким чином, затримка сигналу на m тактів призводить до появи в z -перетворенні цього сигналу множника z^{-m} . Ми вже зустрічали прояв цієї властивості раніше, коли розглядали z -перетворення від затриманого одиничного імпульсу (8.18).

Згортка сигналів

Z -перетворення згортки сигналів $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$ дорівнює добутку z -перетворень цих сигналів:

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (8.31)$$

Ця властивість точно збігається з подібною властивістю перетворень Фур'є та Лапласа.

Передавальна функція як відношення поліномів

Важливо відзначити, що передавальна функція лінійної стаціонарної дискретної системи, так само як й z -перетворення будь-якого дискретного сигналу, є дробно-раціональною функцією, в чисельнику і знаменнику якої знаходяться виключно поліноми за негативними ступенями комплексної змінної z . Тобто це завжди – відношення двох поліномів. І з цими поліномами та дробами можна виконувати усі дозволені операції алгебри. Найважливіша перевага методів z -перетворень полягає в тому, що завдяки зазначеній поліноміальній дробно-раціональній структурі стає можливим проводити аналіз та синтез дискретних систем за допомогою простих алгебраїчних операцій. Така структура z -перетворень впливає з лінійної структури різницевого рівняння. Давайте повторимо ще раз, як виконується перехід від різницевого рівняння до передавальних функцій.

Нехай маємо різницеве рівняння, яке описує певну систему:

$$a_0y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + \dots = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \dots \quad (8.32)$$

Застосуємо до цього рівняння z -перетворення. Отримуємо:

$$a_0Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + a_2z^{-2}Y(z) + \dots = b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + b_2z^{-2}X(z) + \dots \quad (8.33)$$

Звідси отримуємо передавальну функцію як відношення z -перетворення вихідного сигналу до z -перетворення вхідного сигналу:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots} \quad (8.34)$$

Таким чином, ми отримали відношення двох поліномів за негативними степенями комплексної змінної z . Тепер запишемо те саме в загальному вигляді: нехай є різницеве рівняння, яке описує певну систему

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \quad (8.35)$$

Застосуємо до цього рівняння z -перетворення. Отримуємо:

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad (8.36)$$

Звідси отримуємо передавальну функцію як відношення z -перетворення вихідного сигналу до z -перетворення вхідного сигналу:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (8.37)$$

В різницевих рівняннях (8.35) та в передавальній функції (8.37) – одні й ті самі коефіцієнти a_k і b_k , одні й ті самі значення M і N , а ступені z^{-k} відповідають кількості тактів затримки k в різницевому рівнянні системи. Це дозволяє легко переходити від різницевих рівнянь до передавальної функції системи та навпаки.

Оскільки $H(z)$ – це відношення поліномів, то застосовуючи прийоми алгебри [3] можна чисельник і знаменник розкласти на співмножники, а потім далі – на прості дробі:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots} = \\ &= \frac{b_0}{a_0} \frac{(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_k)}{(z - p_0)(z - p_1) \dots (z - p_k)} = \\ &= \frac{C_0}{(z - p_0)} + \frac{C_1}{(z - p_1)} + \dots + \frac{C_k}{(z - p_k)} \end{aligned} \quad (8.38)$$

Числа z_k називають нулями системи, а числа p_k , як нам вже відомо з попередніх лекцій, – полюсами системи. Значення нулів і полюсів у передавальній функції визначають поведінку системи.

Вирішення різницевих рівнянь за допомогою z -перетворень

Використовуючи z -перетворення можна вирішити різницеві рівняння системи. Зокрема, можна легко знайти відгук системи на одиничний імпульс, тобто знайти імпульсну характеристику системи. Цей метод ґрунтується на фундаментальних рішеннях, розглянутих у попередній лекції.

Наприклад, нехай є система з різницеvim рівнянням:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \delta[n] \quad (8.39)$$

Z -перетворення від цього рівняння:

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = 1 \quad (8.40)$$

Вирішуємо це рівняння щодо $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (8.41)$$

Як ми вже знаємо (8.20), це є z -перетворення від сигналу, що є правосторонньою геометричною прогресією з основою $\frac{1}{2}$:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (8.42)$$

Це й є рішенням різницевого рівняння (8.39).

Якщо ж різницеve рівняння має складніший вигляд, тоді передавальна функція системи також буде складнішою. У такому випадку передавальну функцію розкладають на прості дроби, а шуканий сигнал знаходять як суму відповідних геометричних прогресій (фундаментальних рішень):

$$y[n] = \left[C_0 (p_0)^n + C_1 (p_1)^n + \dots + C_k (p_k)^n \right] u[n] \quad (8.43)$$

Примітка: особливості, що виникають у разі появи пар комплексних полюсів, розглянуто у попередній лекції.

Зворотне z-перетворення

У розглянутому тільки на прикладі ми виконали зворотню операцію: за z-перетворенням сигналу (8.41) ми знайшли сам сигнал (8.42). Тим самим ми фактично здійснили зворотне z-перетворення. Але ми це зробили не зовсім формально. Формально зворотне z-перетворення визначається таким чином:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (8.44)$$

де C – це замкнутий контур, який є межею області визначення даного z-перетворення.

Z-перетворення найбільш поширених сигналів Таблиця 1

Послідовність	Z-перетворення	ОБ
1. $\delta[n]$	1	все z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n-m], m > 0$	z^{-m}	все $z \neq 0$
$\delta[n-m], m < 0$	z^{-m}	все $z \neq \infty$
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $u[n] \cos \omega_0 n$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $u[n] \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $u[n] r^n \cos \omega_0 n$	$\frac{1-z^{-1} r \cos \omega_0}{1-2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $u[n] r^n \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} r \sin \omega_0}{1-2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{інаше} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$

Тобто, аби отримати зворотне z -перетворення, необхідно взяти криволінійний інтеграл вздовж замкнутого контуру в комплексній площині (8.44). Виконання такого розрахунку є досить складним математичним завданням. Тому на практиці формулою (8.44) не користуються.

На практиці користуються таблицями z -перетворень, які наявні у довідковій літературі. Z -перетворення найбільш поширених сигналів наведені в таблиці 1. Додатково до табличних даних застосовують ще й метод розкладання z -перетворення сигналу або передавальної функції системи на прості дроби(8.38) з подальшим представленням шуканого сигналу у вигляді суми фундаментальних рішень (8.43).

Контрольні питання на тему

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Z -перетворення сигналу.
2. Область визначення z -перетворення.
3. Властивості z -перетворення.
4. Передавальна функція як відношення поліномів.
5. Вирішення різницевих рівнянь за допомогою z -перетворень.
6. Зворотне z -перетворення.

Лекція № 9

Тема: Z-перетворення: алгоритми та спектральний аналіз**Зміст**

Знаходження реакції системи на вхідний сигнал методом z -перетворень.....	2
Переваги методу z -перетворень.....	2
Z-перетворення та алгоритми	3
Z-перетворення та спектральний аналіз	8
Спектр дискретного сигналу.....	8
Отримання спектральної функції з z -перетворення сигналу	9
Отримання z -перетворення за спектральною функцією сигналу ..	11
Отримання комплексного коефіцієнта передачі системи з дискретної передавальної характеристики системи.....	11
Побудова дискретної моделі за безперервною моделлю системи.	12
Контрольні питання за темою.....	14
Рівень модуля	14
Рівень курсу.....	14

Джерела:

1. Сергієнко А.Б. Цифрова обробка сигналів. - 3-тє вид. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 768 с.: іл.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифрова обробка сигналів - М.: Техносфера, 2006. - 856с.

Знаходження реакції системи на вхідний сигнал методом z -перетворень

Як відомо, реакцію цифрової системи (рис. 1) на вхідний сигнал можна знайти, використовуючи операцію дискретної згортки вхідного сигналу та імпульсної характеристики системи (див. лекцію 4):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (9.1)$$

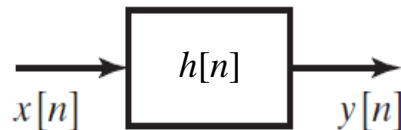


Рис. 1 – Цифрова система

З іншого боку, z -перетворення мають ту властивість, що z -перетворення від дискретної згортки сигналів $x_1[n]$ та $x_2[n]$ дорівнює добутку z -перетворень цих сигналів (див. лекцію 8):

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (9.2)$$

Ми приходимо до простого, але дуже важливого висновку: оскільки передавальна функція системи є нічим іншим як z -перетворенням її імпульсної характеристики, то z -перетворення вихідного сигналу системи є добутком z -перетворення вхідного сигналу і передавальної функції цієї системи:

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (9.3)$$

Таким чином, якщо відома передавальна функція системи $H(z)$, то, знаючи її, завжди можна знайти реакцію системи $y[n]$ на будь-який вхідний сигнал $x[n]$. Для цього достатньо знайти z -перетворення $X(z)$ для вхідного сигналу і помножити його на передавальну функцію системи $H(z)$, після чого за отриманим z -перетворенням $Y(z)$ знайти послідовність $y[n]$. Методи знаходження прямих та зворотних z -перетворень сигналів розглянуті у попередній лекції. Також там були розглянуті способи опису систем за допомогою передавальної функції та методи її знаходження.

Переваги методу z -перетворень

Важливо відзначити, що щойно отримана формула для цифрових систем повністю повторює основну формулу спектрального аналізу для безперервних сигналів і систем:

$$U_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K(j\omega)U_{\text{ВХ}}(\omega) \quad (9.4)$$

де $U_{\text{вх}}(\omega)$ – спектральна функція (перетворення Фур'є) вхідного сигналу, $U_{\text{вих}}(\omega)$ – спектральна функція (перетворення Фур'є) вихідного сигналу, а $K(j\omega)$ – комплексний коефіцієнт передавання системи, який також є перетворенням Фур'є від імпульсної характеристики системи.

Все це означає, що методи z -перетворень і методи спектрального аналізу з використанням перетворень Фур'є дуже близькі один до одного та відображають одні й ті самі особливості сигналів і систем. Проте методи z -перетворень значно перевершують методи перетворення Фур'є з погляду їхнього практичного застосування. Насамперед тому, що z -перетворення, і, зокрема, передавальна функція системи $H(z)$ відображають алгоритми генерації сигналів та роботи систем. За видом передавальної функції можна відразу запрограмувати роботу цифрової системи. Методи перетворення Фур'є не мають таких можливостей, оскільки вони побудовані на опису систем за допомогою диференціальних, а не різницевих рівнянь. Тому вони використовуються в основному лише для аналізу систем. Синтез алгоритмів з урахуванням методів перетворення Фур'є вимагає застосування методів чисельного програмування. Зв'язок алгоритмів, одержуваних в результаті такого синтезу, з комплексними коефіцієнтами передавання, які використовуються у методах Фур'є для опису систем, зовсім неочевидний.

У той же час, незважаючи на складність математичного апарату, що використовується в теорії z -перетворень, застосування z -перетворень на практиці виявляється надзвичайно простим. У цьому полягає одна з безперечних переваг методу z -перетворень у порівнянні з методами перетворень Фур'є та Лапласа. Застосування z -перетворень дозволяє вирішувати одночасно завдання програмування (алгоритмізації) і завдання аналізу систем, зокрема спектрального аналізу. Розглянемо як це робиться.

Z-перетворення та алгоритми

Перш за все пригадаємо, що будь-яка цифрова система (рис.1) – це фактично є алгоритм, який під час свого виконання перетворює вхідний сигнал у вихідний. Це і є цифрова система.

Коли ми говоримо про різні способи представлення системи, то зрештою ми завжди говоримо саме про алгоритм. Всі способи представлення системи: різницеві рівняння, блок-схеми, імпульсна характеристика та передавальна функція у різний спосіб відображають роботу алгоритму функціонування системи. І ці способи, природно, пов'язані між собою, оскільки, по суті, відображають одне й те саме (рис. 2). У попередніх лекціях було показано яким чином можна перейти від одного представлення системи до іншого представлення. Зокрема, було вказано на простий перехід (формули 8.35–8.37 лекції 8) від різницевих рівнянь до передавальної функції та навпаки.

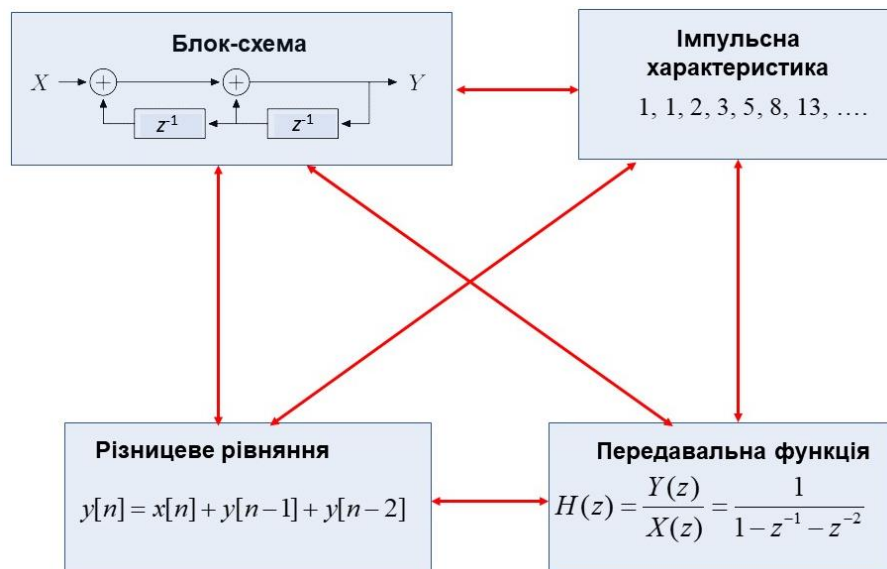


Рис. 2 - Різні представлення однієї й тієї ж системи Фібоначчі

Примітка 1: В наведеному переліку способів представлення систем, а також на рисунку 2 відсутнє операторне представлення системи. Воно більше не буде використовуватися в даному курсі. Операторне представлення використовувалося у попередніх лекціях лише для того, аби підійти до розуміння z -перетворень. Оскільки мети досягнуто, ми відмовляємося від операторного представлення. Відмовляємось у тому числі й тому, що в аналізі цифрових систем воно практично не використовується: замість нього завжди застосовується z -перетворення сигналів та передавальна функція системи. Надалі ми будемо користуватися лише методами z -перетворень.

Примітка 2: На рисунку 2 у блок-схемі системи замість елемента з написом “Delay” або R ми відтепер завжди будемо використовувати прямокутник з написом z^{-1} , тому що в методах z -перетворень z^{-1} означає затримку сигналу на один такт, а, як вже було зазначено у примітці 1, надалі ми будемо користуватися лише методами z -перетворень.

Для того, щоб зрозуміти, яким чином від різницевих рівнянь (або від передавальної функції системи – що фактично теж саме) перейти до алгоритму або навіть до конкретного коду програми, ми з вами в самому загальному вигляді розглянемо як працюють системи реального часу.

Система реального часу (СРЧ) – це будь-яка система управління, контролю, вимірювання або обробки інформації, яка отримує дані та виробляє керуючі впливи чи діагностичні ознаки, або просто оброблену інформацію у безпосередньому часовому зв'язку з реальним об'єктом, як то кажуть, у реальному часі. Наприклад, автопілот автомобіля (рис. 2).

