ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА
Фізико-технічний факультет
Кафедра механотроніки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ» (ЧАСТИНА 1)

Дніпро
2023

УДК 681.5
Алексєєнко С.В., Кадильникова Т.М. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія керування» (частина 1). Дніпро, 2023, 52 с.

Схвалено на засіданні кафедри механотроніки
(назва кафедри)
протокол № 8 від «12» 04 2023 року

Рекомендовано науково-методичною радою ФТФ для спеціальності 131 «Прикладна механіка»

протокол № 20 від «20» 04 2023 року

Зміст

Вступ…… 4
Практичне заняття №1…… 5
Практичне заняття №2……11
Практичне заняття №3……14
Практичне заняття №4……20
Практичне заняття №5……25
Практичне заняття №6……27
Практичне заняття №7……30
Практичне заняття №8……34
Практичне заняття №9……38
Практичне заняття №10……..41
Практичне заняття №11……..48
Список рекомендованої літератури ……..52

ВСТУП

Методичні вказівки розроблено відповідно до програми підготовки бакалаврів за напрямом «Прикладна механіка». Дисципліна «Теорія керування» відноситься до циклу професійної та практичної підготовки і є базовою у підготовці бакалаврів вказаного напряму.

Робота студентів над учбовим матеріалом дисципліни «Теорія керування» складається з наступних видів робіт: вивчення матеріалу по навчальних посібниках і підручниках; відвідування лекцій та практичних занять; написання модульних контрольних робіт; виконання та захист домашньої контрольної роботи; індивідуальні консультації; здача заліку та екзамену. При цьому значна частина часу відводиться на самостійну роботу.

Представлені матеріали мають за мету закріплення знань та набуття вміння застосовувати отримані в процесі вивчення дисципліни «Теорія керування» навички при розрахунках систем автоматичного регулювання. Надані теоретичні відомості сприятимуть засвоєнню матеріалу курсу та можуть бути використані під час виконання курсових проектів та робіт, запланованих у дисциплінах професійного циклу, та у дипломному проектуванні.

З цією метою у даному виданні надані методичні вказівки з виконання практичних робіт, наведені основні теоретичні положення з ілюстрацією на конкретних прикладах. Методичні вказівки містять завдання для практичних занять і контрольні питання для самопідготовки студентів.

Практичне заняття № 1.
Виконання найпростіших математичних обчислень в інтерактивному режимі роботи

Мета роботи: Набуття початкових навиків роботи з системою MatLab та виконання найпростіших обчислень шляхом подачі команд в командному вікні.

Опис змісту практичного заняття

В ході практичного зняття необхідно ввімкнути комп'ютер завантажити систему MatLab та познайомитись з робочим середовищем системи. Для успішного виконання завдань звернути особливу увагу на дії з комплексними числами, дії з матрицями інтегрування та диференціювання функцій.Дії з числами виконуються простим введенням з клавіатури арифметичних операцій або функцій. Результат виконаної дії присвоюється змінній, якщо вона вказана на початку операції.

Змінна повинна починатись з латинської літери. Система розрізняє заголовні і прописні літери. Наприклад, змінні a_1 та A_1 – це різні змінні. Якщо змінна не вказана, то система присвоює результат змінній ans. Дії з матрицями виконуються аналогічним чином. Матриця задається переліком значень у квадратних дужках. Розділовими знаками між елементами матриці служить знак пропуску, а між рядками матриці крапка з комою. Правила виконання дій з матрицями загальноприйняті.

Комплексні числа з'являються при виконання ряду математичних дій: добування кореня з від'ємного числа, відшукання логарифму від'ємного числа, обчислення арксинуса числа більше одиниці, відшуканні кореня алгебраїчного рівняння (квадратного, кубічного чи вищих порядків). Повна множина чисел – це множина, яка охоплює дійсні, уявні та комплексні числа. Деякі дії над дійсними числами призводять до уявних, чи комплексних чисел, і навпаки, дії над комплексними числами мають результатом дійсні числа. Тобто множина комплексних чисел є замкнутою множиною відносно усіх математичних дій. Виконання будь-якої математичної дії над будь яким комплексним числом приводить до іншого числа, яке входить в множину цих чисел.

Комплексне число Z – це число, яке складається з дійсної та уявної частин. Уявне число – будь-яке дійсне число помножене на уявну одиницю. Уявна одиниця це корінь квадратний з -1 (-1). Прийнято це число позначати літерою j. Форма запису комплексного числа $Z = a + bj$ називається алгебраїчною. Над комплексними числами виконують усі арифметичні дії, які можна виконувати над дійсними числами. В системі MatLab ці дії виконуються за допомогою тих же операторів, що дії над дійсними числами. Комплексні числа зображають у комплексній площині, осями якої є дійсна вісь

(горизонтальна). позначається літерою Re (реальна) та уявна вісь (вертикальна) позначається Im (image - уявна). Крім алгебраїчної форми використовується степенева форма запису комплексного числа. а саме z = r exp(iφ). Тут r – модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа, що обчислюються за формулами:
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = arctg\frac{y}{x}$.

Для знаходження аргументу та модуля комплексного числа в пакеті MatLab є спеціальні команди abs(z) та angle(z). Наступні дві команди дозволяють знайти дійсну та уявну частини комплексного числа, не залежно в якій формі воно записане. Це команди real(z) та imag(z). Система MatLab має також окрему команду, яка дозволяє знайти число комплексно спряжене до даного числа, а саме: conj(z). Комплексно спряженим од даного числа називають число, яке відрізняється від даного знаком (+ чи –) перед уявною частиною. Система MatLab дозволяє вирішувати алгебраїчні рівняння і системи рівнянь та знаходити їх корені. Оператор вирішення алгебраїчного рівняння має формат:

solve(‘f’),

вирішення системи рівнянь:
solve(‘f1’, ‘f2’, ..., ‘fn’)
чи solve(‘f1’, ‘f2’, ..., ‘fn’, x1, x2,...,xn),
де ‘f’, ‘f1’, ‘f2’ – рівняння, взяті в лапки, x1, x2,...,xn – невідомі змінні у рівнянні.

