

Міністерство світи і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
фізико-технічний факультет
кафедра радіоелектронної автоматики

В.Б.Мазуренко

РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

Завдання на виконання курсової роботи

Методичні вказівки щодо виконання курсової роботи

Дніпро

2018

Представлено завдання на виконання курсової роботи з курсу «Радіотехнічні кола та сигнали», а також методичні вказівки щодо її виконання. Курсова робота виконується у відповідності до освітньо-професійної програми «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та освітньо-професійної програми «Кібербезпека». Для студентів фізико-технічного факультету ДНУ, що навчаються за спеціальностями 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» та 125 «Кібербезпека».

Укладач: доцент кафедри радіоелектронної автоматики фізико-технічного факультету Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара Мазуренко Валерій Борисович.

Завдання на курсову роботу з предмету «Радіотехнічні кола та сигнали»

Курсова робота складається з двох завдань. Номери варіантів для обох завдань однакові і наведені в таблиці 1.

Номери варіантів		Таблиця 1	
<i>Студент</i>	<i>Номер варіанту</i>	<i>Студент</i>	<i>Номер варіанту</i>
	1		11
	2		12
	3		13
	4		14
	5		15
	6		16
	7		17
	8		18
	9		19
	10		

Завдання №1

Дано три види періодичних детермінованих безперевних сигналів:

- a) Періодична послідовність прямокутних імпульсів з частотою f , амплітудою A та прогальністю q .
- b) Періодична послідовність пилкоподібних імпульсів з частотою f та амплітудою A .
- c) Періодична послідовність трикутних імпульсів з частотою f та амплітудою A .
- d) Меандр з частотою f та амплітудою A .

В таблиці 2 для кожного варіанту наведені параметри зазначених сигналів.

За даними таблиці 2 **необхідно**:

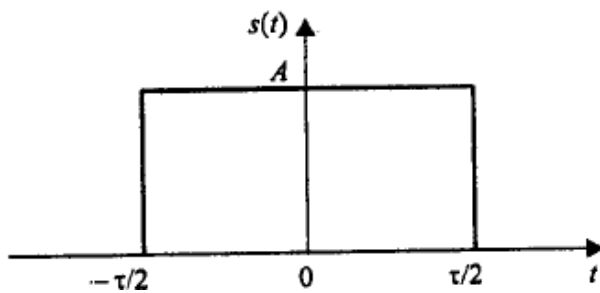
1. Отримати представлення сигналу у вигляді ряду Фур'є (в синусно-косинусній формі, дійсній формі та в комплексної формі) з розрахунком перших десяти членів ряду (частоти, амплітуди і фази перших десяти гармонік) для кожного з вказаних сигналів.
2. Для кожного з сигналів:
 - 1) Представити графік зміни сигналу за часом.
 - 2) Представити амплітудну та фазову спектральні діаграми (число гармонік не менше 10-ти).

№ вар	Прямокутний			Пилкоподібний		Трикутний		Меандр	
	f , Гц	A , В	q	f , Гц	A , В	f , Гц	A , В	f , Гц	A , В
1	1000	1	10	40000	1	0,3	1	250	1
2	0,1	30	5	8000	30	250	30	40000	30
3	1500	5	3	0,5	5	15000	5	100	5
4	12000	600	4	1	600	350	600	15000	600
5	1	80	10	15000	80	0,5	80	600	80
6	7000	10	5	0,3	10	600	10	12000	10
7	8000	120	3	600	120	40000	120	0,001	120
8	0,5	150	4	1500	150	3500	150	350	150
9	0,001	8	10	7000	8	100	8	35000	8
10	40000	50	5	0,1	50	1500	50	400	50
11	250	1000	3	2000	1000	1	1000	22000	1000
12	0,3	30	4	22000	30	2000	30	900	30
13	2000	75	10	100	75	22000	75	0,04	75
14	15000	15	5	5000	15	250	15	0,3	15
15	2500	300	3	400	300	0,001	300	17000	300
16	0,04	500	4	17000	500	70000	500	500	500
17	600	100	5	0,04	100	7000	100	50000	100
18	100	20	4	50000	20	0,1	20	2000	20
19	1700	50	10	800	50	0,2	50	30000	50

Завдання №2

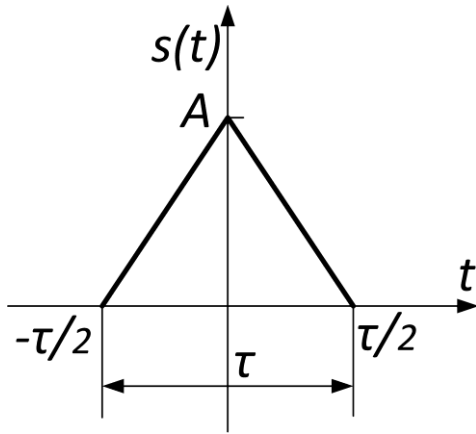
Дано три види одиночних відеоімпульсів:

- Прямокутний з амплітудою A і тривалістю τ :



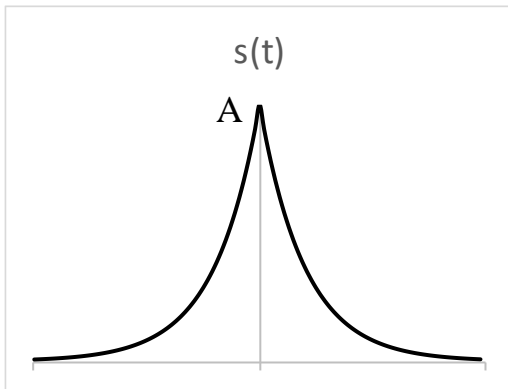
$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

- Трикутний з амплітудою A і тривалістю τ :