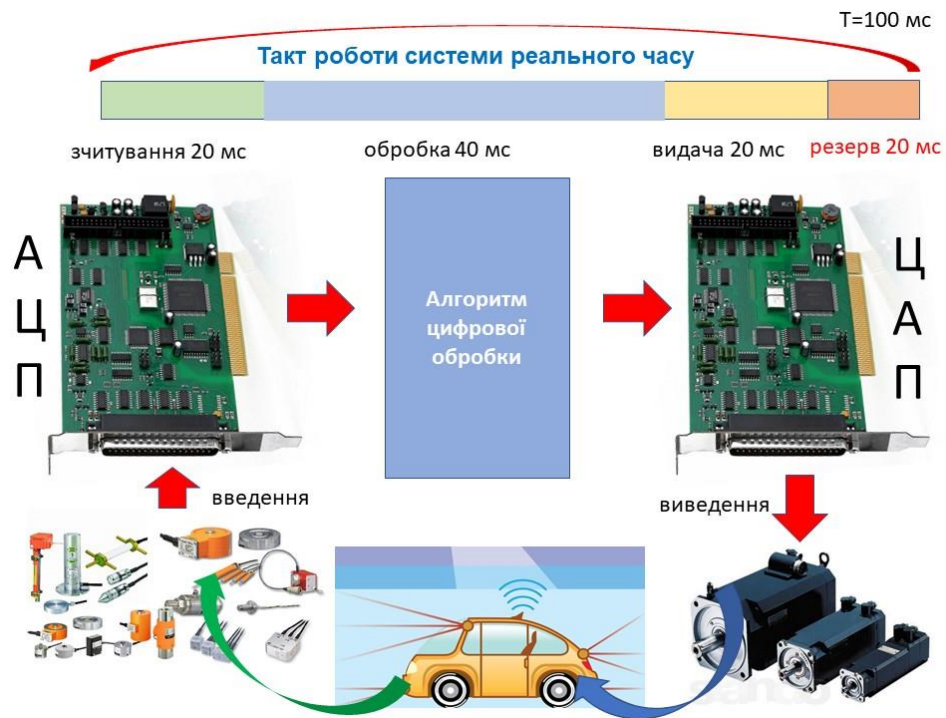


Рис. 3 – Загальне побудова такту роботи системи реального часу

Весь час роботи системи реального часу розбито на окремі однакові такти. Під час кожного такту система виконує одні й ті самі дії по тому самому алгоритму. Виконавши один такт, система відразу переходить до наступного, такого ж такту. Система виконує один такт за іншим, один за одним. Весь час. Тривалість тактів абсолютно однакова, і вона контролюється внутрішнім годинником комп'ютера.

Усередині кожного такту є різні періоди часу, під час яких система виконує різні завдання. У загальному випадку такт роботи СРЧ виглядає приблизно так (рис. 3):

1) Спочатку система опитує датчики, розташовані на об'єкті керування (наприклад, на автомобілі – датчики швидкості обертання коліс, датчики обертів двигуна, датчики GPS тощо). Інформація від датчиків надходить на аналого-цифрові перетворювачі (АЦП), де оцифровується та надходить у комп'ютер для обробки.

2) Потім система виконує обробку отриманої інформації, виробляє рішення та формує керуючі впливи.

3) Після цього сформовані в цифровому вигляді керуючі впливи надходять на цифро-аналогові перетворювачі (ЦАП) і далі йдуть на приводи, встановлені на об'єкті керування (наприклад, обертовий привід керма, привід акселератора та т.і.).

4) Наприкінці такту передбачено певний резерв часу на випадок, якщо алгоритм обробки інформації, прийняття рішень та формування керуючих впливів з якоїсь причини буде виконуватися довше.

Алгоритм обробки інформації реалізується у комп'ютері у вигляді програмного коду. Під час кожного такту виконується одна й та сама програма. На її вхід надходять лише поточні значення показань датчиків. В той же час ми знаємо, що різницеві рівняння зазвичай включають також попередні відліки вхідного і вихідного сигналу. Де їх взяти? І тут організується запам'ятовування попередніх показань – показань, отриманих в попередніх тактах роботи СРЧ, – в окремих комірках пам'яті комп'ютера, тобто в спеціально виділених для цього змінних, зміст яких необхідно оновлювати в кожному такті роботи системи.

Приклад №1:

Різницеве рівняння системи обробки цифрових сигналів: $y[n] = x[n]^2$. Воно не містить попередніх відліків сигналів. В цьому випадку в запам'ятовуванні немає необхідності і тоді програма може мати вигляд:

```
read (1, x)          введення даних з пристрою №1 в змінну x
y=x^2
write (2, y)        виведення даних в пристрій №2
```

Примітка 3: тут і далі використовується нестрога мнемоніка операторів програмування, призначена виключно для більшої наочності та простого розуміння матеріалу лекції.

Примітка 4: під пристроєм №1 розуміється АЦП, під пристроєм №2 – ЦАП

Приклад №2:

Різницеве рівняння системи обробки цифрових сигналів: $y[n] = x[n] + b_1 x[n-1]$. У цьому випадку вже є необхідність запам'ятовувати один відлік вхідного сигналу з метою його використання в наступному такті. Програма, що реалізує алгоритм обробки сигналу, який відповідає даному різницевому рівнянню, може мати вигляд:

```
read (1, x)          введення даних з пристрою №1 змінну x
y=x+b1*x1
x1=x                 затримка (запам'ятовування)
write (2, y)        виведення даних у пристрій №2
```

Блок-схема системи має вигляд, представлений рисунку.

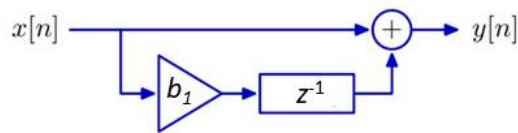


Рис. 4

Як можна помітити, наведений програмний код безпосередньо реалізує цю блок-схему.

Приклад №3:

Різницеве рівняння, яке визначає систему Фібоначчі має вигляд: $y[n] = x[n] + y[n-1] + y[n-2]$. В цьому випадку є необхідність запам'ятовувати відліки вихідного сигналу для їх використання не тільки в наступному такті, але ще й через один такт. Програма, що реалізує алгоритм обробки сигналу, яка відповідає даному різницевому рівнянню, може мати вигляд:

read (1, x)	введення даних з пристрою №1 змінну x
y=x+y1+y2	
y2=y1	затримка на один (сумарно – другий) такт
y1=y	затримка на один (перший) такт
write (2, y)	виведення даних пристрій №2

Блок-схема системи має вигляд, представлений малюнку.

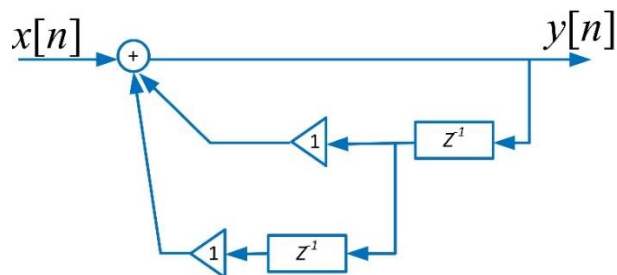


Рис. 5

Як і в попередньому прикладі наведений програмний код побудований на підставі блок-схеми системи.

Наведені приклади показують, як різницеві рівняння перетворюються на алгоритми та коди програм. Тактами, в яких прописуються коди програм, можуть бути не лише такти роботи систем реального часу, а й цикли **DO** у програмах обробки збереженої цифрової інформації, наприклад, обробки цифрових звукових сигналів. Тоді **read (1, x)** означатиме зчитування зі

звукового файлу вихідних даних, а **write (2, y)** означатиме запис оброблених даних в інший файл.

Z-перетворення та спектральний аналіз

Як відомо, будь-який безперервний (аналоговий) сигнал $s(t)$ має певні спектральні властивості, які виражаються *спектральною функцією сигналу* $S(\omega)$. Спектральна функція сигналу з математичної точки зору є перетворення Фур'є від цього сигналу. Само собою зрозуміло, що, якщо ми отримуємо цифровий сигнал $s[n]$ з безперервного сигналу $s(t)$, то цифровий сигнал певною мірою повинен зберігати ті ж самі спектральні властивості, які мав первинний безперервний сигнал $s(t)$.

Спектр дискретного сигналу

В теорії систем і сигналів доведено, що якщо сигнал $s(t)$, має спектральну функцію $S(\omega)$, то дискретний сигнал $s_d[n]$, отриманий з цього сигналу $s(t)$ буде мати спектральну функцію

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} S(\omega - n\omega_d), \quad \text{де } \omega_d = 2\pi/T \text{ - кутова частота дискретизації} \quad (9.5)$$

а T – період дискретизації. Тобто, спектр дискретизованого сигналу є нескінченним повторенням вздовж осі частот спектру первинного безперервного сигналу (рис. 6). Повторення відбувається через інтервал частот, ширина якого дорівнює частоті дискретизації сигналу ω_d .

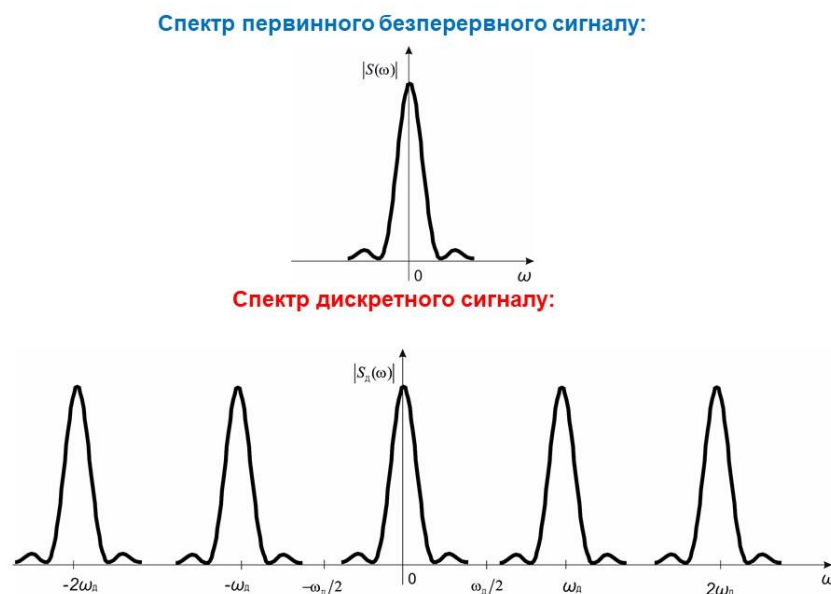


Рис. 6 – Спектри безперервного та дискретизованого сигналів

Примітка 5: Зазвичай на практиці розглядають лише одну ділянку спектру в інтервалі частот від $-\omega_0/2$ до $+\omega_0/2$. В цьому разі вважається, що дискретизація зроблена із застосуванням теореми Котельникова.

Отримання спектральної функції з z-перетворення сигналу

Частіше за все ми не знаємо безпосередньо спектральної функції первинного безперервного сигналу. У нас в руках є лише деяка числова послідовність $x[n]$, що є відліками, отриманими з цього первинного безперервного сигналу. Яким чином отримати вираз для спектральної функції цього сигналу та провести аналіз його спектральних характеристик? Виявляється, що це дуже просто зробити, використовуючи метод z-перетворень. Але спочатку трохи теорії.

Отже, спектральна функція $S(\omega)$ сигналу $s(t)$ - це перетворення Фур'є від цього сигналу:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \tag{9.6}$$

Дискретний сигнал $s(t)$, можна представити у вигляді (рис. 7) деякого ряду – суми добутків значень відліків цього сигналу $s[k]$, де k – номер індексу, та дельта-функції $\delta[t - kT]$, яка приймає нескінченне значення у момент часу, що відповідає цьому індексу k , тобто:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \delta[t - kT] \tag{9.7}$$

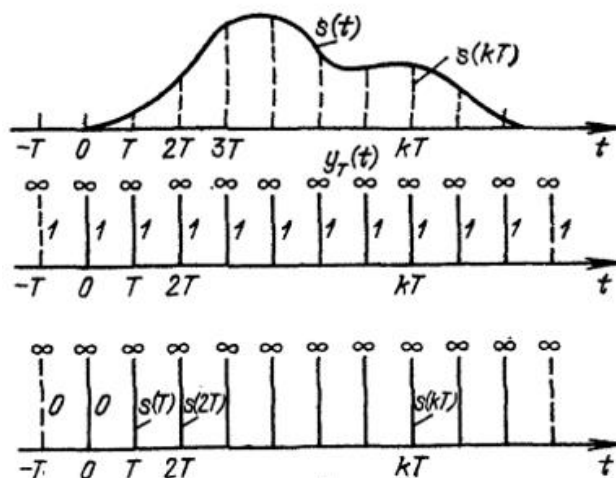


Рис. 7 – Подання дискретного сигналу за допомогою дельта-функцій

Застосуємо до дискретного сигналу $s(t)$, записаного у вигляді (9.7) перетворення Фур'є (9.6). Використовуючи під час виведення формули фільтруючу властивість дельта-функції $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]\delta[t-kT]e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[t-kT]e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]e^{-j\omega kT}\end{aligned}\quad (9.8)$$

А тепер запишемо отриманий результат разом з z -перетворенням для цього самого сигналу $s(t)$:

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]e^{-j\omega kT} \quad (9.9)$$

$$S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]z^{-k} \quad (9.10)$$

Схожість цих двох формул очевидна: формула (9.10) перетворюється на формулу (9.9), якщо в ній зробити заміну, підстановку:

$$z \Rightarrow e^{j\omega T} \quad (9.11)$$

Ось і все! Ми отримали відповідь на питання: яким чином отримати вираз для спектральної функції дискретного сигналу та провести аналіз його спектральних характеристик? Відповідь дуже проста: треба в z -перетворенні сигналу виконати підстановку (9.11) і все! Таким чином ми отримуємо спектральну функцію сигналу! Покажемо на прикладі.

Приклад №4:

Нехай наш дискретний сигнал є геометричною прогресією $x[n] = \left(\frac{7}{8}\right)^n u[n]$.

Z -перетворення від такого сигналу (див. лекцію 8) має вигляд $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{8}z^{-1}}$.

Підставляємо в цю формулу $e^{j\omega T}$ замість z , тобто виконуємо підстановку (9.11). В результаті отримуємо спектральну функцію дискретного сигналу $x[n]$:

$$\dot{X}(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{7}{8}e^{-j\omega T}}$$

Це і є спектральна функція сигналу $x[n]$. Тепер можна проводити дослідження спектру цього сигналу, наприклад, будувати діаграму амплітудного спектра або фазового спектра. Проте в цьому разі слід враховувати примітку 5

Отримання z -перетворення за спектральною функцією сигналу

Зрозуміло, можна виконати і зворотний перехід: від спектральної функції сигналу до його z -перетворення. В цьому випадку у виразі для спектральної функції $S(\omega)$ треба виконати заміну:

$$\omega = \frac{1}{jT} \ln z \quad (9.12)$$

Ця заміна є зворотним виразом до виразу (9.11). Резюмуючи вищезазначене, можна записати:

$$\begin{aligned} \dot{X}(\omega) &= X\left(e^{-j\omega T}\right) \\ X(z) &= \dot{X}\left(\frac{1}{jT} \ln z\right) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Отримання комплексного коефіцієнта передачі системи з дискретної передавальної характеристики системи

Так само, як ми знаходили спектральну функцію сигналу з його z -перетворення, можна знайти і комплексний коефіцієнт передачі дискретної системи. Тобто можна досліджувати частотні характеристики системи на основі дискретної передавальної функції $H(z)$.

Для того, аби отримати комплексний коефіцієнт передачі системи необхідно в дискретній передавальній функції зробити заміну (9.11):

$$\dot{K}(\omega) = H\left(e^{-j\omega T}\right) \quad (9.14)$$

Зворотний перехід виконується за допомогою заміни (9.12):

$$H(z) = \dot{K}\left(\frac{1}{jT} \ln z\right) \quad (9.15)$$

Приклад №5:

Знайдемо частотну характеристику системи Фібоначчі, дискретна передавальна функція якої має вигляд $H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$. Виконавши підстановку (9.11) отримуємо комплексний коефіцієнт передачі системи Фібоначчі:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} - e^{-2j\omega T}} \quad (9.16)$$

Побудова дискретної моделі за безперервною моделлю системи

І ще одна перевага z -перетворень, остання з перелічених в цій лекції, проте далеко не остання в переліку всіх переваг z -перетворень: за допомогою z -перетворення можна легко побудувати дискретну модель безперервної системи, якщо відома передавальна функція безперервної системи $H(p)$, побудована методами теорії автоматичного керування із застосуванням оператора Лапласа. Щоб це зробити, необхідно в передавальній функції безперервної системи $H(p)$ зробити підстановку

$$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (9.17)$$

Заміна оператора інтегрування вказаним способом називається «білінійне перетворення», іноді цей метод називають перетворенням Тастина або методом z -форм.

Виконавши таку підстановку, ми отримуємо дискретну передавальну функцію $H(z)$, від якої, як уже неодноразово вказувалося раніше, можна легко перейти до різницевих рівнянь системи і далі безпосередньо до алгоритмів комп'ютерного моделювання системи, а також до генерації цифрових сигналів.

Приклад №6:

Нехай певна безперервна система описується диференціальним рівнянням $\tau \frac{dy}{dt} + y = x$, де τ – постійна часу. Тоді передавальна функція такої системи,

виражена з допомогою оператора Лапласа, має вигляд: $H(p) = \frac{1}{\tau p + 1}$.

Проводимо в цій передавальній функції заміну змінної за формулою (9.17) та

отримуємо дискретну передавальну функцію даної безперервної системи (для кроку дискретизації T):

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1}{\tau p + 1} = \frac{1}{\tau \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} + 1} = \frac{T}{2\tau} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1} + \frac{T}{2\tau}(1+z^{-1})} = \\
 &= \frac{T}{2\tau} \frac{1+z^{-1}}{\left(1 + \frac{T}{2\tau}\right) - \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right)z^{-1}} = \frac{T}{2\tau} \frac{1+z^{-1}}{\left(1 + \frac{T}{2\tau}\right) \frac{1 - \frac{T}{2\tau}z^{-1}}{1 + \frac{T}{2\tau}z^{-1}}} = \\
 &= \frac{T}{2\left(\tau + \frac{T}{2}\right)} \frac{1+z^{-1}}{1 - \frac{\tau - \frac{T}{2}}{\tau + \frac{T}{2}}z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{9.18}$$

Від отриманої дискретної передавальної функції легко переходимо до різницевих рівнянь:

$$y[n] - \frac{\tau - \frac{T}{2}}{\tau + \frac{T}{2}} y[n-1] = \frac{T}{2\left(\tau + \frac{T}{2}\right)} x[n] + \frac{T}{2\left(\tau + \frac{T}{2}\right)} x[n-1] \tag{9.19}$$

Отримане різницеве рівняння дає нам алгоритм щодо комп'ютерного моделювання поведінки системи. За допомогою цифрової моделі можна виконати дослідження системи: на вхід системи подаємо вхідний сигнал, що нас цікавить у вигляді числової послідовності $x[n]$, а на виході моделі системи отримуємо відгук у вигляді послідовності $y[n]$. Проте, завжди треба враховувати, що моделювання проводиться лише певного заданого кроку дискретизації T . Коефіцієнти дискретної моделі за різних значень T будуть різними. Крок дискретизації вибирають з міркувань забезпечення адекватності дискретної моделі реальному фізичному об'єкту, і також забезпечення необхідної точності результатів моделювання. До того ж має бути забезпечена стійкість системи, що реалізує отримані алгоритми, для чого має бути проведено відповідний аналіз дискретної системи (9.18). За результатами цього аналізу та з урахуванням зазначених вище міркувань вибирають потрібне значення кроку дискретизації.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Знаходження реакції системи на вхідний сигнал методом z -перетворень.
2. Зв'язок z -перетворень та алгоритмів роботи систем обробки цифрових сигналів.
3. Отримання спектральної функції з z -перетворення сигналу.
4. Отримання комплексного коефіцієнту передачі системи з дискретної передавальної характеристики системи.
5. Побудова дискретної моделі за безперервною моделлю системи.

Лекція № 10

Тема: Дискретне перетворення Фур'є**Зміст**

Призначення та сенс дискретного перетворення Фур'є	2
Обчислення ДПФ	5
Властивості дискретного перетворення Фур'є	9
Лінійність	9
Затримка	9
Симетрія	9
Кругова згортка	10
ДПФ добутку послідовностей	11
Дискретні аналоги теореми Релея і рівності Парсеваля	11
Швидке перетворення Фур'є	12
Контрольні питання за темою	13
Рівень модуля	13
Рівень курсу	13

Джерела:

1. Сергієнко А.Б. Цифрове оброблення сигналів. - 3-тє вид. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 768 с.: іл.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифрова обробка сигналів - М.: Техносфера, 2006. - 856с.
3. https://ua.wikipedia.org/wiki/Поділ_багаточленів_стовпчиком

Призначення та сенс дискретного перетворення Фур'є

Спектральний аналіз має велике значення в теорії систем та сигналів. Знання спектральних властивостей інформаційного сигналу дозволяє найкращим чином виділити цей сигнал на тлі перешкод, спектри яких також важливо для цього знати. Синтез систем керування, так само як й фільтрів, починається з побудови необхідних частотних характеристик, після чого за відомими методиками проводиться перехід до апаратної та програмної побудови систем.

Для цифрових систем та сигналів важливе значення спектрального аналізу зберігається. Розглянемо особливості застосування спектрального аналізу та знаходження спектра сигналу для випадку цифрових або просто дискретних сигналів (що в рамках нашого курсу можна вважати одним й тим самим).

У попередній лекції було показано, що спектральну функцію дискретного сигналу $s[k]$ отримати досить легко: для цього в z-перетворенні сигналу

$$S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]z^{-k} \quad (10.1)$$

достатньо виконати підстановку

$$z \Rightarrow e^{j\omega T} \quad (10.2)$$

Внаслідок цього отримуємо спектральну функцію дискретного сигналу:

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]e^{-j\omega k T} \quad (10.3)$$

Ця формула дає ясне теоретичне уявлення про те, що являє собою спектральна функція дискретного сигналу. Однак, на практиці користуватися цією формулою неможливо. Для цілей цифрової обробки, яка реалізується за допомогою обчислювальних пристроїв, необхідно мати формулу, що дозволяє створити обчислювальний алгоритм. Формула (10.3) такою не являється: в ній є присутній ряд з нескінченними межами, а в алгоритмах «нескінченність» не має сенсу. Проте найголовніша проблема полягає у тому, що функція $\dot{S}(\omega)$ є безперервною функцією частоти, але ж комп'ютер – це цифрова система, в ній неможливо оперувати безперервними функціями. Будь-яку безперервну функцію під її час оброблення в комп'ютері завжди необхідно подавати у вигляді набору окремих дискретних значень (або коефіцієнтів для її інтерполяції).

Для того, аби обчислення спектру комп'ютерними засобами стало можливим, необхідно знайти такий метод, який в результаті його застосування давав би не безперервний спектр, а набір окремих значень цього спектра. Такий метод існує – це дискретне перетворення Фур'є (скорочено – ДПФ).

Сенс цього методу полягає в наступному. Нехай в нас є якийсь дискретний сигнал (рис. 10.1). Нас цікавлять його спектральні властивості.

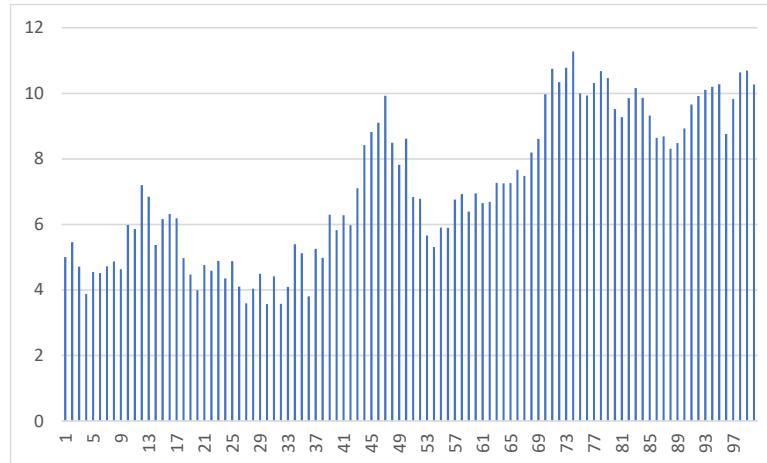


Рис. 10.1 - Певний дискретний сигнал (для прикладу)

Поступаємо так. Замість знаходження спектральної функції для всього сигналу виконуємо розрахунок перетворення Фур'є тільки для окремої його частини – тої частини відліків, які потрапляють в так зване «вікно» (рис. 10.2). Питання ширини вікна поки що обговорювати не будемо. Просто вважаємо, що вікно має достатню ширину для того, аби за вмістом можна було б оцінити спектральну функцію.



Рис. 10.2 - Вікно, в межах якого розраховується спектр сигналу

Що дає заміна всього сигналу на його частину для аналізу спектру? Справа в тому, що навіть якщо сигнал є обмеженим за часом, тобто коли підсумовування може проводитися не в нескінченних, а в обмежених межах,

то формула (10.3) все рівно дає нам вказівку на обробку всього масиву відліків. Якщо ж сигнал є достатньо тривалим за часом, що частіше за все й буває, то число відліків виявляється дуже великим. В результаті обчислювальна складність знаходження спектру стає дуже високою. Крім того, отримати весь сигнал ми можемо лише після завершення спостереження за ним. Якщо ж система безперервно працює в режимі реального часу, то невідомо, коли це станеться. Фактично, після її вимкнення, і тоді отриманий спектр навряд чи взагалі буде потрібним для цілей керування процесом. Проте, в разі використання «вікна» ми можемо аналізувати сигнал безпосередньо в режимі реального часу: за вже отриманими відліками – тим, що потрапили у «вікно», без урахування майбутніх відліків, які ще не надійшли. Так, це дещо неточно, але цілком достатньо для аналізу. Отриману інформацію ми вже можемо використовувати безпосередньо в процесі функціонування системи, а не лише після завершення роботи. Зрештою, можна знайти спектральну функцію сигналу для одного вікна, потім для іншого, а потім й для багатьох інших, після чого усереднити отримані значення. В результаті ми отримаємо спектральну функцію, яка практично збігається з тою, що має показати формула (10.3) для сигналу в цілому. Ми повинні враховувати, що сигнали, з якими ми маємо справу на практиці, вони – випадкові, тому щоразу ми отримуватимемо дещо різні спектральні функції. Щоб наблизитись до істини, необхідно усереднювати отримані результати.

Тепер робимо наступний крок. Після того, як відібрано відліки, які потрапили у вікно, робимо припущення про те, що за межами вікна сигнал повторює ті відліки, які знаходяться всередині вікна. Тобто ми тепер вважаємо, що сигнал, для якого ми шукаємо перетворення Фур'є, є періодичним (рис. 10.3). Вочевидь, первинний сигнал (рис.10.1) не був періодичним. Ми робимо таке припущення лише для того, аби замість безперервного спектру сигналу отримати дискретний спектр. З курсу «Радіотехнічні кола та сигнали» ми знаємо, що спектр періодичного сигналу є дискретним – він є рядом Фур'є, тобто сумою окремих дискретних гармонік.

Як раз в цьому й полягає сенс **дискретного перетворення Фур'є**: коли ми його застосовуємо до дискретного сигналу, то ми в результаті отримуємо **дискретний спектр**. А ось тепер ми вже можемо застосовувати алгоритмічні методи знаходження дискретної спектральної функції. Представлення спектральної функції у дискретній формі – це дуже зручно для проведення спектрального аналізу. Про те, як слід виконувати ДПФ, йтиметься в наступному розділі. По суті, ДПФ – це просто знаходження коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є для дискретного періодичного сигналу, повний період якого представлено відліками, які потрапили у вікно.

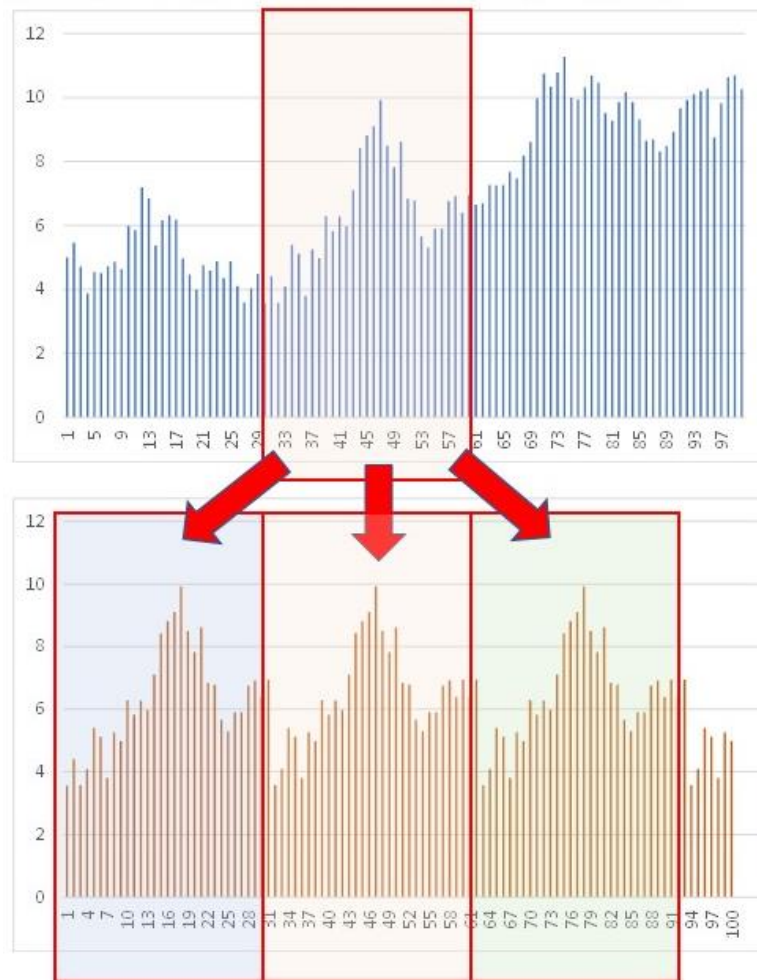


Рис. 10.3 – «Перетворюємо» сигнал на умовно періодичний

Обчислення ДПФ

З курсу «Радіотехнічні кола та сигнали» відомо, що спектр **дискретного** сигналу є періодичним. Розглянемо, що таке є спектр **дискретного періодичного** сигналу.

Отже, нехай послідовність відліків $x[n]$ є періодичною з періодом N (періодичні числові послідовності ми розглядали у лекції 2). Нагадаємо, що періодичною є така послідовність, для якої справедлива рівність:

$$x[k] = x[k + N] \quad (10.4)$$

для всіх k , де N – це період, й він являє собою ціле число.

Періодична послідовність повністю описується скінченним набором чисел, в якості якого можна взяти довільний фрагмент довжиною N , наприклад $\{x[k] \ k = 0, 1, \dots, N - 1\}$. Поставлений у відповідність до цієї послідовності сигнал із зміщених за часом дельта-функцій:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \delta[t - kT] \quad (10.5)$$

також, зрозуміло, буде періодичним з мінімальним періодом часу NT . Тут T – період дискретизації, з яким було отримано відліки $x[k]$. Відповідно, кругова частота дискретизації $\omega_d = 2\pi/T$.

Оскільки сигнал є дискретним, його спектр має бути періодичним з періодом, що дорівнює частоті $\omega_d = 2\pi/T$, як ми це знаємо з теорії курсу «Радіотехнічні кола та сигнали». Але, з іншого боку, оскільки цей сигнал додатково ще є й періодичним з періодом за часом NT , то його спектр має також бути ще й дискретним, а відстань між гармоніками по осі частот має становити $2\pi/(NT)$.