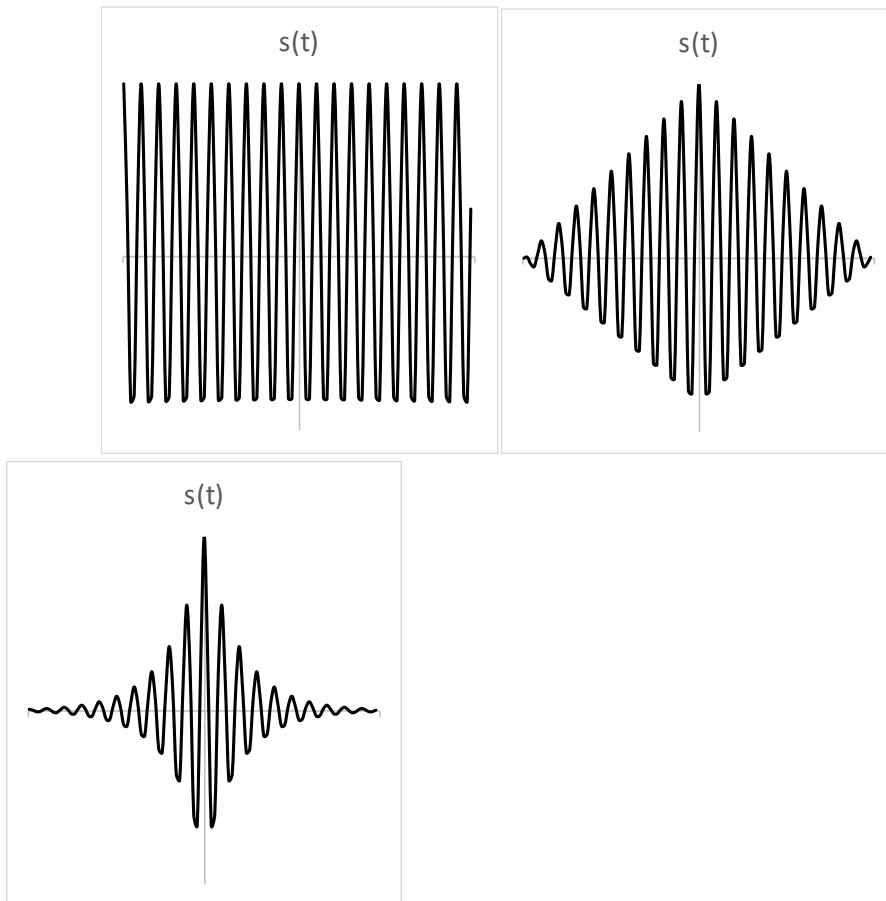
$$s(t) = \begin{cases} A \left[1 - \frac{|t|}{\tau/2} \right] & \text{при } |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \text{при } |t| > \tau/2 \end{cases}$$

- Двосторонній експоненційний імпульс з амплітудою A і постійною загасання a :



$$s(t) = Ae^{-a|t|}, \quad a > 0$$

Відповідні радіоімпульси отримані шляхом множення даних відеоімпульсів на гармонійний сигнал виду $g(t) = \cos \omega_0 t$:



Номери варіантів наведені в таблиці 1. В таблиці 3 для кожного варіанту наведені параметри сигналів.

За даними таблиці 3 **необхідно**:

1. Записати в аналітичному вигляді спектральну функцію для заданого відеоімпульсу, побудувати і представити у вигляді графіків амплітудний і фазовий спектри сигналу.

2. Записати в аналітичному вигляді спектральну функцію для заданого радіоімпульсу, побудувати і представити у вигляді графіку (для позитивних частот) амплітудний спектр сигналу.

Параметри сигналів

Таблиця 3

№ вар	<i>Прямокутний</i>		<i>Трикутний</i>		<i>Експоненційний</i>		<i>Гармонічний</i>
	A, В	τ, c	A, В	τ, c	A, В	$a, 1/c$	$f_0, кГц$
1	1	$1 \cdot 10^{-5}$	1	$1 \cdot 10^{-5}$	1	500000	1000
2	30	$5 \cdot 10^{-5}$	30	$5 \cdot 10^{-5}$	30	600000	1000
3	5	$3 \cdot 10^{-5}$	5	$3 \cdot 10^{-5}$	5	700000	1000
4	600	$4 \cdot 10^{-5}$	600	$4 \cdot 10^{-5}$	600	800000	1000
5	80	$10 \cdot 10^{-5}$	80	$10 \cdot 10^{-5}$	80	900000	1000
6	10	$5 \cdot 10^{-5}$	10	$5 \cdot 10^{-5}$	10	1000000	1000
7	120	$3 \cdot 10^{-5}$	120	$3 \cdot 10^{-5}$	120	1100000	1000
8	150	$4 \cdot 10^{-5}$	150	$4 \cdot 10^{-5}$	150	1200000	1000
9	8	$10 \cdot 10^{-5}$	8	$10 \cdot 10^{-5}$	8	1300000	1000
10	50	$5 \cdot 10^{-5}$	50	$5 \cdot 10^{-5}$	50	1400000	1000
11	1000	$3 \cdot 10^{-5}$	1000	$3 \cdot 10^{-5}$	1000	1500000	1000
12	30	$4 \cdot 10^{-5}$	30	$4 \cdot 10^{-5}$	30	1600000	1000

13	75	$10 \cdot 10^{-5}$	75	$10 \cdot 10^{-5}$	75	1700000	1000
14	15	$5 \cdot 10^{-5}$	15	$5 \cdot 10^{-5}$	15	1800000	1000
15	300	$3 \cdot 10^{-5}$	300	$3 \cdot 10^{-5}$	300	1900000	1000
16	500	$4 \cdot 10^{-5}$	500	$4 \cdot 10^{-5}$	500	2000000	1000
17	100	$5 \cdot 10^{-5}$	100	$5 \cdot 10^{-5}$	100	2100000	1000
18	20	$4 \cdot 10^{-5}$	20	$4 \cdot 10^{-5}$	20	2200000	1000
19	50	$1 \cdot 10^{-5}$	50	$1 \cdot 10^{-5}$	50	2300000	1000

Загальні вимоги до оформлення курсової роботи

1. Розрахунки можуть виконуватися у будь-якій зручній системі, зокрема: Matlab, Mathcad або Excel.

2. Курсова робота оформляється в друкованому або рукописному вигляді з дотриманням стандартів на оформлення текстових документів. Робота повинна мати титульний аркуш (зразок додається).

3. Робота повинна віддзеркалювати хід її виконання, містити розрахунки та формули, за якими проводиться розрахунок, а також включати необхідні пояснення і коментарі.