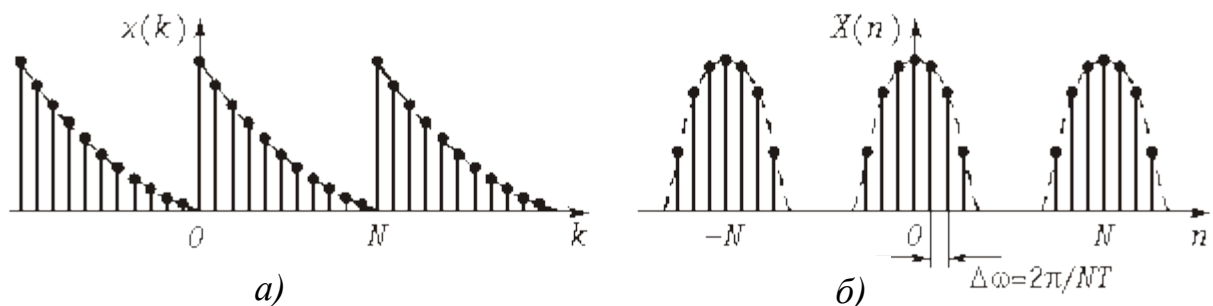


Рис. 10.4 – Приклад дискретного періодичного сигналу (а) та його спектру (б)

Таким чином, періодичний дискретний сигнал має періодичний дискретний спектр, який також описується кінцевим набором з N чисел (один період спектру містить $\frac{2\pi}{T} / \frac{2\pi}{NT} = N$ гармонік). Тобто N відліків періодичного дискретного сигналу, взяті вздовж осі часу на протязі одного періоду його повторення, дають N гармонік в його спектрі, які в свою чергу також періодично повторюються, але вже вздовж осі частот.

Розглянемо процедуру обчислення спектру періодичного дискретного сигналу. Оскільки сигнал періодичний, розкладатимемо його в комплексний ряд Фур'є, який зазвичай записують у вигляді:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t} \quad (10.6)$$

Коефіцієнти цього ряду обчислюються згідно із загальною формулою

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (10.7)$$

У формулі під T розуміють період сигналу. Ми ж у своїй лекції позначення T застосовуємо для періоду дискретизації, а період повторення

сигналу відповідно до прийнятих в цій лекції позначень становить NT , що є добутком періоду дискретизації на число відліків в одному періоді. Крім того, у цій лекції замість позначення \dot{C}_k для комплексних коефіцієнтів розкладання ряду Фур'є ми будемо застосовувати позначення $\dot{X}[n]$. Це зроблено з тієї причини, що ряд Фур'є, отриманий в результаті розкладання сигналу $x[k]$, ми розглядаємо як результат роботи цифрової системи, що реалізує дискретне перетворення Фур'є, тобто як реакцію такої системи на вхідний сигнал $x[k]$.

Отже, відповідно до формули (10.7) та відповідно до обраних позначень коефіцієнти ряду Фур'є будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{X}[n] &= \frac{1}{NT} \int_0^{NT} s(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \delta[t-kT] e^{-jn\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \int_0^{NT} \delta[t-kT] e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jn\omega kT} = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-jn \frac{2\pi}{NT} kT\right) = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right)\end{aligned}\quad (10.8)$$

Таким чином, формула для обчислення комплексних амплітуд гармонік, які виражаються коефіцієнтами $\dot{X}[n]$, являє собою лінійну комбінацію відліків сигналу $x[k]$.

В виразі (10.8) реальний масштаб часу фігурує лише в множнику $1/T$ попереду оператора підсумовування. Під час розгляду дискретних послідовностей зазвичай оперують лише номерами відліків та номерами спектральних гармонік, без прив'язки до дійсного масштабу часу або частоти. Тому множник $1/T$ видаляють, тобто вважають, що частота дискретизації дорівнює одиниці. Видаляють зазвичай і множник $1/N$. Вираз, який залишається після цього, називається дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ; англійський термін - *Discrete Fourier Transform, DFT*):

$$\dot{X}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right)\quad (10.9)$$

Якщо застосувати формулу Ейлера, то в цій формулі ДПФ кожен комплексний коефіцієнт можна представити у вигляді суми його дійсної та уявної частини, і, відповідно, замінити один комплексний ряд двома дійсними рядами:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}[n] &= \operatorname{Re}(\dot{X}[n]) + j \operatorname{Im}(\dot{X}[n]) = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cos\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) + j \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \sin\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)
 \end{aligned} \tag{10.10}$$

Таким чином, з алгоритмічної точки зору, для знаходження кожної з N гармонік спектральної функції дискретного сигналу (точніше кажучи: дискретної спектральної функції для відліків цього сигналу, які потрапили у вікно шириною N) необхідно знайти дві суми, перша з яких – дійсна частина, а друга – уявна частина коефіцієнта $\dot{X}[n]$, яка відповідає конкретній гармоніці:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\dot{X}[n]) &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \\
 \operatorname{Im}(\dot{X}[n]) &= -\sum_{k=0}^{N-1} x[k] \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)
 \end{aligned} \tag{10.11}$$

В обох цих рядах присутні лише дійсні числа, завдяки чому алгоритм ДПФ отримує простий та зрозумілий вигляд.

Вочевидь, існує і зворотнє дискретне перетворення Фур'є. Перехід від дискретного спектра до часових відліків сигналу виражається такою формулою:

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}[n] \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{10.12}$$

Останній вираз відрізняється від формули прямого ДПФ лише знаком у показнику комплексної експоненти та наявністю множника перед оператором підсумовування. Його також можна представити двома рядами аналогічно (10.11).

ЗАУВАЖЕННЯ

Серед фахівці цифрової обробки сигналів немає повної єдності щодо розміщення множника $1/N$ в формулах (10.9) та (10.12). В більшості джерел, а також у математичних пакетах комп'ютерних програм (в тому числі й в MATLAB) цей множник фігурує у формулі зворотного ДПФ, як й показано в нашій лекції (10.12). В той же самий час в деяких підручниках цей множник включено у формулу прямого ДПФ. Також зустрічається (особливо в "чисто математичних" джерелах) такий симетричний варіант, коли у формулах як прямого, так зворотного ДПФ одночасно фігурують однакові множники, які дорівнюють $1/\sqrt{N}$.

Властивості дискретного перетворення Фур'є

Взагалі властивості ДПФ аналогічні властивостям безперервного перетворення Фур'є, проте дискретний характер сигналу привносить певну специфіку.

Лінійність

З формули (10.9) очевидно, що ДПФ є лінійним: якщо двом періодичним послідовностям $x[k]$ та $y[k]$ з однаковим періодом N відповідають набори гармонік $\dot{X}[n]$ та $\dot{Y}[n]$, то послідовності $ax[k]+by[k]$ буде відповідати спектр $a\dot{X}[n]+b\dot{Y}[n]$.

Затримка

Якщо послідовність $x[k]$ затримати на один такт й таким чином отримати нову послідовність $y[k]=x[k-1]$, то згідно з формулою (10.9) спектр нової послідовності $\dot{Y}[n]$ буде спектром первинної послідовності $\dot{X}[n]$, множенням на $\exp\left(-j\frac{2\pi n}{N}\right)$:

$$\dot{Y}[n] = \dot{X}[n] \exp\left(-j\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (10.13)$$

Оскільки ми вважаємо послідовність $x[k]$ періодичною, то розглянутий зсув є циклічним: $y[n]=x[n-1]=x[n-1+N]$.

Симетрія

Як вже зазначалося раніше, спектр дискретного періодичного сигналу є періодичним. Крім того, зберігається і властивість симетрії, яка притаманна спектру безперервного дійсного сигналу $\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$. Зауважимо, що всі існуючі в природі та техніці сигнали є дійсними. Тому маємо наступне:

$$\dot{X}[-n] = \dot{X}^*[n] \quad (10.14)$$

А з урахуванням періодичності спектру дискретного сигналу, формула (10.14) може бути переписана ще й таким чином:

$$\dot{X}[N-n] = \dot{X}[-n] = \dot{X}^*[n] \quad (10.15)$$

Гармоніка з нульовим номером (постійна складова), як видно з (10.9), являє собою суму відліків послідовності на одному періоді:

$$\dot{X}(0) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \quad (10.16)$$

Якщо N парно, то амплітуда гармоніки з номером $N/2$ є сумою відліків із знаками, які чергуються:

$$\begin{aligned} \dot{X}\left(\frac{N}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi n \frac{N}{2}}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j\pi k) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x[k] = \\ &= x[0] - x[1] + \dots + x[N-2] - x[N] \end{aligned} \quad (10.17)$$

У відповідно до (10.15), спектр є "сполучено-симетричним" щодо $N/2$, тобто містить таку ж кількість інформації, що і сам сигнал. Справді, вихідна послідовність $x[k]$ представляється набором з N дійсних чисел. В той же час спектр представляється набором з $N/2$ (друга половина взаємно-однозначно пов'язана з першою) комплексних чисел, кожне з яких з інформаційної точки зору еквівалентно двом дійсним.

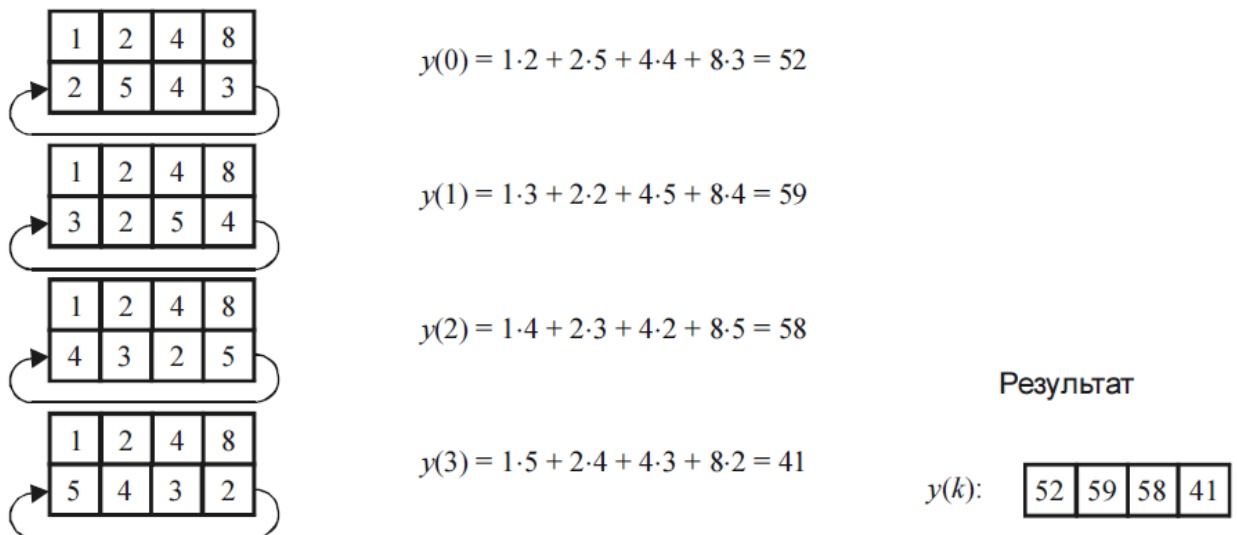


Рис. 10.5 – Обчислення кругової згортки

Кругова згортка

Оскільки ми розглядаємо періодичні послідовності, то підсумовування під час обчислення згортки таких послідовностей слід проводити лише по одному періоду N . Таку операцію називають круговою згорткою (рис. 10.5):

$$y[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[k-m] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(k-m) \bmod N] \quad (10.18)$$

ЗАУВАЖЕННЯ

У цій формулі вираз $[(k-m) \bmod N]$ означає взяття $(k-m)$ за модулем N , тобто обчислення залишку від ділення $(k-m)$ на N .

Підставивши вираз (10.18) в (10.9), можна переконатися, що кругова згортка періодичних часових послідовностей відповідає перемноженню їх спектрів:

$$\dot{Y}(n) = \dot{X}_1(n)\dot{X}_2(n) \quad (10.19)$$

ЗАУВАЖЕННЯ

Кругову згортку періодичних послідовностей не слід плутати з лінійною згорткою $y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[k-m]$, яку було розглянуто в лекції 4, та яка є основою алгоритму дискретної фільтрації.

ДПФ добутку послідовностей

Візьмемо дві послідовності відліків $x_1[k]$ та $x_2[k]$ однакової довжини N та обчислимо результат їх поелементного множення:

$$y[k] = x_1[k]x_2[k] \quad (10.20)$$

Якщо застосувати до цієї формули пряме ДПФ, то вийде такий вираз:

$$\dot{Y}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}_1(n)\dot{X}_2(m-n) \quad (10.21)$$

ЗАУВАЖЕННЯ

Під час проведення обчислень за формулою (10.21) можуть знадобитися значення з номерами m , що виходять за рамки діапазону $0 \dots M-1$. В цьому випадку слід скористатися властивістю періодичності спектра: $\dot{X}_2(n) = \dot{X}_2(n+N)$.

Дискретні аналоги теореми Релея і рівності Парсеваля

Вираз (10.21) є круговою згорткою спектрів $\dot{X}_1(n)$ та $\dot{X}_2(n)$. Це говорить про те, що так само, як й в випадку безперервного перетворення Фур'є, спектр добутку дискретних сигналів є згорткою спектрів цих сигналів.

Для випадку $n=0$ з (10.21) отримуємо дискретний аналог теореми Релея:

$$\dot{Y}(0) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[k]x_2[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}_1(n)\dot{X}_2(-n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}_1(n)\dot{X}_2^*(n) \quad (10.22)$$

Під час виведення формули (10.22) було використано співвідношення (10.15) і (10.16).

Якщо, крім того, послідовності $x_1[k]$ і $x_2[k]$ співпадають, тобто $x_1[k] = x_2[k] = x[k]$ для всіх $k = 0 \dots N-1$, то отримуємо дискретний аналог рівності Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\dot{X}_1(n)|^2 \quad (10.23)$$

Швидке перетворення Фур'є

До цього часу ми не розглядали питання, як правильно вибрати ширину вікна для ДПФ. Насправді це досить складне питання і відповідь на нього можна дати таким чином: ширину вікна слід вибрати виходячи з властивостей сигналу та мети дослідження. Більш конкретний розгляд цього питання виходить за рамки даного курсу, який розглядає лише *основи* цифрової обробки сигналів та зображень.

Але одну, дуже корисну рекомендацію все ж таки необхідно дати. Якщо вибрати ширину вікна в такий спосіб, щоб у нього потрапляло $N=2^n$ відліків (де n – ціле число), наприклад $N=32$, $N=64$, $N=512$, $N=1024$ тощо, тоді для розрахунку ДПФ можна використовувати алгоритм, який зветься «Швидке перетворення Фур'є» (скорочено – БПФ). Цей алгоритм дає абсолютно ті ж значення, що й звичайний ДПФ, але він робить це значно швидше. Наприклад, для ширини вікна у 1024 відліки досягається 100-кратне прискорення.

Якщо ж ширина вікна не буде дорівнює 2^n , то алгоритм БПФ все одно працюватиме швидше, ніж звичайний ДПФ. І тільки в тому випадку, якщо N буде простим цілим числом, то тоді і звичайний ДПФ, і БПФ працюватимуть з однаковою швидкістю.

Алгоритми ДПФ і БПФ входять до багатьох систем програмування в якості відповідних функцій або об'єктів.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Призначення та сенс дискретного перетворення Фур'є.
2. Обчислення дискретного перетворення Фур'є.
3. Властивості дискретного перетворення Фур'є.
4. Дискретні аналоги теореми Релея та рівності Парсеваля.
5. Швидке перетворення Фур'є.

Лекція № 11

Тема: Дискретні фільтри**Зміст**

Особливості розрахунку амплітудно-частотної характеристики дискретної системи	2
Нулі та полюси передавальної функції дискретної системи	4
Зв'язок АЧХ дискретної системи з розташуванням нулів та полюсів її передавальної функції	4
Умова стійкості лінійних стаціонарних дискретних систем	6
Введення в цифрові фільтри	8
Дискретна система та дискретний фільтр	10
Нерекурсивні та рекурсивні фільтри	10
Фільтри першого та другого порядку	11
Фільтри першого порядку	11
Умови стійкості для систем другого порядку	13
Цифровий смуговий фільтр другого порядку	15
Цифровий загороджувальний (режекторний) фільтр другого порядку	17
Контрольні питання за темою.....	19
Рівень модуля	19
Рівень курсу	19

Джерела:

1. Сергієнко А.Б. Цифрове оброблення сигналів. - 3-тє вид. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 768 с.: іл.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифрова обробка сигналів - М.: Техносфера, 2006. - 856с.
3. https://ua.wikipedia.org/wiki/Поділ_багаточленів_стовпчиком

Перед початком розгляду дискретних фільтрів ще раз розглянемо поняття нулів і полюсів дискретних систем та їх зв'язку з амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) системи, а також повторно повернемося до питання стійкості дискретних систем. Частково ми вже розглядали ці питання в лекціях 6 і 7, тим не менш в даній лекції ми знов вертаємося до них у зв'язку з великим значенням цих питань для вивчення цифрових фільтрів.

Особливості розрахунку амплітудно-частотної характеристики дискретної системи

Відмінність дискретного випадку від випадку аналогових систем полягає в тому, що під час розрахунку частотної характеристики дискретної системи точка, яка зображає на комплексній площині аргумент передавальної функції z , рухається не вздовж дійсної осі ω , а по колу одиничного радіусу: $z = \exp(j\omega T)$ (рис. 11.1). В цьому виразі для кола одиничного радіусу $z = \exp(j\omega T)$ маємо такі позначення: T – період дискретизації, ω – кутова частота, яка під час обходу одиничного кола $z = \exp(j\omega T)$ проти часової стрілки змінюється від 0 до $\frac{2\pi}{T}$. Точки початку відліку кутової частоти вздовж одиничного кола та закінчення відліку співпадають, оскільки період повторення функції $z = \exp(j\omega T)$ дорівнює 2π . Тобто, точка початку: $z = \exp(j\omega T)|_{\omega=0} = \exp(0)$; вона ж є точкою закінчення: $z = \exp(j\omega T)|_{\omega=\frac{2\pi}{T}} = \exp(\frac{2\pi}{T}T) = \exp(2\pi) = \exp(0)$. Ця точка лежить на дійсній осі, її координати (1,0).

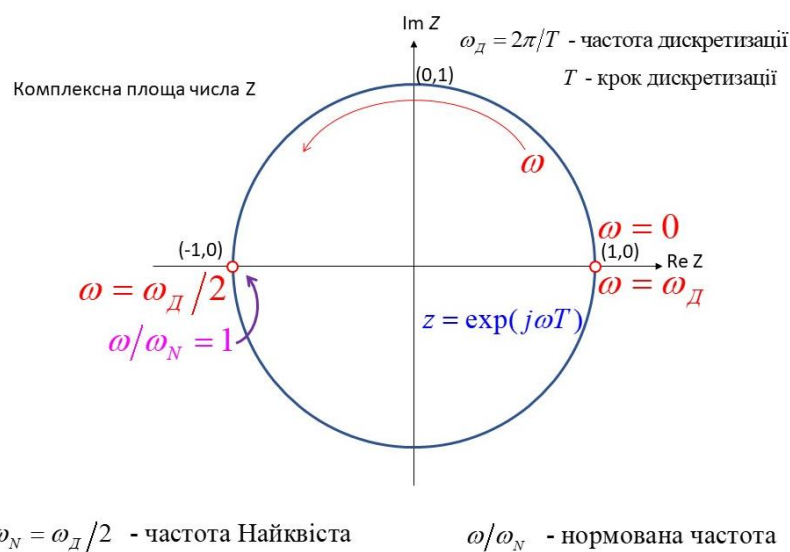


Рис. 11.1 – Змінення кутової частоти під час обчислення АЧХ дискретної системи

Нагадаємо, що спектр дискретизованого сигналу є повторюваним (рис. 11.2). Його спектр повторюється вздовж осі частот з періодом, який дорівнює частоті дискретизації $\omega_D = 2\pi/T$. Відповідно, повторюваним з тим самим періодом $\omega_D = 2\pi/T$ є й АЧХ дискретної системи.

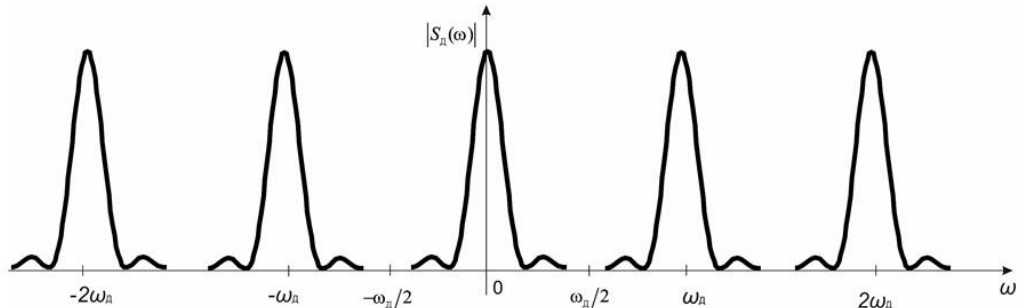


Рис. 11.2 – Повторюваний спектр дискретного сигналу

Зазвичай на практиці розглядають лише одну ділянку АЧХ в інтервалі частот від $-\omega_D/2$ до $+\omega_D/2$. До того ж АЧХ є парною функцією – вона симетрична відносно осі ординат. Таким чином, АЧХ варто розглядати лише на ділянці частот від 0 до $\omega_D/2$ – тобто до частоти Найквіста, яка дорівнює половині частоти дискретизації $\omega_N = \omega_D/2 = \pi/T$ (дивись лекцію 2).

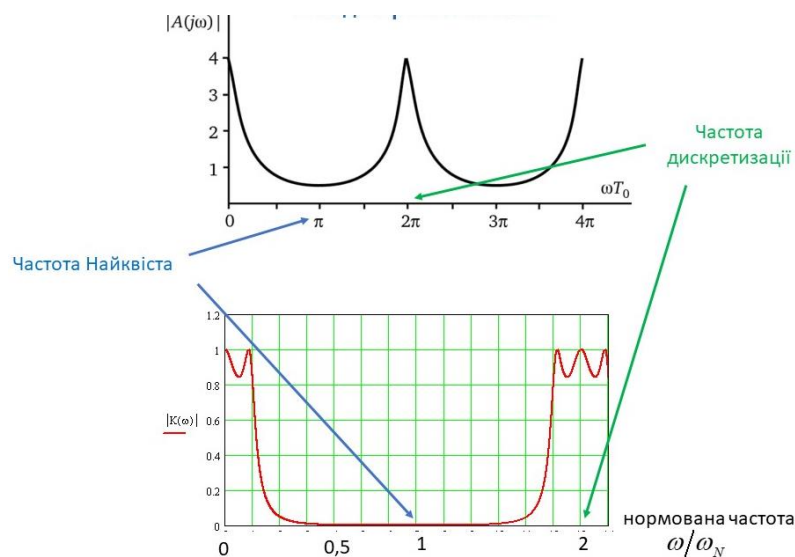


Рис. 11.3 – АЧХ дискретної системи

Частіше за все, й це дуже зручно, під час побудови АЧХ на осі частот вказують не частоту, а значення частот, нормовані до частоти Найквіста: ω/ω_N . В цьому разі нормована частота змінюється лише від 0 до 1 – це стандартний діапазон зміни будь якої нормованої величини (рис. 11.3). Виходячи з цього, коли ми аналізуємо зв'язок між розташуванням на комплексній площині нулів і полюсів передавальної функції $H(z)$ та формою амплітудної частотної характеристики (АЧХ) дискретної системи, то нам достатньо розглянути зміну

аргументу z передавальної функції лише на верхній частині кола $z = \exp(j\omega T)$, тобто лише під час зміни частоти ω від нуля до частоти Найквіста $\omega_N = \omega_d/2 = \pi/T$, що якраз відповідає зміні нормованої частоти від 0 до 1.

Нулі та полюси передавальної функції дискретної системи

Як відомо, передавальна функція цифрової системи представляється таким чином:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (11.1)$$

Застосовуючи прийоми алгебри, можна чисельник і знаменник розкласти на співмножники:

$$H(z) = k \frac{(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_k)}{(z - p_0)(z - p_1) \dots (z - p_k)} \quad (11.2)$$

Тут $k = b_0/a_0$ – коефіцієнт посилення (*gain*), z_i – нулі передавальної функції (*zero*), p_i – полюси передавальної функції (*pole*). В точках нулів передавальна функція приймає нульове значення $H(z_i)=0$, а в точках полюсів прагне до нескінченності $H(p) \rightarrow \infty$. Нулі передавальної функції є дійсними або складають комплексно-сполучені пари. Те саме стосується й полюсів. Коефіцієнт посилення завжди є дійсним числом. З полюсами системи ми вже знайомилися в лекції 7, коли було показано зв'язок між полюсами системи та фундаментальними рішеннями, з яких складається імпульсна характеристика системи.

Зв'язок АЧХ дискретної системи з розташуванням нулів та полюсів її передавальної функції

Існує прямий зв'язок між розташуванням на комплексній площині нулів і полюсів передавальної функції $H(z)$ та формою амплітудно-частотної характеристики дискретної системи.

Сформулюємо закономірності цього зв'язку:

- коли точка $z = \exp(j\omega T)$ знаходиться поблизу одного з нулів передавальної функції z_i , відповідна різниця $(z - z_i)$ стає малою, внаслідок чого АЧХ в даній області частот буде мати провал. Якщо нуль лежить на одиничному колі, АЧХ на відповідній частоті матиме нульове значення;
- коли точка $z = \exp(j\omega T)$ знаходиться поблизу одного з полюсів передавальної функції p_i , відповідна різниця $(z - p_i)$ стає малою, внаслідок чого АЧХ в даній області частот буде мати підйом. Якщо полюс лежить на одиничному колі, АЧХ на відповідній частоті прагне

до нескінченності. Система, яка має такий полюс, знаходиться на межі стійкості.

- чим ближче до одиничного кола розташований нуль (полюс), тим більш вираженим буде відповідний провал (підйом) АЧХ.

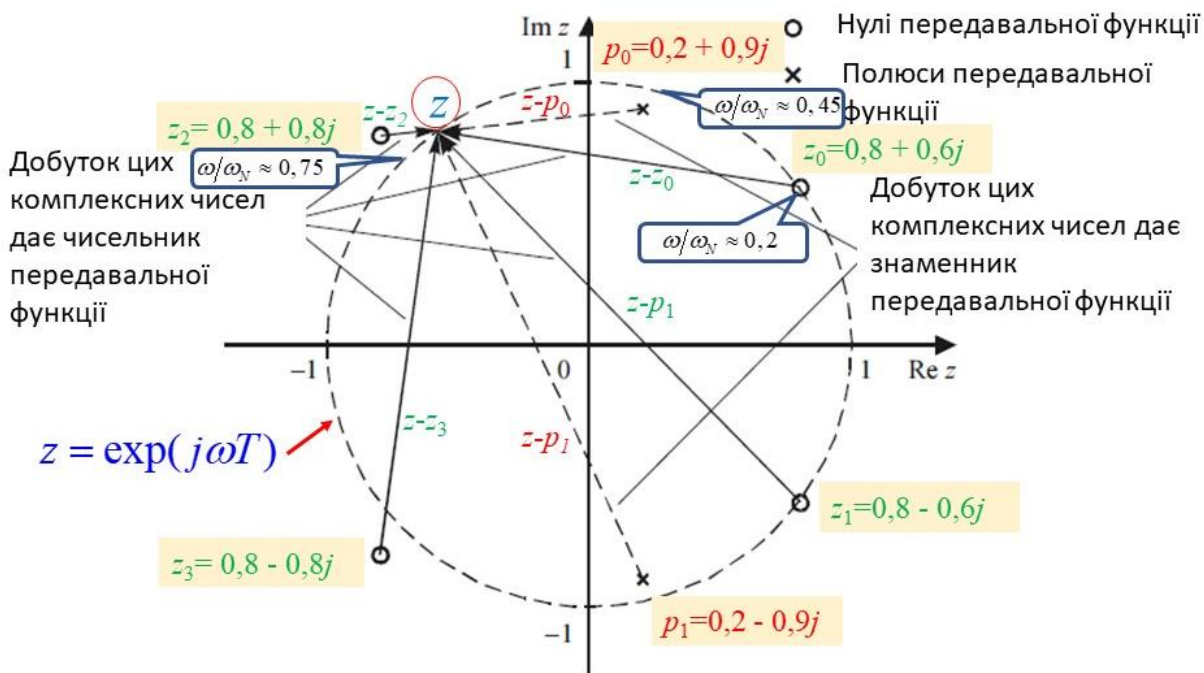


Рис. 11.4 – Вплив розташування нулів та полюсів на форму АЧХ дискретної системи

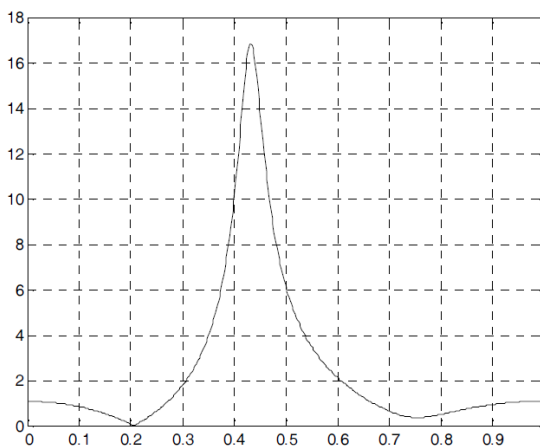


Рис. 11.5 – АЧХ системи з розташуванням нулів і полюсів як то зображено на рис 11.1

В якості прикладу розглянемо систему з передавальною функцією (11.3), що має пару комплексно-сполучених полюсів p_0 та p_1 , які дорівнюють $0,2 \pm 0,9j$, та чотири нулі, два з яких $z_{0,1} = 0,8 \pm 0,6j$ розташовані на одиничному колі, а ще два $z_{0,1} = -0,8 \pm 0,8j$ – поблизу нього (дивись рис. 11.4).

$$H(z) = k \frac{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}{(z - p_0)(z - p_1)} \tag{11.3}$$

У відповідності до особливостей розрахунку амплітудно-частотної характеристики дискретних систем, які були наведені вище, будемо розглядати АЧХ цієї системи лише на ділянці нормованих частот ω/ω_N від нуля до одиниці. Згідно з вказаними раніше принципами АЧХ цієї системи повинна мати пік у районі частоти 0.45, нуль у районі частоти 0.2 та провал у районі частоти 0.75 (наведені значення частот є нормованими ω/ω_N до частоти Найквіста ω_N). На рис. 11.5 показано графік АЧХ цієї системи, який повністю відповідає вказаним закономірностям.

В разі розташування нулів та полюсів на комплексній площині поруч друг з другом їхній вплив на АЧХ може взаємно компенсуватися.

Умова стійкості лінійних стаціонарних дискретних систем

Поняття «стійкість» було розглянуто в лекції 4. Тоді ми давали визначення, що *будь-яка* система є стійкою, якщо її реакція на будь-який сигнал з обмеженою амплітудою також буде обмеженою. Тепер розглянемо питання: в якому випадку, за яких умов *лінійна стаціонарна* система (11.4) буде стійкою?

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (11.4)$$

В першу чергу зауважимо, що навіть за відсутності вхідного сигналу всередині дискретної системи можуть існувати вільні коливання. Їхній вигляд залежить від початкових умов, тобто стану системи в нульовий момент часу. Що це за стан? Скажемо так: колись (ще до нульового моменту часу, до $k = 0$) система перебувала в стані спокою. Потім на її вході на протязі якогось часу діяв якийсь сигнал. Все це було до $k = 0$, точніше так: якщо ми розглядаємо систему (11.4), то цей вхідний сигнал перестав діяти, як мінімум, за P тактів до нульового моменту часу. Тут число P дорівнює більшому з двох чисел M або N , які входять в опис системи (11.4). В нульовий момент часу, а також на протязі від $k = -P$ до $k = 0$, однозначно вже ніякий сигнал на вхід системи не діє, але «післядія» від того сигналу, який колись був, ще якась є, точніше – ще може бути. Стан системи залежить від значень, що зберігаються в елементах пам'яті системи в момент відключення вхідного сигналу. Тобто, це не тільки те, що є в нульовий момент часу, коли $k = 0$, а ще й те, що було перед цим, до нуля, в моменти часу $k = -1$, $k = -2$, аж до $k = -N$, де N – порядок різницевого рівнянь, що описують систему. Чому це так? Тому що «пам'ять» системи визначається її порядком. Чим вище порядок системи, тим більш вона «розумна», тим більше вона «пам'ятає» про своє «життя» в минулому.