4. Звіт може бути оформлений безпосередньо в тій системі, в якій виконувалися розрахунки.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА РАДІОЕЛЕКТРОННОЇ АВТОМАТИКИ

КУРСОВА РОБОТА

З дисципліни «Радіотехнічні кола та сигнали»
НА ТЕМУ:

Спектральний аналіз періодичних та неперіодичних детермінованих безперервних сигналів

Виконавець:
Студент групи

Комісія з прийому курсової
роботи:

Дніпро 20__

**Методичні вказівки щодо виконання курсової роботи з предмету
«Радіотехнічні кола та сигнали»**

***Завдання №1 Представлення періодичних детермінованих
безперервних сигналів рядом Фур'є***

Періодичний сигнал $s(t)$ характеризується наступними параметрами: T – період повторення сигналу $s(t)$ в часі, $f = \frac{1}{T}$ – частота зміни сигналу $s(t)$, $\omega = 2\pi f$ – кругова частота (інші назви: циклічна частота або кутова частота) сигналу $s(t)$.

Будь-який періодичний сигнал $s(t)$ може бути розкладений в ряд Фур'є. Використовуються наступні форми представлення ряду Фур'є:

- синусно-косинусна форма,
- дійсна форма,
- комплексна форма.

Форми представлення періодичного сигналу рядом Фур'є

Синусно-косинусна форма

Синусно-косинусна форма представлення періодичного сигналу рядом Фур'є має наступний вигляд:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \quad (1.1)$$

Можна записати і по-іншому:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (1.2)$$

Тут $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота, відповідна періоду повторення сигналу, рівному T . Частоти $k\omega$, що входять у формулу й кратні частоті ω називаються гармоніками; гармоніки нумеруються відповідно до індексу k , частота називається k -ю гармонікою сигналу. Коливання з номерами $k = 2, 3, \dots$ зазвичай називають вищими гармоніками. Коефіцієнти ряду a_k і b_k розраховуються за формулами:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(k\omega t) dt \quad (1.3)$$

Константа a_0 розраховується за загальною формулою для a_k . Ця складова являє собою середнє значення сигналу на періоді:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt, \quad (1.4)$$

Границі інтегрування не обов'язково повинні бути такими, як в наведених вище формулах (від $-T/2$ до $T/2$). Інтегрування може проводитися з будь-якого інтервалу довжиною T – результат від цього ніяк не зміниться. Конкретні межі вибираються з міркувань зручності обчислень; наприклад, може виявитися зручніше виконувати інтегрування від 0 до T або від $-T$ до 0 .

Якщо $s(t)$ є парною функцією, то всі b_k дорівнюватимуть нулю і в формулі ряду Фур'є будуть присутні тільки косинусні складові. Якщо $s(t)$ є непарною функцією, дорівнювати нулю будуть, навпаки, косинусні коефіцієнти a_k і в формулі залишаться лише синусні складові.

Дійсна форма

Дійсна форма представлення періодичного сигналу рядом Фур'є має такий вигляд:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_k\right) \quad (1.5)$$

Або та ж сама формула з використанням кругової частоти ω :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (1.6)$$

Якщо $s(t)$ є парною функцією, то фази φ_k можуть приймати тільки значення 0 і π , а якщо $s(t)$ – функція непарна, то можливі значення для фази $\pm \pi/2$.

Коефіцієнти синусно-косинусної (a_k і b_k) і дійсної форм (амплітуда A_k та фаза φ_k) розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є пов'язані таким чином:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \text{tg} \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k}, \quad (1.7)$$

Складова $\frac{a_0}{2}$ дійсної форми представлення ряду Фур'є являє собою ту ж величину, що і в синусно-косинусній формі, тобто середнє значення сигналу на періоді. Його значення так само розраховується за формулою (1.4).

Комплексна форма

Комплексна форма представлення періодичного сигналу рядом Фур'є має наступний вигляд:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t} \quad (1.8)$$

Комплексні коефіцієнти \dot{C}_k розкладення Фур'є записуються наступним чином:

$$\dot{C}_k = |\dot{C}_k| e^{j\varphi_k} \quad (1.9)$$

та розраховуються за формулою:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (1.10)$$

Коефіцієнт \dot{C}_k – це комплексного число, яке характеризується його модулем $|\dot{C}_k|$ та фазою φ_k .

Комплексні коефіцієнти ряду пов'язані з амплітудами A_k , і фазами φ_k , що фігурують в дійсній формі записи ряду Фур'є, наступними співвідношеннями:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \quad (1.11)$$

$$|\dot{C}_k| = \frac{1}{2} A_k, \quad \arg(\dot{C}_k) = \varphi_k$$

Комплексні коефіцієнти ряду пов'язані з коефіцієнтами синусо-косинусної форми ряду Фур'є таким чином:

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} \quad (1.12)$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}(\dot{C}_k), \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(\dot{C}_k) \quad (1.13)$$

Спектральна діаграма періодичного сигналу

Сукупність амплітуд гармонік ряду Фур'є часто називають амплітудним спектром, а сукупність їх фаз – фазовим спектром.

Спектральною діаграмою періодичного сигналу прийнято називати графічне зображення коефіцієнтів ряду Фур'є для конкретного сигналу. Розрізняють амплітудні і фазові спектральні діаграми (рис. 1).

По горизонтальній осі в деякому масштабі відкладені частоти гармонік, а по вертикальній осі представлені їх амплітуди і початкові фази. Для графіків дискретних спектрів періодичних сигналів можливі два варіанти градування горизонтальній осі – в номерах гармонік, або в частотах (звичайних або кутових).

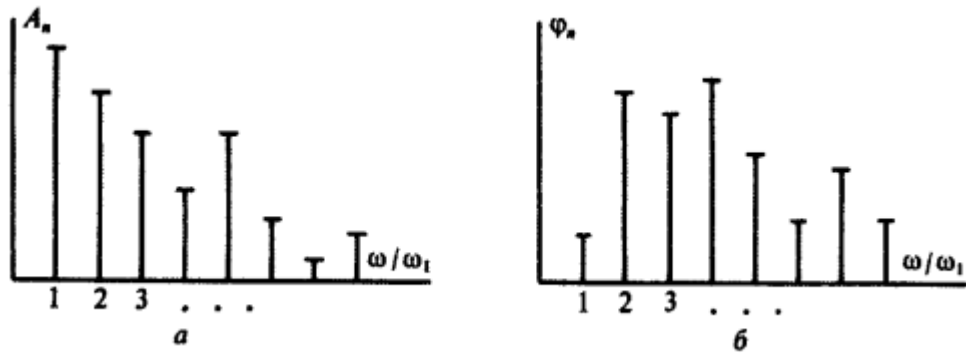


Рис. 1. Спектральні діаграми деякого періодичного сигналу:
a - амплітудна; *б* - фазова

Різні сигнали розрізняються перш за все швидкістю зменшення амплітудних коефіцієнтів з ростом номера гармонік.