Початкові умови – це й є стан системи в нульовий момент часу, тобто тоді, коли $k = 0$. Якщо ми маємо просту систему, всього з одним входом та виходом, то стан системи – це є значення вихідного сигналу $y[k]$ в нульовий момент часу, тобто – значення відліку $y[0]$, а також значення N попередніх перед цим відліків $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, де N – порядок різницевого рівняння, що описують систему. Як було зазначено вище: $x[-1]=0, x[-2]=0, \dots, x[-M]=0$, оскільки вхідний сигнал за визначенням початкових умов не діє на протязі P тактів до нульового моменту часу, де P – більше з двох чисел M та N .

В техніці та природі ми маємо справу з більш складними системами, які мають багато входів та виходів. В цьому разі стан системи – це значення відліків всіх вихідних сигналів в нульовий та попередні моменти часу, тобто від $k = -1$ до $k = -P$. До речі не всі вихідні сигнали вдається побачити та виміряти, не всі їх можна спостерігати, та й не всі вони впливають на якісь зовнішні об'єкти. Але такі системи в нашому курсі ми ще не розглядаємо. Поки що ми з вами продовжуємо вивчати системи з одним входом та одним виходом (рис. 11.6):

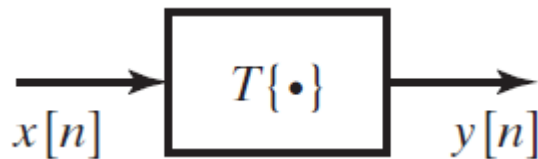


Рис. 11.6 – Проста цифрова система, яка має лише один вхід та один вихід

В теорії різницевого рівняння доведено, що лінійна стаціонарна система (а саме такі і лише такі системи ми розглядаємо в цьому курсі) буде стійкою, якщо за будь-яких початкових умов вільні коливання в системі є згасаючими. Тобто, якщо вхідна послідовність має вигляд $x[k] = 0$, то для вихідної послідовності $y[k]$ обов'язково має виконуватися умова:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = 0 \quad (11.5)$$

Ми знаємо, що будь-який сигнал на виході лінійної стаціонарної системи є лінійною комбінацією її затриманих у часі імпульсних характеристик. Оскільки це так, то для згасання вільних коливань необхідно, щоб імпульсна характеристика системи $h[k]$ була б затухаючою, або інакше кажучи: значення відліків імпульсної характеристики $h[k]$ повинні збігатися до нуля, коли номери індексів прагнуть до нескінченності:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h[k] = 0 \quad (11.6)$$

Таким чином, імпульсна характеристика стійкої лінійної стаціонарної системи обов'язково має бути збіжною (дивись лекції 6 та 7).

У лекції 7 (формула 7.3) було показано, що імпульсна характеристика системи в загальному випадку складається з суми складових, які являють собою геометричні прогресії $A_i p_i^k$, де p_i – полюса функції передачі системи, A_i – певні константи.

Такі складові за $k \rightarrow \infty$ загасають в тому разі, якщо полюс p_i за модулем менше одиниці:

$$|p_i| < 1 \quad (11.7)$$

Ось тепер ми можемо остаточно сформулювати умову стійкості лінійної стаціонарної дискретної системи: аби дискретна система була стійка, полюси її передавальної функції на комплексній площині повинні знаходитися всередині кола одиничного радіусу (рис 11.7).



Рис 11.7 – Умова стійкості лінійної стаціонарної дискретної системи

Введення в цифрові фільтри

Фільтр – це система або мережа, що вибірково змінює форму сигналу (амплітудно-частотну або фазово-частотну характеристику). Основними цілями фільтрації є покращення якості сигналу (наприклад, усунення або зниження перешкод), витягування з сигналів інформації або розділення декількох сигналів, об'єднаних раніше для, наприклад, ефективного використання доступного каналу зв'язку. За своєю суттю, цифровий фільтр – це математичний алгоритм, який вирішує завдання фільтрації. З технічної точки зору цифровий фільтр являє собою певну апаратну чи програмну процедуру, реалізацію алгоритму фільтрації. В цифрових фільтрах часто використовуються оцифровані аналогові сигнали або числа, які просто зберігаються в пам'яті комп'ютера та представлені у вигляді певних змінних.

Цифрові фільтри відіграють важливу роль в цифровій обробці сигналів. Вони застосовуються значно ширше ніж аналогові фільтри в багатьох сферах: стиснення даних, біомедична обробка сигналів, обробка мови, обробка

зображень, передача даних, цифровий звук тощо, оскільки мають ряд переваг, частину з яких описано нижче.

- ✓ Цифрові фільтри здатні мати характеристики, які неможливо отримати на аналогових фільтрах, наприклад, реалізувати повністю лінійну фазову характеристику.
- ✓ На відміну від аналогових, продуктивність цифрових фільтрів не залежить від змін середовища, наприклад, від коливань температури. Таким чином, цифрові фільтри не вимагають періодичного калібрування.
- ✓ Якщо фільтр побудований з використанням програмованого процесора, його частотна характеристика може налаштовуватись автоматично (тому такі процесори широко застосовуються в адаптивних фільтрах).
- ✓ Один цифровий фільтр може обробляти кілька вхідних сигналів чи каналів без дублювання апаратних блоків.
- ✓ Використовуючи мікроконтролери, можна отримувати цифрові фільтри малого розміру зі зниженою потужністю споживання енергії та з низькою ціною.
- ✓ На практиці точність, якої можна досягти в разі використання аналогових фільтрів, обмежена; наприклад, загасання у смузі затримання не можна підняти вище 60-70 дБ (якщо використовувати стандартні аналогові компоненти). В той же час точність цифрових фільтрів обмежена лише довжиною слова.
- ✓ Характеристики цифрових фільтрів однакові для всіх пристроїв однієї серії.
- ✓ Цифрові фільтри можуть застосовуватися в випадку роботи з сигналами дуже низьких частот, характерних, наприклад, для багатьох біомедичних задач; в цьому разі використовувати аналогові фільтри практично неможливо. Взагалі, один й той же цифровий фільтр може доволі просто використовуватись в широкому діапазоні частот, для чого достатньо лише змінювати частоту дискретизації.

Втім, у порівнянні з аналоговими цифрові фільтри мають також й низку недоліків.

- Обмеження швидкості. Максимальна ширина смуги сигналів, які в реальному часі здатні обробити цифрові фільтри значно менша, ніж у аналогових фільтрів. У застосунках реального часу процес перетворення "аналоговий-цифровий" вводить обмеження на швидкість цифрового фільтра. Найвищу частоту дискретизації, з якою може працювати фільтр, обмежує час конвертації АЦП та час встановлення сигналу ЦАП. Крім того, швидкість роботи цифрового

фільтру залежить від швидкості роботи використовуваного цифрового процесора та числа арифметичних операцій, які слід виконати в алгоритмі фільтрації; вона підвищується, коли характеристика фільтра стає більш вузькою.

- Вплив кінцевої розрядності. Цифрові фільтри схильні до шуму АЦП, що відбувається внаслідок квантування безперервного сигналу, і шуму округлення, який вводиться під час обчислень. В разі використання рекурсивних фільтрів високих порядків накопичення шуму заокруглення може призвести до нестійкості фільтра.

Дискретна система та дискретний фільтр

В принципі, "дискретна система" та "дискретний фільтр" – це одне й те саме, проте поняття "фільтр", свідомо або підсвідомо, тісно пов'язується з системами, які одні частоти пропускають, а інші затримують. Такий підхід може створити помилкове, обмежене уявлення про призначення та можливості дискретних лінійних систем, які здатні виконувати й інші завдання, ніж виділення сигналу певної смуги частот. Тим не менш, слова "фільтр" та "система" надалі будуть використовуватися як синоніми.

Нерекурсивні та рекурсивні фільтри

Розрізняють нерекурсивні та рекурсивні фільтри. Рекурсія (від латинського *recursio* – повернення) – це спосіб організації обчислювального процесу, в якому процедура чи функція під час виконання своїх операторів звертається сама до себе.

Нерекурсивними фільтрами називаються дискретні системи, в яких відліки вихідного сигналу формуються виключно на основі відліків вхідних сигналів. Фактично – це системи без зворотного зв'язку, тобто СІХ-системи або інакше – системи з *скінченною імпульсною характеристикою*. Ми їх розглядали в лекціях 5 та 6. Різницеве рівняння, а також передавальна функція такої системи, та, відповідно, й нерекурсивного фільтра, мають вигляд:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] \quad (11.8)$$

$$H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

Важливо відзначити, що коефіцієнти передавальної функції та різницевого рівняння дорівнюють відповідним відлікам імпульсної характеристики системи, яка, як ми знаємо, має скінченну довжину:

$$b_m = h[m], \quad m = 0, \dots, M \quad (11.9)$$

В *рекурсивних фільтрах* для формування поточного відліку вихідного сигналу крім відліків вхідного сигналу використовуються також й попередні відліки цього ж таки самого вихідного сигналу. Такі системи ми знаємо як системи із зворотним зв'язком або НІХ-системи – системи з *нескінченною імпульсною характеристикою* (див. лекції 6, 7). Різницеве рівняння та передавальна функція НІХ-системи, а, відповідно, і рекурсивного фільтру:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (11.10)$$

Фільтри першого та другого порядку

На практиці рекурсивні фільтри часто будуються у вигляді послідовно (каскадно) або паралельно включених секцій першого та другого порядку, тому важливо розуміти, які властивості мають такі секції. У цьому розділі буде розглянуто основні властивості дискретних фільтрів першого та другого порядку з дійсними коефіцієнтами. Отже, мова буде йти про системи з передавальною функцією наступного виду:

- фільтр першого порядку:

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (11.11)$$

- фільтр другого порядку:

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (11.12)$$

Коефіцієнти b_1, b_2, a_1, a_2 є дійсними числами.

Фільтри першого порядку

Передавальна функція фільтру першого порядку (11.11) має один єдиний полюс. Порівнюючи це з умовою стійкості (11.7), відразу ж отримуємо, що система першого порядку буде стійка, якщо $|a_1| < 1$.

Нуль передавальної функції першого порядку також один: $z_1 = -b_1$.

Частотна характеристика та її модуль (тобто АЧХ) для фільтра першого порядку розраховується таким чином:

$$\dot{K}(\omega) = H(e^{j\omega T}) = \frac{1 + b_1 e^{-j\omega T}}{1 + a_1 e^{-j\omega T}} \tag{11.13}$$

$$|\dot{K}(\omega)| = \left| \frac{1 + b_1 e^{-j\omega T}}{1 + a_1 e^{-j\omega T}} \right| = \sqrt{\frac{1 + b_1^2 + 2b_1 \cos(\omega T)}{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos(\omega T)}}$$

Можна показати, що у робочому діапазоні частот від нуля до частоти Найквіста АЧХ фільтру або монотонно зростає, або монотонно зменшується. Як саме буде: або зростання або зменшення, – залежить від взаємного розташування нуля та полюса фільтру наступним чином:

- за $a_1 < 0$ (тобто якщо полюс $p_1 > 0$) АЧХ з частотою зменшується, якщо $z_1 < p_1$ або $z_1 < 1/p_1$, і зростає, якщо $p_1 < z_1 < 1/p_1$;
- за $a_1 > 0$ (тобто якщо полюс $p_1 < 0$) АЧХ з частотою зростає, якщо нуль $z_1 > p_1$ або $z_1 < 1/p_1$ й убиває, якщо $1/p_1 < z_1 < p_1$.

Таким чином, за допомогою системи першого порядку можна отримати найпростіший фільтр нижніх або верхніх частот, але не смуговий чи режекторний фільтр.

Значення АЧХ фільтру на ключових частотах (нульовій частоті, частоті Найквіста і половині частоти Найквіста) визначаються таким чином:

$$|\dot{K}(0)| = \frac{1 + b_1}{1 + a_1}, \quad \left| \dot{K}\left(\frac{\pi}{2T}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 + b_1^2}{1 + a_1^2}}, \quad \left| \dot{K}\left(\frac{\pi}{T}\right) \right| = \frac{1 - b_1}{1 - a_1} \tag{11.14}$$

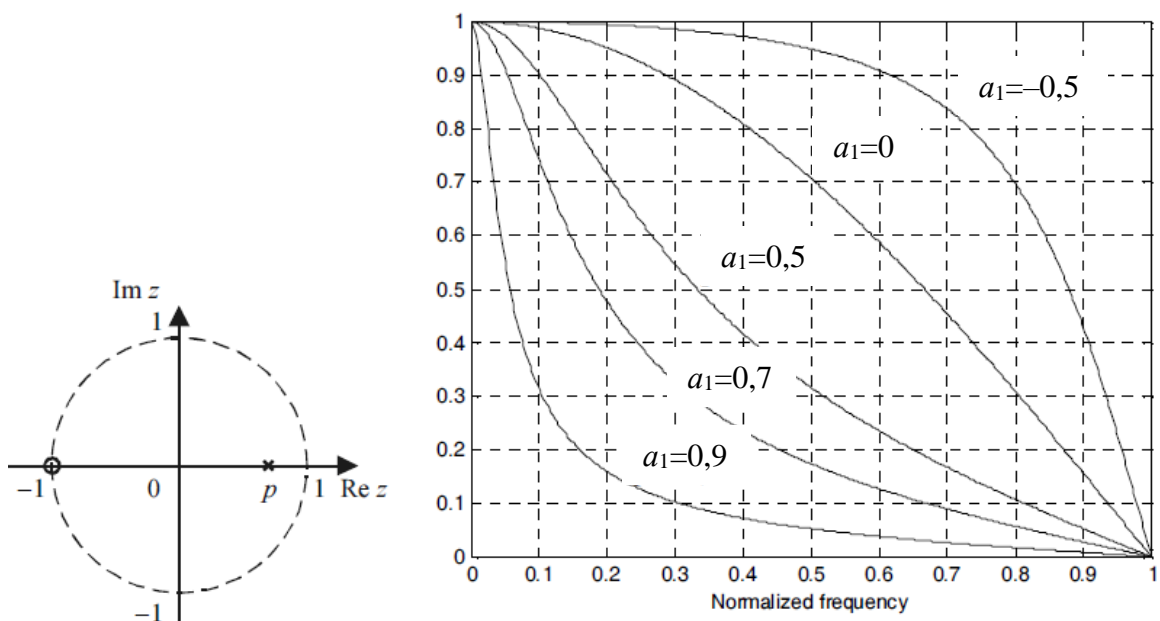


Рис. 11.8. Фільтр нижніх частот першого порядку: розташування нулів і полюсів (ліворуч) та АЧХ за різних значень параметру a_1 (праворуч)

Розглянемо властивості найпростіших фільтрів нижніх (ФНЧ) та верхніх (ФВЧ) частот першого порядку. Їхні описи легко отримати виходячи з того, що ФНЧ повинен мати нульове значення АЧХ на максимальній робочій

частоті (тобто на частоті Найквіста), а ФВЧ – на нульовій частоті. Звідси відразу ж випливає, що функція передачі ФНЧ першого порядку повинна мати нуль за $z = -1$:

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+a_1z^{-1}}, \quad |a_1| < 1 \quad (11.15)$$

Показана справа нерівність є наведеною раніше умовою стійкості системи першого порядку.

Параметр a_1 , який входить у вираз для передавальної функції (11.15), регулює смугу пропускання ФНЧ – чим ближче a_1 до одиниці, тим вужче смуга пропускання. На рис. 11.8 показано розташування нулів і полюсів ФНЧ, а також наведені графіки АЧХ фільтра, отримані за різних значеннях a_1 .

Аналогічний підхід дозволяє отримати функцію передачі найпростішого фільтра верхніх частот (ФВЧ): вона повинна мати нуль за $z = 1$, аби забезпечити нульовий коефіцієнт передачі на нульовій частоті. В результаті отримуємо наступне (постійний коефіцієнт, як і в попередньому випадку, обраний так, щоб пікове значення АЧХ дорівнювало одиниці):

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+a_1z^{-1}}, \quad |a_1| < 1 \quad (11.16)$$

Параметр a_1 , так само, як й у випадку ФНЧ, визначає ширину смуги пропускання фільтра. На рис. 11.9 показано розташування нулів і полюсів ФВЧ, а також наведені графіки АЧХ фільтра, отримані за різних значеннях a_1 .

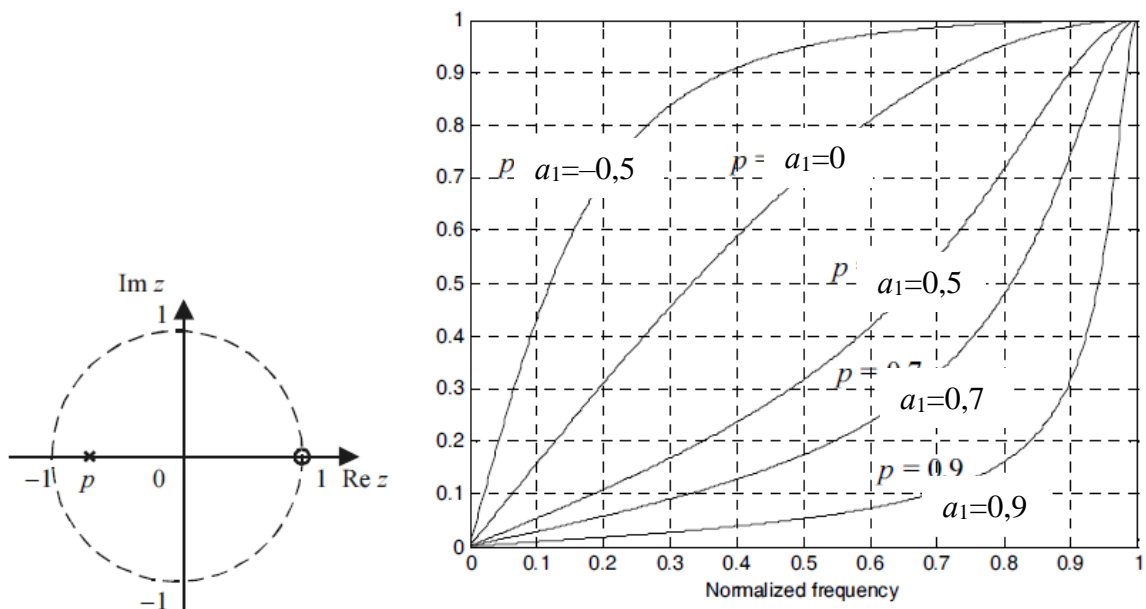


Рис. 11.9. Фільтр верхніх частот першого порядку: розташування нулів і полюсів (ліворуч) та АЧХ за різних значень параметру a_1 (праворуч)

Умови стійкості для систем другого порядку

У цьому розділі ми визначимо, за яких умов буде стійкою дискретна система другого порядку з передавальною функцією, яка представлена

формулою (11.12). Згідно з загальним критерієм (11.7), полюси функції передачі стійкого фільтра повинні бути за модулем менше одиниці. Тут слід окремо розглянути два випадки – дійсних та комплексних коренів знаменника. Характер коренів визначається знаком дискримінанту квадратного рівняння:

- $a_1^2 \geq 4a_2$ – корені дійсні;
- $a_1^2 < 4a_2$ – корені комплексні.

У комплексному випадку обидва полюси мають однакові модулі, які дорівнюють a_2 . Таким чином, область стійкості в цьому випадку має вигляд:

$$a_2 < 1, \quad (11.17)$$

а наведена вище умова щодо комплексного характеру полюсів дає обмеження щодо величини a_1 :

$$|a_1| < 2 \quad (11.18)$$

У випадку дійсних коренів потрібно розглянути значення обох полюсів, які визначаються за звичайною формулою коренів квадратного рівняння:

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (11.19)$$

Легко переконатися, що за будь-якого поєднання знаків та абсолютних величин коефіцієнтів a_1 і a_2 більший із двох модулів полюсів буде дорівнювати

$$|p_{1,2}|_{\max} = \frac{|a_1| + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (11.20)$$

Вирішення нерівності $|p_{1,2}|_{\max} < 1$ дає співвідношення:

$$a_2 > |a_1| - 1 \quad (11.21)$$

Об'єднуючи (11.17), (11.18) та (11.21), отримуємо

$$\begin{cases} |a_1| < 2 \\ |a_1| - 1 < a_2 < 1 \end{cases} \quad (11.22)$$

Графічно область стійкості фільтру другого порядку зображено на рис. 11.10. Пунктирною лінією на цьому малюнку зображено границю, яка розділяє області дійсних та комплексних полюсів передавальної функції.

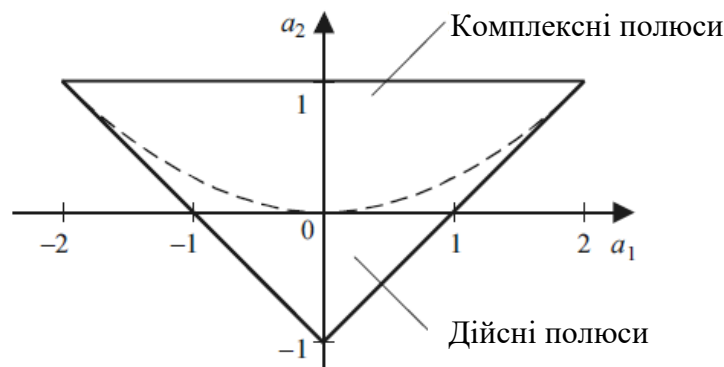


Рис. 11.10 – Область стійкості рекурсивного фільтра другого порядку.

Цифровий смуговий фільтр другого порядку

Дискретним смуговим фільтром, або дискретним резонатором другого порядку називається система, аналогічна за своїми властивостями коливальному (резонансному) контуру. Вона являє собою найпростіший смуговий фільтр. АЧХ резонатора має такі властивості:

- на нульовій частоті АЧХ дорівнює нулю: $\dot{K}(0) = 0$;
- на частоті Найквіста АЧХ дорівнює нулю: $\dot{K}(\omega_{\pi}/2) = 0$;
- на певній частоті ω_0 АЧХ досягає максимуму, цей максимум дорівнює одиниці: $|\dot{K}(\omega_0)| = 1$.

Існує багато систем, АЧХ яких задовольняє переліченим вимогам, проте всі ці системи мають різну "гостроту" максимуму, тобто різну смугу пропускання. Таким чином, смуга пропускання $\Delta\omega$, виміряна на заданому рівні АЧХ, разом із середньою частотою ω_0 смуги пропускання є основною, первинною характеристикою, яку повинен отримати резонатор в результаті розробки.

Користуючись тими ж самими методами, якими ми користувалися під час розгляду фільтрів низьких та верхніх частот, можна знайти формули, які пов'язують дійсні коефіцієнти фільтра b_1, b_2, a_1, a_2 , що входять у вираз для передавальної функції (11.12) з центральною частотою ω_0 та шириною смуги пропускання резонатора $\Delta\omega$. Ми не будемо виводити ці формули, просто вкажемо, що передавальна функція смугового фільтра з центральною частотою ω_0 має такий вигляд:

$$H(z) = \frac{1-a_2}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-(a_2+1)\cos(\omega_0 T)z^{-1}+a_2 z^{-2}} \quad (11.23)$$

Параметр a_2 регулює смугу пропускання резонатора. Щоб система була стабільною, необхідно виконання умови $|a_2| < 1$.

Тепер якісно розглянемо вплив величини a_2 на ширину смуги пропускання. За $a_2 = -1$ чисельник і знаменник передавальної функції (11.23) співпадають. Отже, передавальна функція в цьому випадку перетворюється на константу: $H(z) = 1$. Частотно-вибіркові властивості повністю втрачаються. Якщо ж значення a_2 тільки наближається до мінус одиниці, то ми отримуємо резонатор з широкою смугою пропускання.

За $a_2 = 1$ в передавальній функції з'являється полюс, який розташовується якраз на одиничному колі, через що АЧХ на певній частоті ω_0 буде дорівнювати нескінченності. Через це на всіх частотах, крім ω_0 , АЧХ буде дорівнювати нулю, але на частоті ω_0 ми отримуємо розкритину невизначеність, і якщо її розкрити, то ця невизначеність буде дорівнювати одиниці. Якщо ж значення a_2 лише наближається до одиниці, то ми отримуємо резонатор з дуже вузькою смугою пропускання.

В разі $a_2 = 0$ передатна функція отримує вигляд:

$$H(z) = -\frac{1}{2} \frac{1 - z^{-2}}{1 - \cos(\omega_0 T) z^{-1}}, \quad (11.24)$$

а смуга пропускання резонатора за $a_2 = 0$ стає ось такою:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi}{2T} = \frac{\omega_{\pi}}{4} \quad (11.25)$$

незалежно від значення центральної частоти ω_0 .

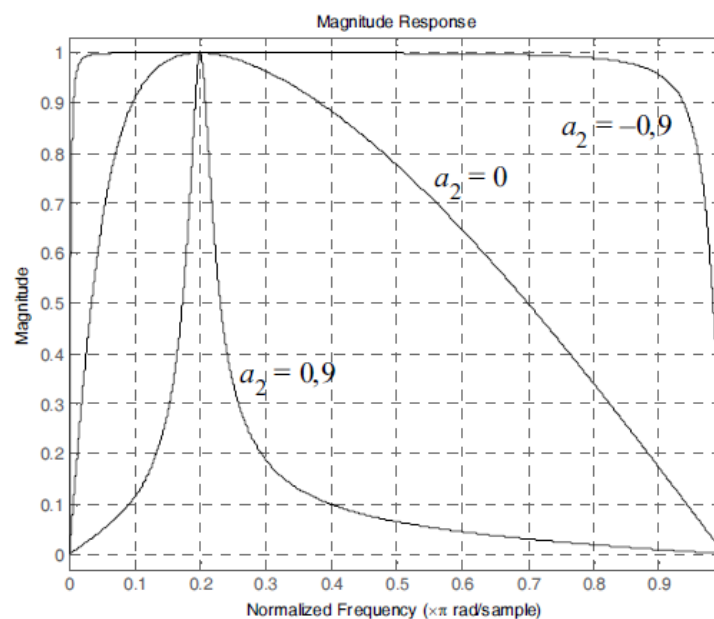


Рис. 11.11 – АЧХ резонатора другого порядку за різних значень a_2

Побудуємо графіки АЧХ резонатора з центральною частотою, яка для прикладу дорівнює 0,1 від частоти дискретизації (0,2 від частоти Найквіста) за трьох значень коефіцієнту a_2 : -0.9, 0 та 0.9 (рис 11.11). З графіків видно, що зі зростанням значення a_2 від -1 до 1 смуга пропускання резонатора поступово звужується.

Цифровий загороджувальний (режекторний) фільтр другого порядку

Дискретним режекторним фільтром (або просто «дискретним режектором») другого порядку називається система, протилежна до розглянутого раніше резонатора. Тобто вона являє собою найпростіший загороджувальний фільтр. АЧХ режектора має такі властивості:

- на нульовій частоті АЧХ дорівнює одиниці: $\dot{K}(0) = 1$;
- на частоті Найквіста АЧХ дорівнює одиниці: $\dot{K}(\omega_{\pi}/2) = 1$;
- на певній частоті ω_0 АЧХ має мінімум, який дорівнює нулю: $\dot{K}(\omega_0) = 0$.

Існує багато систем, АЧХ яких задовольняє переліченим вимогам, проте всі ці системи мають різну "гостроту" мінімуму, тобто різну смугу режекції (придушення, закриття, затримування). Таким чином, смуга затримування $\Delta\omega$, виміряна на заданому рівні АЧХ, разом із середньою частотою ω_0 смуги затримування є основною, первинною характеристикою, яку повинен отримати режектор в результаті розробки.

Користуючись тими ж самими методами, якими ми користувалися під час розгляду фільтрів низьких та верхніх частот, можна знайти формули, які пов'язують дійсні коефіцієнти фільтру b_1, b_2, a_1, a_2 , що входять у вираз для передавальної функції (11.12) з центральною частотою ω_0 та шириною смуги затримування режектора $\Delta\omega$. Ми не будемо виводити ці формули, просто вкажемо, що передавальна функція затримуючого фільтра з центральною частотою ω_0 має такий вигляд:

$$H(z) = \frac{a_2 + 1}{2} \frac{1 - 2\cos(\omega_0 T)z^{-1} + z^{-2}}{1 - (a_2 + 1)\cos(\omega_0 T)z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (11.26)$$

Параметр a_2 визначає ширину смуги затримування режектора. Щоб система була стабільною, необхідно виконання умови $|a_2| < 1$.

Міркування, аналогічні тим, що були наведені раніше, дозволяють показати, що в разі, коли $a_2 \rightarrow -1$ отримуємо режектор з широкою смугою затримки, а в разі $a_2 \rightarrow 1$ смуга затримування стає вузькою. В випадку, коли a_2

$= 0$ смуга затримування, так само як і у резонатора, дорівнює $\omega_d/4$ (на рівні половинної потужності) .

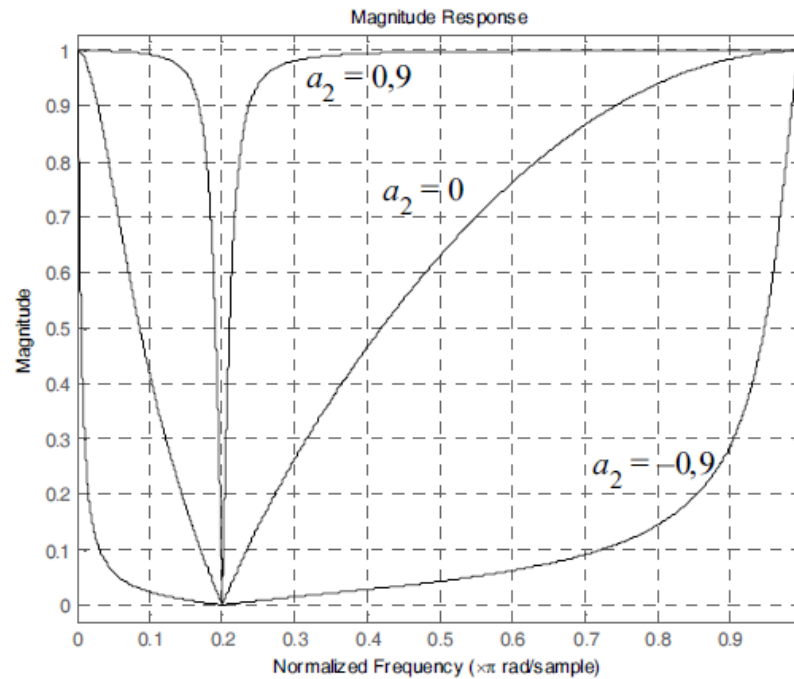


Рис. 11.12. АЧХ режектора другого порядку за різних значень a_2

Побудуємо графіки АЧХ режектора з тією ж центральною частотою та для тих самих значень a_2 , що й в розглянутого раніше резонатора. З графіків (рис. 11.12) видно, що зі зростанням значення a_2 від -1 до 1 смуга затримування режектора поступово звужується.

Контрольні питання за темою

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Особливості розрахунку амплітудно-частотної характеристики дискретної системи
2. Нулі та полюси передавальної функції дискретної системи.
3. Зв'язок амплітудно-частотної характеристики дискретної системи з розташуванням нулів та полюсів її передавальної функції.
4. Умова стійкості лінійних стаціонарних дискретних систем.
5. Поняття про нерекурсивні та рекурсивні цифрові фільтри.
6. Цифрові фільтри першого порядку.
7. Цифровий смуговий фільтр другого порядку.
8. Цифровий загороджувальний фільтр другого порядку.