Приклади розкладання періодичних сигналів в ряд Фур'є

Послідовність прямокутних імпульсів

Розглянемо послідовність прямокутних імпульсів з амплітудою A , тривалістю τ і періодом повторення T (рис. 2). Відношення періоду до тривалості імпульсів називають прогальністю послідовності імпульсів і позначають буквою q : $q = T/\tau$. Прийmemo, що початок відліку часу розташований в середині імпульсу.

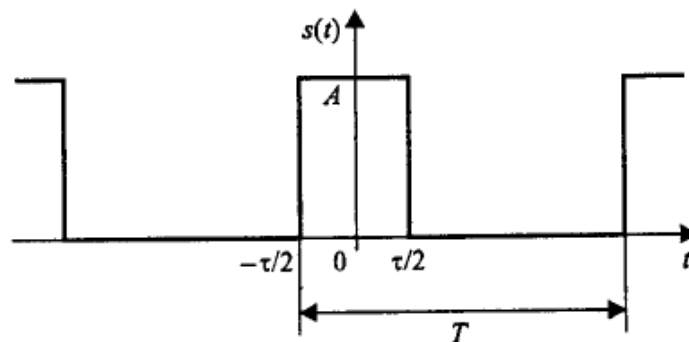


Рис. 2 Періодична послідовність прямокутних імпульсів

Даний сигнал є парною функцією, тому в синусно-косинусній формі ряду Фур'є будуть присутні лише косинусні складові a_k , рівні

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right) = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \quad (1.14)$$

Нульовий коефіцієнт ряду, тобто постійна складова сигналу визначається формулою:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} = \frac{A\tau}{T} \quad (1.15)$$

Таким чином, представлення послідовності прямокутних імпульсів у рядом Фур'є має вигляд:

$$s(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \quad (1.16)$$

Амплітуди гармонійних складових ряду залежать від номера гармоніки за законом $\frac{\sin x}{x}$ (рис. 3).

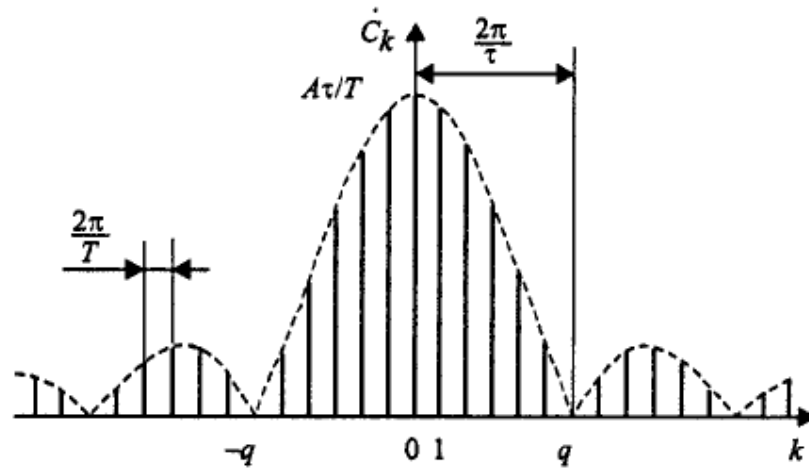


Рис. 3 Коефіцієнти ряду Фур'є для послідовності прямокутних імпульсів

Меандр

Важливим окремим випадком прямокутного сигналу є меандр – послідовність прямокутних імпульсів з прогальністю, що дорівнює двом, коли тривалості імпульсів і проміжків між ними стають рівними (рис. 4).

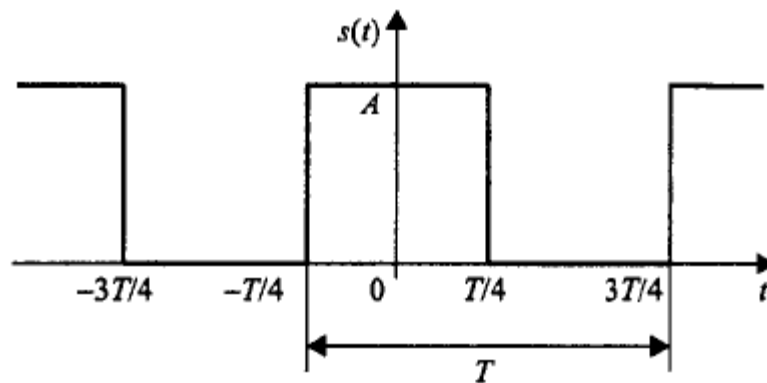


Рис. 4 Меандр

Підставивши $q = 2$ в формулу (1.14), отримаємо

$$a_k = A \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k/2} = \begin{cases} A, & k = 0 \\ 0, & k = 2m, \quad m \neq 0 \\ \frac{2A}{\pi k}, & k = 4m + 1 \\ -\frac{2A}{\pi k}, & k = 4m - 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

Тут m – довільне ціле число.

Таким чином, в спектрі меандру присутні тільки непарні косинусоїдальні гармоніки. Подання меандру у вигляді ряду Фур'є може бути записано таким чином:

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{3} \cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) - \dots \right) \quad (1.18)$$

Гармонійні складові, з яких складається меандр, мають амплітуди, обернено пропорційні номерами гармонік. Знаки складових чергуються.

Пилкоподібний сигнал

Пилкоподібний сигнал в межах періоду описується лінійною функцією:

$$s(t) = \frac{2A}{T}(t - kT), \quad \left(k - \frac{1}{2}\right)T < t \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)T \quad (1.19)$$