Лекція № 12

Тема: Випадкові дискретні сигнали**Зміст**

Єдність опису дискретних сигналів та дискретних систем.....	2
Випадкові дискретні сигнали.....	5
Дискретний білий шум	6
Марківський випадковий сигнал.....	7
Контрольні питання на тему	9
Рівень модуля	9
Рівень курсу	9

Джерела:

1. Сергієнко А.Б. Цифрове оброблення сигналів. - 3-тє вид. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 768 с.: іл.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифрова обробка сигналів - М.: Техносфера, 2006. - 856с.

Єдність опису дискретних сигналів та дискретних систем

Опис дискретних систем та сигналів, як було показано в попередніх лекціях, виконується абсолютно однаковим способом. Як системи так і сигнали ми однаково описуємо за допомогою різницевих рівнянь, а z -перетворення сигналу та передавальна функція системи мають настільки близьку форму, що за виглядом формули неможливо зрозуміти, що це: опис сигналу або опис системи? Наприклад:

$$U(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{8}z^{-1}} \quad (12.1)$$

Розглянемо цю спільність, цю єдність в представленні сигналів та систем. Все, про що йтиметься у цьому розділі, вже розглядалося раніше. Зараз ми просто узагальнимо наші знання саме з погляду єдності основ теорії цифрової обробки.

По-перше, пригадаємо, що z -перетворення сигналу має вигляд:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (12.2)$$

Тут $x[n]$ – це відліки сигналу, а ступінь n комплексної змінної z (z^{-n}) відповідає номеру індексу даного відліку.

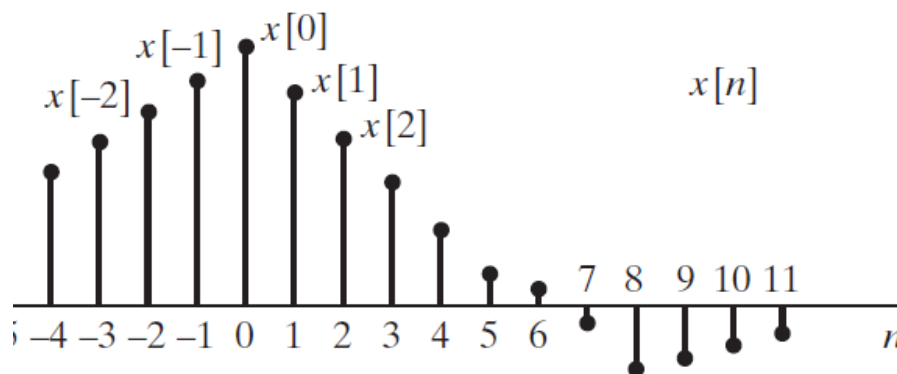


Рис. 12.1 Відліки сигналу

В якості примітки зазначимо, що, коли застосовують теорію z -перетворень до сигналів, то завжди мають на увазі, що сигнал є правостороннім, тобто відліки з негативними індексами дорівнюють нулю. Тим самим забезпечується збіжність ряду (12.2). Цього обмеження не існує, якщо використовувати для опису сигналу лише різницеві рівняння та не звертатися до теорії z -перетворень. Тим не менш, ми розуміємо, що реальний сигнал – не нескінченний, що він завжди має початок, і тоді цьому першому початковому відліку приписують нульовий індекс, а всі інші відліки в такому

випадку мають позитивний індекс. Це означає, що з практичної точки зору жодних обмежень немає: ми дійсно завжди можемо працювати виключно з правосторонніми сигналами. Якщо ж ми маємо справу не з одним, а з групою сигналів, то нульовий індекс присвоюється першому відліку самого «раннього» сигналу, і тоді всі інші відліки всіх сигналів автоматично стають виключно позитивними.

Тепер, якщо ж сигнал $x[n]$ має скінченну довжину M та починається з нульового індексу, то формула z -перетворення (12.2) перетворюється на таку:

$$X(z) = \sum_{m=0}^M x[m]z^{-m} \quad (12.3)$$

Можна подивитися на сигнал (12.3) й трохи інакше: давайте вважати, що сигнал $x[n]$ – це є реакція певної системи на одиничний імпульс, який надійшов на її вхід у нульовий момент часу. Іншими словами, $x[n]$ є ніщо інше як імпульсна характеристика певної СІХ-системи. Для того, аби передавальна функція дискретної СІХ-системи

$$H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad (12.4)$$

була ідентична сигналу $x[n]$ (12.3), необхідно та достатньо, аби коефіцієнти b_m передавальної функції (12.4), дорівнювали б відповідним відлікам сигналу:

$$b_m = x[m] \quad (12.5)$$

Про це ми говорили у попередній лекції (див. формулу 11.9). Таким чином, передавальна функція дискретної системи, яка в разі отримання на своєму вхід одиничного імпульсу генерує на своєму виході сигнал $x[n]$ повинна мати такий вигляд:

$$H(z) = \sum_{m=0}^M x[m]z^{-m} \quad (12.6)$$

Як бачимо, формули (12.3) та (12.6) – ідентичні! Проте, одна з них описує сигнал, а інша – систему, яка має імпульсну характеристику у вигляді цього сигналу!

Резюмуючи вище сказане, наведемо висновок: єдність представлення дискретних систем і сигналів визначається тим, що в основі опису систем використовується імпульсна характеристика, яка сама по собі є сигналом і описується так само, як і будь-який сигнал. З іншого боку, будь-який сигнал можна представити як імпульсну характеристику певної системи. Звідси й виникає єдність опису сигналів і систем.

Тепер розглянемо випадок нескінченного сигналу $x[n]$. Теоретично, такий сигнал можна представити у вигляді нескінченного ряду (12.2). На практиці, безперечно, так не роблять. На практиці діють наступним чином.

По-перше, до розгляду приймають лише такі нескінченні сигнали $x[n]$, які складаються з кінцевого числа геометричних прогресій. В такому разі ці геометричні прогресії розглядають як фундаментальні рішення. Геометричні прогресії дають нам полюси системи із зворотним зв'язком, для якого даний сигнал є імпульсною характеристикою. Це означає, що будь-який нескінченний сигнал, якщо він складається з кінцевого числа геометричних прогресій, можна розглядати як імпульсну характеристику певної системи. Тобто, якщо передавальна функція системи має вигляд:

$$H(z) = \frac{U_{\text{Вих}}(z)}{U_{\text{Вх}}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (12.7)$$

то імпульсна характеристика цієї системи, а, отже, і z -перетворення сигналу $x[n] = u_{\text{Вих}}[n]$ матиме вигляд:

$$X(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (12.8)$$

Це впливає з тієї простої обставини, що z -перетворення одиничного імпульсу дорівнює одиниці (формула 8.15 лекції 8), тобто в даному випадку z -перетворення вхідного сигналу $U_{\text{Вх}}(z) = 1$. Відповідно, формула (12.7) перетворюється на (12.8).

Зрозуміло, що не всі сигнали можна представити у вигляді суми скінченного числа геометричних прогресій. Теоретично, якщо поставити собі на меті розкласти абсолютно будь-який сигнал на суму геометричних прогресій, то в деяких випадках буде потрібно нескінченне число цих прогресій. Відповідно, система, яка могла б породити таку імпульсну характеристику, повинна мати нескінченну кількість полюсів, тобто у формулі (12.7) знаменник повинен бути нескінченним ($N = \infty$). Реалізувати такі системи неможливо, тому в разі необхідності розгляду подібних сигналів зазвичай вводять певні спрощення, які дозволяють звести сигнал до виду, коли його можна з деяким наближенням представити як суму лише скінченного числа геометричних прогресій. Тоді число M стає обмеженим, скінченним.

Випадкові дискретні сигнали

До цього часу ми розглядали виключно детерміновані дискретні сигнали. Тепер розглянемо випадкові сигнали.

Випадковий дискретний сигнал – це сигнал, значення відліків якого заздалегідь невідоме. Кожен відлік такого сигналу – це деяка випадкова величина, яка підпорядковується певному закону розподілу ймовірностей $F(x, n)$.

Згадаймо, що для кількісної характеристики розподілу ймовірностей безперервної випадкової величини X використовують ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X в якійсь конкретній своїй реалізації набуде значення меншого, ніж задане число x , тобто, ймовірність того, що $X < x$, де x – певна змінна, аргумент. Ймовірність цієї події залежить від x . Отже, ця ймовірність є функцією від x . Така функція називається *функцією розподілу* випадкової величини X і позначається як $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x) \quad (12.9)$$

В нашому випадку x – це ті можливі значення, які може прийняти відлік сигналу, наприклад 1V, 1.5V чи 2V. Однак, говорячи про випадковий *сигнал*, а не про випадкову *величину*, ми додаємо у функцію розподілу ще один параметр n – індекс відліку. Тим самим ми вказуємо, що в загальному випадку закон розподілу $F(x, n)$ кожного окремого відліку має свою власну функцію розподілу. Інакше кажучи, функція розподілу змінюється від відліку до відліку, тобто залежить від часу.

Більшість випадкових сигналів є *стаціонарними*. У стаціонарних сигналів закон розподілу не залежить від індексу, і тоді індекс n зі складу аргументів прибирають, а закон розподілу значень відліку набуває вигляду $F(x)$.

Згадаймо також, що замість функції розподілу часто застосовують функцію щільності розподілу, яку зазвичай позначають $p(x)$. Якщо сигнал нестаціонарний, функція щільності розподілу залежить від номеру відліку $p(x, n)$. Якщо сигнал стаціонарний, тоді – просто $p(x)$.

Крім того, випадкові сигнали характеризуються такими числовими параметрами як математичне очікування m_x та дисперсія D_x (або середньоквадратичне відхилення СКО σ_x , яке являє собою квадратний корінь зі значення дисперсії). Для стаціонарних процесів математичне очікування та дисперсія – постійні, вони однакові для всіх відліків сигналу. В випадку нестаціонарних сигналів параметри $m_x[n]$, $D_x[n]$ та $\sigma_x[n]$ залежать від номеру індексу відліку n .

Відліки одного сигналу, які йдуть один за одним, можуть бути абсолютно незалежними один від одного. Однак, найчастіше сусідні відліки дещо пов'язані один з одним, їх значення зазвичай більш-менш близькі. Ступінь зв'язку значень відліків сигналу, які йдуть один за одним, характеризується таким параметром, як кореляція. Рівень кореляції у стаціонарних процесів залежить від відстані між відліками: чим відліки ближчі один до одного, тим кореляція вища, чим далі – тим кореляція менша. Інакше кажучи, коефіцієнт кореляції залежить від відстані між відліками, через що для випадкового сигналу існує функція кореляції $R[m]$, де m – різниця між номерами індексів двох відліків.

Дискретний білий шум

В звичайному випадку для аналізу систем в якості вхідного сигналу, як ми добре знаємо, використовується одиничний імпульс. Під час розгляду випадкових процесів в якості стандартного вхідного сигналу використовується дискретний білий шум.

Законом розподілу стандартного дискретного білого шуму є нормальний закон розподілу з нульовим математичним очікуванням та СКВ $\sigma_x=1$.

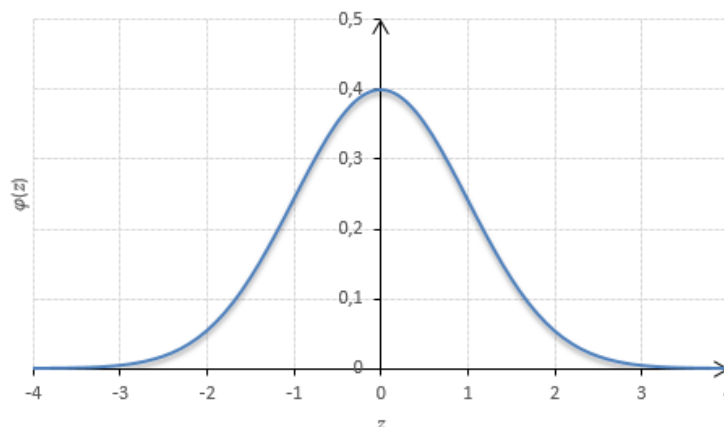


Рис. 12.2 Нормальний закон розподілу

Дискретний білий шум характеризується тим, що значення відліків цього сигналу є повністю незалежними один від одного. Тобто кореляційна функція цього сигналу

$$R[m] = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (12.10)$$

Марківський випадковий сигнал

Яким буде сигнал на виході системи, якщо на її вхід подати білий дискретний шум? Зрозуміло, сигнал на її виході також буде випадковим, однак, він набуде певних кореляційних властивостей, і його кореляційна функція вже не буде такою, як визначено в (12.10).

Якщо білий шум $v[n]$ пропустити через найпростішу систему зі зворотним зв'язком (рис. 12.3), то на виході отримаємо сигнал $x[n]$, який в теорії випадкових сигналів зветься марковський випадковий сигнал (на ім'я математика Маркова А.А., який вперше запропонував та досліджував такий тип випадкового дискретного сигналу). Розгляд властивостей цього сигналу не входить в завдання цього курсу, проте у багатьох курсах, які будуть прочитані надалі, використовується саме ця модель випадкового сигналу.

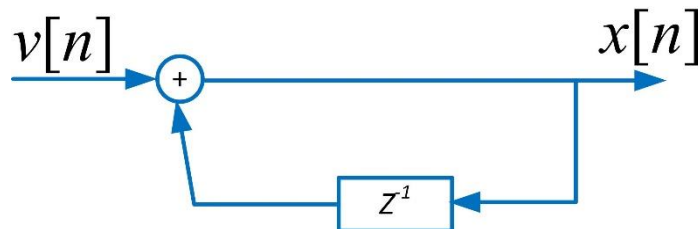


Рис. 12.3 Система, яка генерує марковський випадковий сигнал

Найпростішій моделі маркового сигналу відповідає різницеве рівняння:

$$x[n] = x[n-1] + v[n] \quad (12.11)$$

Кореляційні властивості сигналу змінюються, якщо змінювати коефіцієнт підсилення в лінії зворотного зв'язку. Дисперсія вихідного сигналу змінюється, якщо змінювати значення дисперсії (потужності) дискретного білого шуму на вході системи (рис 12.4). В загальному випадку різницеве рівняння для марковського процесу має вигляд:

$$x[n] = ax[n-1] + bv[n] \quad (12.12)$$

де a і b які визначають кореляційні (і, відповідно, – спектральні) властивості марківського сигналу, а також його дисперсію.

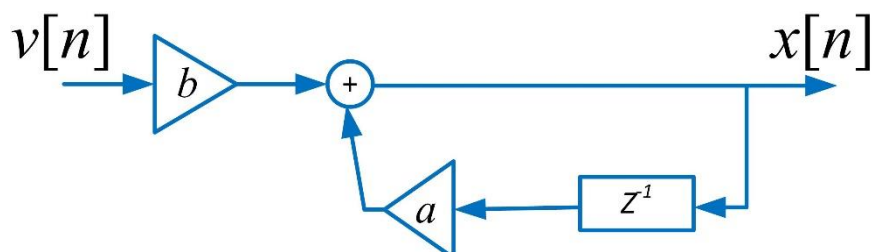


Рис. 12.4 Система, яка генерує марковський випадковий сигнал з заданими параметрами a і b

Наведена система є системою першого порядку зі зворотнім зв'язком. Якщо використовувати систему другого порядку, можна отримати марківський сигнал другого порядку, який ще називають процесом Юла. Для такого сигналу різницеве рівняння виглядає так:

$$x[n] = a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + bv[n] \quad (12.13)$$

Звичайно, в теорії випадкових сигналів розглядаються системи й більш високого порядку.

Контрольні питання на тему

Рівень модуля

Рівень курсу

1. Єдність опису дискретних сигналів та дискретних систем.
2. Випадкові дискретні сигнали.
3. Дискретний білий шум.
4. Марковський випадковий сигнал.