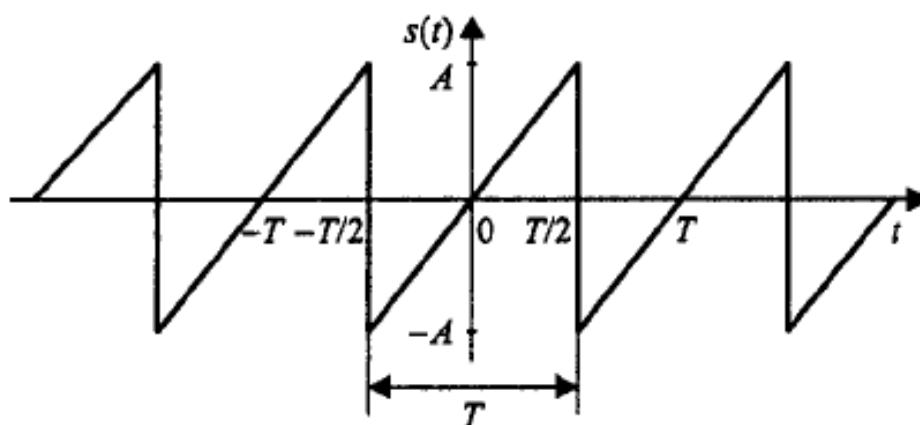


Рис. 5 Пилкоподібний сигнал

Даний сигнал є непарною функцією, тому його ряд Фур'є в синусно-косинусній формі буде містити тільки синусні складові:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt = -\frac{2A}{\pi k} (-1)^k \quad (1.20)$$

Сам ряд Фур'є для пилоподібного сигналу виглядає наступним чином:

$$s(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{4} \sin\left(4\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right) \quad (1.21)$$

Послідовність трикутних імпульсів

В послідовності трикутних імпульсів імпульси мають трикутну симетричну форму (рис. 6):

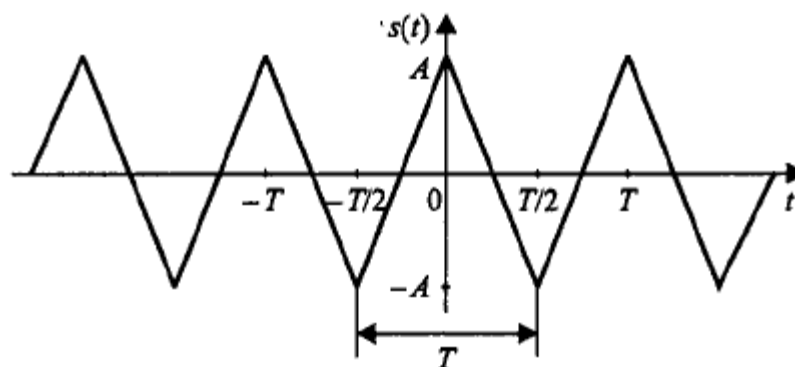


Рис. 6 Послідовність трикутних імпульсів

Сигнал є парною функцією, тому в синусно-косинусній формі ряду Фур'є будуть присутні тільки косинусні складові:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \left(1 - 4 \frac{|t|}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{4A}{(\pi k)^2} \left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ \frac{8A}{(\pi k)^2}, & k = 2m + 1 \end{cases} \quad (1.22)$$

Як і в разі меандру, тут присутні тільки непарні косинусоїдальні гармоніки. Сам ряд Фур'є має наступний вигляд:

$$s(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(5 \frac{2\pi}{T} t\right) + \dots \right) \quad (1.23)$$

Порядок виконання першого завдання

Послідовно для кожного виду сигналу виконати наступні дії.

1. Побудувати графік сигналу $s(t)$, як функцію миттєвого значення сигналу від часу. На графіку вказати основні числові параметри сигналу: амплітуду A , період T , тривалість імпульсу τ та таке інше. Приклад: рисунки 2-6.
2. На основі числових значень параметрів сигналу (амплітуда A , період T , тривалість імпульсу τ , частота f , кругова частота ω) розрахувати числові значення перших десяти коефіцієнтів a_k і b_k синусно-косинусної форми представлення ряду Фур'є за відповідними формулами (дивись формули (1.14),(1.15),(1.17),(1.20), (1.22) для різних типів сигналів).
3. На основі числових значень коефіцієнтів a_k і b_k записати представлення ряду Фур'є в синусно-косинусній формі для аналізованого сигналу, як це вказано в відповідній формулі (формули (1.16), (1.18), (1.21), (1.23) – для різних типів сигналів).
4. На основі числових значень коефіцієнтів a_k і b_k синусно-косинусної форми розрахувати числові значення перших десяти коефіцієнтів дійсної форми представлення ряду Фур'є (амплітуда A_k та фаза φ_k) за формулами (1.7).
5. На основі числових значень коефіцієнтів A_k та φ_k записати представлення ряду Фур'є в дійсній формі, як це вказано в формулі (1.5), або (1.6).
6. На основі числових значень коефіцієнтів A_k та φ_k побудувати амплітудну і фазові спектральні діаграми сигналу (дивись розділ «Спектральна діаграма періодичного сигналу»).

7. На основі числових значень коефіцієнтів A_k та φ_k дійсної форми розрахувати числові значення перших десяти коефіцієнтів комплексної форми представлення ряду Фур'є (модуль $|\dot{C}_k|$ та фаза φ_k) за формулами (1.11). Записати коефіцієнти \dot{C}_k у комплексному вигляді (дивись формулу (1.9)).
8. На основі числових значень коефіцієнтів \dot{C}_k записати представлення ряду Фур'є в комплексній формі, як це вказано в формулі (1.8)

Примітки:

1. При побудові ряду Фур'є та графіків число гармонік має бути не менш, ніж 10.
2. Для деяких сигналів ряд Фур'є в синусно-косинусній формі та дійсній формі може мати однаковий вигляд.

Завдання №2 Побудова спектральної функції неперіодичних сигналів

Перетворення Фур'є для сигналів

Перетворення Фур'є застосовується до **неперіодичних** сигналів.

Перетворення Фур'є ставить у відповідність сигналу $s(t)$, заданому в часі, його спектральну функцію $\dot{S}(\omega)$. При цьому здійснюється перехід з часової області в частотну. Перетворення Фур'є є взаємно-однозначним, тому представлення сигналу в частотній області (спектральна функція) містить рівно стільки ж інформації, скільки і сигнал, заданий в часовій області.

Формула прямого перетворення Фур'є:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Вираз
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

називається зворотним перетворенням Фур'є:

Якщо аналізований сигнал $s(t)$ – дійсна функція (електричні сигнали – виключно дійсні функції), то відповідна спектральна функція є «сполучено-симетричною» щодо нульової частоти. Це означає, що значення спектральної функції на частотах ω і $-\omega$ є комплексно-сполученими по відношенню один до одного:

$$\dot{S}(-\omega) = S^*(\omega) \quad (2.3)$$

Якщо $s(t)$ – парна функція, то, як і в разі ряду Фур'є, спектр буде чисто дійсним. Якщо, навпаки, $s(t)$ – функція непарна, то спектральна функція буде чисто уявною.

Модуль спектральної функції часто називають *амплітудним* спектром, а її аргумент – *фазовим* спектром. Легко показати, що для матеріального сигналу амплітудний спектр є парною, а фазовий – непарною функцією частоти:

$$\begin{aligned} |\dot{S}(-\omega)| &= |\dot{S}(\omega)| \\ \varphi_s(-\omega) &= -\varphi_s(\omega) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Окремі властивості перетворення Фур'є:

Лінійність

Перетворення Фур'є є лінійним інтегральним перетворенням. Сенс властивості лінійності можна сформулювати так: спектр суми дорівнює сумі спектрів. Говорячи математичною мовою, лінійна комбінація сигналів має спектр у вигляді такої ж (з тими ж коефіцієнтами) лінійної комбінації їх спектральних функцій:

$$\text{Якщо } s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \text{ , то } \dot{S}(\omega) = \alpha \dot{F}(\omega) + \beta \dot{G}(\omega) \quad (2.5)$$

Множення сигналу на гармонійну функцію

Помножимо сигнал $s(t)$, спектр якого $\dot{S}(\omega)$ нам відомий, на гармонійну функцію $g(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (рис.7):

$$f(t) = s(t)g(t) = s(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.6)$$

Знайдемо спектральну функцію $\dot{F}(\omega)$ нового сигналу $f(t)$, який є результатом множення сигналу $s(t)$ на гармонійну функцію:

$$\begin{aligned} \dot{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{e^{j\omega_0 t + j\varphi_0} + e^{-j\omega_0 t - j\varphi_0}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{j\varphi_0} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\varphi_0} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \dot{S}(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Спектр «роздвоївся» (ри. 8). Він розпався на дві складові вдвічі меншого рівня (множник 1/2), зміщені вправо ($\omega - \omega_0$) і вліво ($\omega + \omega_0$) по осі частот на величину ω_0 . Крім того, при кожній складовій є множник $e^{j\varphi_0}$, або $e^{-j\varphi_0}$, що враховує початкову фазу φ_0 гармонічного коливання.

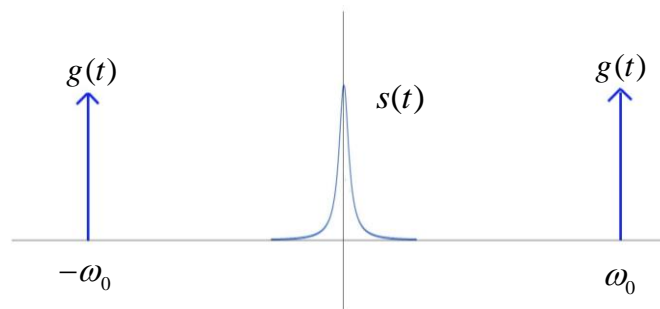


Рис. 7 Спектри сигналу $s(t)$ та гармонійного сигналу $g(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ до перемноження



Рис. 8 Спектр сигналу $f(t)$, який є результатом множення сигналу $s(t)$ на гармонійний сигнал $g(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Зазначимо, що радіоімпульси отримуються шляхом множення відповідних відеоімпульсів на гармонійний сигнал $g(t) = \cos \omega_0 t$:

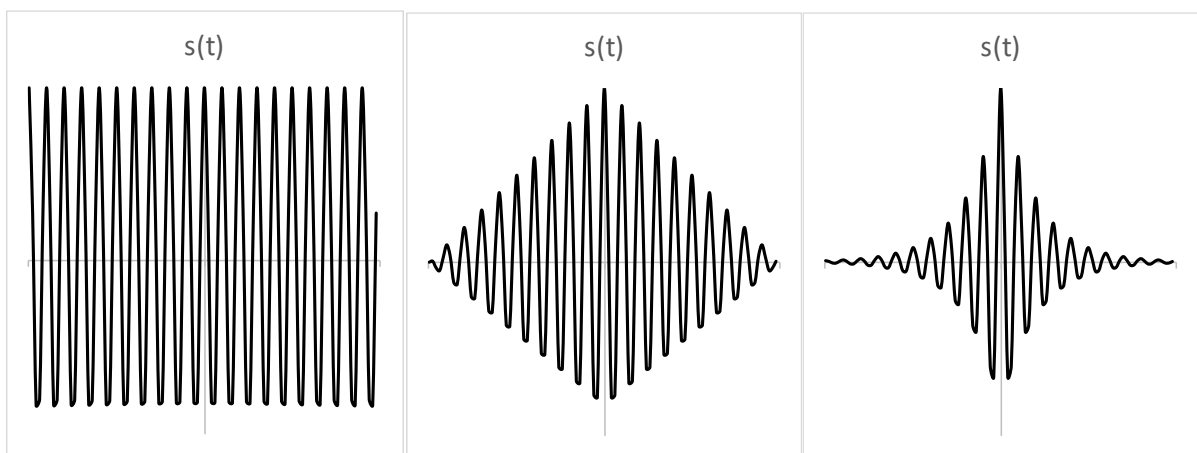


Рис. 9 Радіоімпульси

Приклад розрахунку перетворення Фур'є для прямокутного імпульсу

Розглянемо прямокутний імпульс, центрований відносно початку відліку часу (рис. 10):

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad (2.8)$$

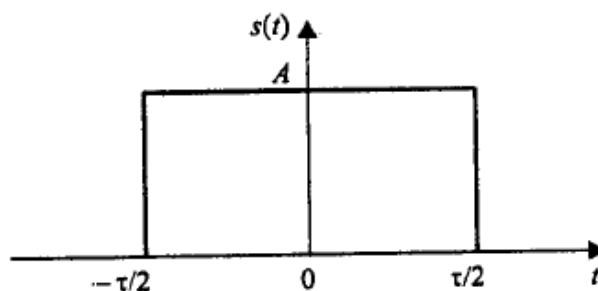


Рис. 10 Прямокутний імпульс

Обчислюємо спектральну функцію:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A}{\omega} \sin(\omega\tau/2) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \quad (2.9)$$

Таким чином спектральна функція прямокутного імпульсу має вигляд:

$$\dot{S}(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \quad (2.10)$$

Як видно, спектр являє собою функцію виду $\frac{\sin x}{x}$ (рис. 11). Амплітудний спектр має пелюстковий характер, і ширина пелюсток дорівнює $2\pi/\tau$, тобто обернено пропорційна тривалості імпульсу. Значення спектральної функції на нульовій частоті дорівнює площі імпульсу $A\tau$. Спектральна функція є дійсною, тому фазовий спектр приймає лише два значення 0 і π , в залежності від знаку функції $\frac{\sin x}{x}$. Значення π та $-\pi$ не розрізняються, проте для фазового спектра при $\omega > 0$ і $\omega < 0$ використовуються різні знаки з метою представити фазовий спектр у вигляді непарної функції.

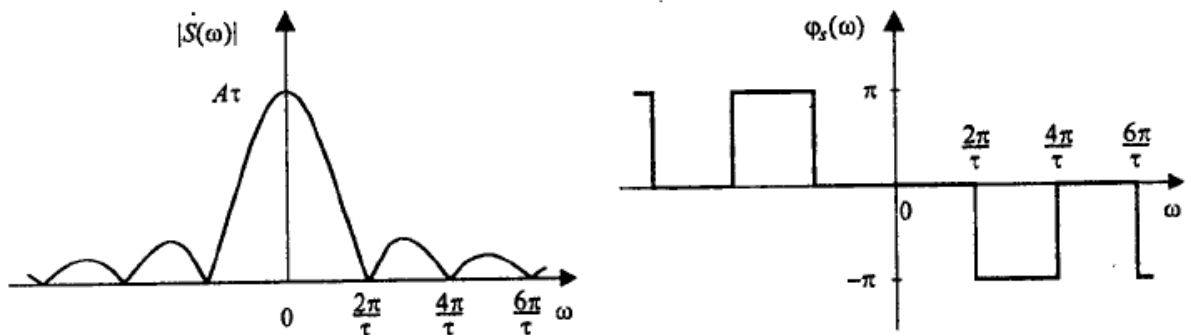
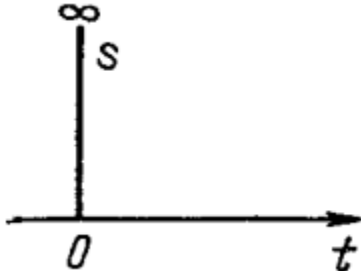
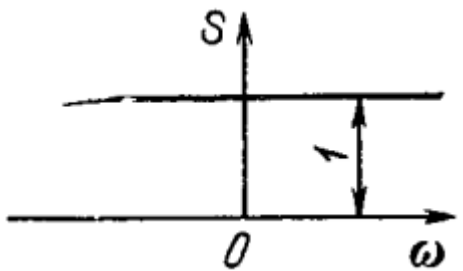
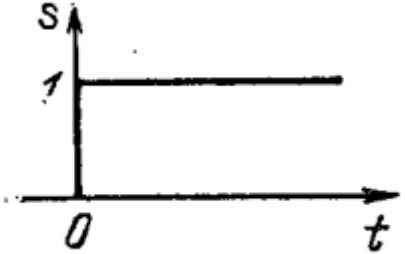
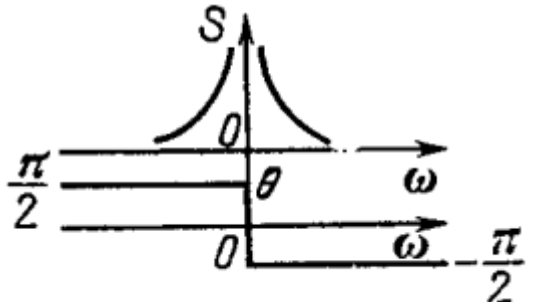
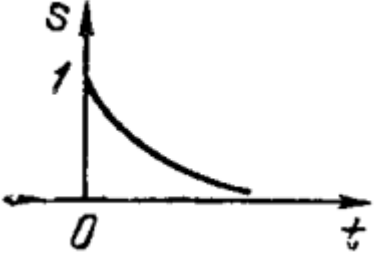
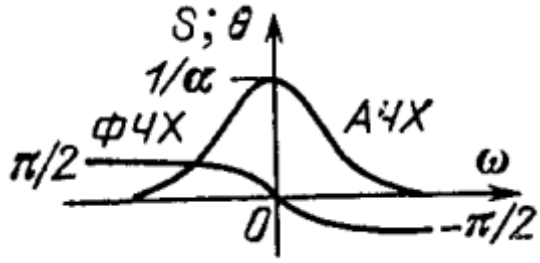
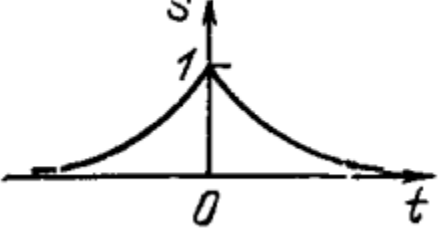
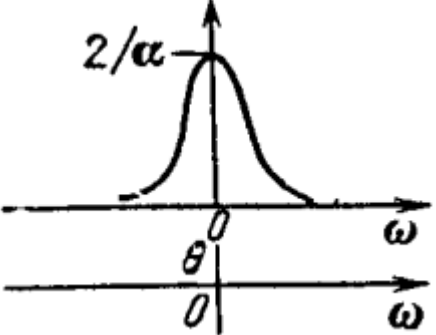
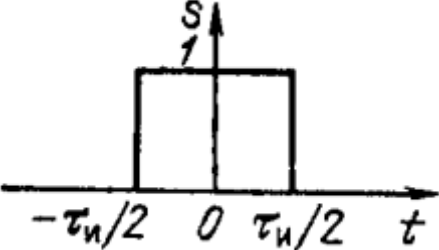
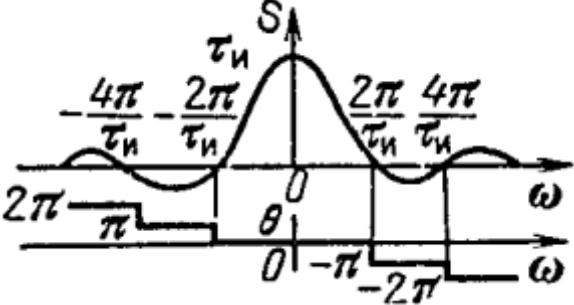
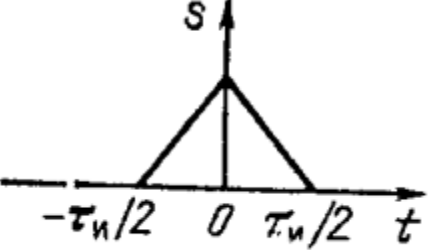
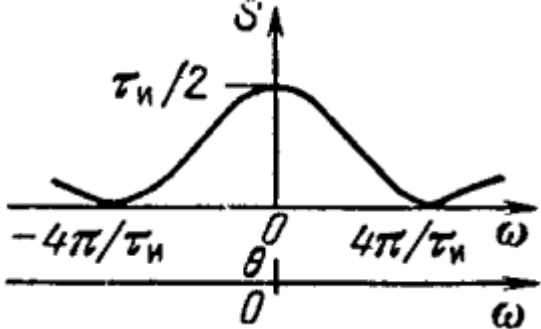
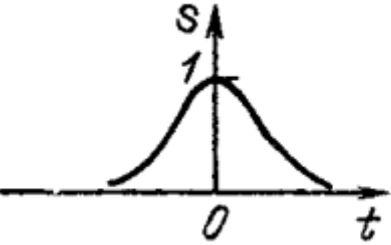
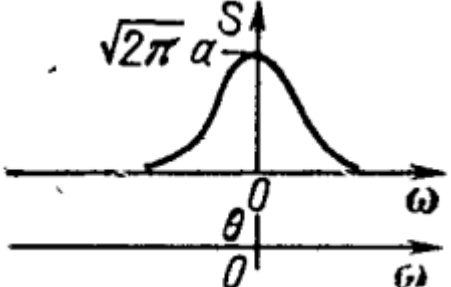
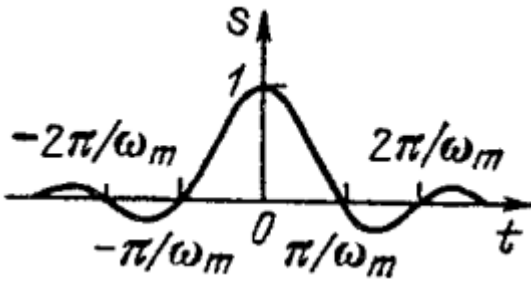
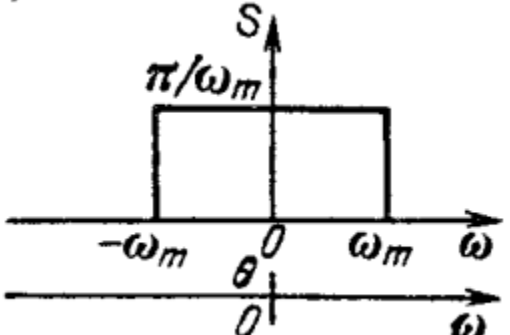
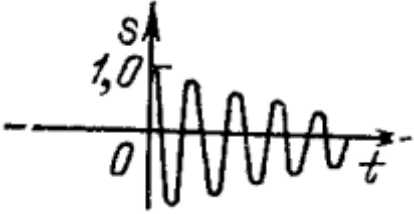
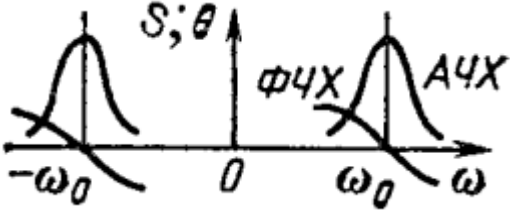


Рис. 11 Амплітудний (зліва) і фазовий (праворуч) спектри прямокутного імпульсу

Таблиця перетворення Фур'є для окремих видів сигналів

Сигнал		Спектральна функція	
	$\delta(t)$	$\dot{S}(\omega) = 1$	
	$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
	$s(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$ $a > 0$	$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$	

	$s(t) = e^{-a t }, \quad a > 0$	$\dot{S}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	
	$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq \tau_n/2 \\ 0 & \text{при } t > \tau_n/2 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \tau_n \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2}$	
	$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau/2} & \text{при } t \leq \tau_n/2 \\ 0 & \text{при } t > \tau_n/2 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \frac{\tau_n}{2} \left(\frac{\sin(\omega\tau_n/4)}{\omega\tau_n/4} \right)^2$	

	$s(t) = e^{-t^2/2a^2}$	$\dot{S}(\omega) = \sqrt{\pi} a e^{-a^2 \omega^2 / 2}$	
	$s(t) = \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t}$	$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} \pi \omega_m & \text{при } \omega < \omega_m \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_m \end{cases}$	
	$s(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos \omega_0 t, & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$	$\dot{S}(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	

Порядок виконання другого завдання

Послідовно для кожного виду сигналу виконати наступні дії.

1. Побудувати графік сигналу $s(t)$, як функцію миттєвого значення сигналу від часу. На графіку вказати основні числові параметри сигналу: амплітуду A , період T , тривалість імпульсу τ та таке інше. Приклад: рисунки 2-6.
2. На основі числових значень параметрів сигналу (амплітуда A , період T , тривалість імпульсу τ) та користуючись таблицею перетворення Фур'є для окремих видів сигналів для відповідного сигналу записати спектральну функцію сигналу (наприклад, як (2.10)). Задля врахування амплітуди сигналу разом з даними вказаної таблиці необхідно використовувати таку властивість перетворення Фур'є, як лінійність (2.5).
3. Користуючись отриманим виразом для спектральної функції сигналу побудувати і представити у вигляді графіків амплітудний і фазовий спектри сигналу (наприклад, як на рис.8). При виконанні цього пункту додатково використовуйте «Таблицю перетворення Фур'є для окремих видів сигналів».
4. На основі формули (2.7) записати в аналітичному вигляді спектральну функцію для відповідного радіоімпульсу. Радіоімпульси, як відомо, отримуються шляхом множення відповідних відеоімпульсів на гармонійний сигнал, тому для визначення спектральної функції радіоімпульсу на основі спектральної функції відеоімпульсу необхідно застосовувати властивість перетворення Фур'є, зазначену вище як «Множення сигналу на гармонійну функцію».
5. На основі графіків амплітудного спектру відповідного відеоімпульсу, отриманого в пункті 3, побудувати і представити у вигляді графіків (для позитивних частот) амплітудний спектр радіоімпульсу. Процес побудови ілюструється рисунками 7 і 8, та текстом розділу «Множення сигналу на гармонійну функцію» даних методичних вказівок. На графіку достатньо зобразити лише його частину для позитивних частот – тої частини, що на рисунку 8 обведена пунктирною лінією.

Джерела:

Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов
Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.