Приклад вирішення квадратного рівняння:

```
>> solve('x^2-4*x+11=0')
ans =
2+i*7^(1/2)
2-i*7^(1/2)
```

Тобто результат обчислень такий:

$$x_1 = 2 + j\sqrt{7};\ x_2 = 2 - j\sqrt{7}.$$

Крім розв’язання окремих рівнянь система MatLab вирішує також системи із декількох рівнянь як лінійних, так і нелінійних. Приклад команди вирішення нелінійної системи двох рівнянь:

```
>> syms x y; >>
z=solve('x^2-2*y+8=0', 'y+x-1=0', x, y)
```

Тут у другому рядку приведена команда вирішення системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 8 = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

В першому рядку команда syms x y описує x та y як символьні змінні, відносно яких записане рівняння. Результат розрахунку буде одержано у вигляді:

z =

x: [2x1 sym]
y: [2x1 sym]

Система MatLab вирішила систему рівнянь, але не видала явно результату на екран, вказавши, що результат знаходиться у змінних z.x, та z.y, які мають по два значення. Вивести значення можна командами:

```
>> z.x
ans =
-1-i*5^(1/2)
 -1+i*5^(1/2)
>> z.y
ans =
2+i*5^(1/2)
 2-i*5^(1/2)
```

Результат подано в радикалах. Система MatLab виконує також символьні розрахунки. Символьні розрахунки – це розрахунки, результатом яких є не число, а певний математичний вираз, функція. Наприклад, записуючи похідну з функції $f = x^2$, як $f' = 2x$ ми проводимо розрахунки в символьній формі. Система MatLab включає методи розрахунків у символьній формі, характерні для таких математичних систем, як MATEMATICA, MAPLE. Перед виконанням розрахунків у символьній формі потрібно вказати, які змінні слід вважати символьними. Символьна змінна задається оператором syms за яким слідує перелік змінних, розділених інтервалом. Цим оператором задано, що змінні є символьними і з ними можна виконувати математичні операції.

Оператор знаходження похідної має формат:

diff(f, x, n),

де f – функція, похідну якої потрібно знайти; x – аргумент (символьна змінна, вказувати не обов'язково, коли зрозуміло по якій змінній слід взяти похідну); n – порядок похідної (по замовчанню n=1).

Приклад знаходження похідної:

```
>> syms x
>> f=
x^2
>> diff(f, x)
ans = 2*x
```

У наведеному прикладі виведено такі дії:

- у першому рядку записано оператор визначення величини x, як символьної змінної;
- у другому – задана функція f=x2;
- третій та четвертий рядок – повідомлення системи;
- п'ятий рядок – завдання Обрахуйте похідну;
- наступні рядки – повідомлення системи MatLab, що змінній ans присвоєно значення похідної, а саме 2x.

Оператор знаходження невизначеного інтегралу має формат:

int(f),

результат інтегрування є математичний вираз, формула.

Оператор знаходження визначеного інтегралу має формат:

int(f, a, b),

де f – функція, підінтегральний вираз; a, b – границі інтегрування.

Якщо границі інтегрування вказані як символьні змінні, то інтеграл буде виведено в символьній формі, якщо вказати конкретні величини, то результатом інтегрування буде число (в деяких випадках записане в радикалах).

Приклади знаходження інтегралів.

Невизначений інтеграл: $\int x^2 \cos(x)dx$.

Порядок розрахунку:

```
>> syms x
>> f=x^2*cos(x);
>> int(f)
ans =
 x^2*sin(x)-2*sin(x)+2*x*cos(x)/
```

Визначений інтеграл:

$$\int_1^2 x^2\, dx.$$

Порядок обрахунку:

```
>> int(x^2, 1, 2)
ans = 7/3.
```

Визначений інтеграл у випадку, коли границі задані символьними величинами:

$$\int_a^b \frac{dx}{x}.$$

Порядок обрахунку:

```
>> syms x a b
>> f=1/x;
>> int(f, a, b)
ans =
 log(b)-log(a).
```

Пояснення до розрахунків: Оператор syms x a b у першому рядку задає символьні змінні. Оператор f=x^2*sin(x); чи f=1/x; задає функцію, яка буде підінтегральним виразом. Крапка з комою в кінці рядка команди позначає, що виводити результат на екран не потрібно. Оператор обрахунку невизначеного – int(f)) чи визначеного – int(f, a, b) інтегралу. Присвоєння змінній ans = log(b)-log(a) результату обчислення.

В таблиці 1.1 приведено основні формати подачі команд для виконання обчислень математичних функцій.

Таблиця 1.1

Приклади команд математичних функцій

Виконання дії	Оператор MatLab
Корінь квадратний 16	sqrt(16)
$\sqrt{-49}$	sqrt(-49)
Логарифм натуральний числа f	log(f)
Логарифм від'ємного числа	log(-6)
Логарифм при основі 3	log3(81)
Десятковий логарифм	log10(1000j)
Експонента Число е (2,72…) в кубі	exp(3)
Обчислення експоненти з уявної одиниці і логарифма з результату	exp(j), log(ans),
Синус кута 60^0	sind(60)
Синус кута вираженого в радіанах	sin(1,5)
Гіперболічний косинус з одиниці	cosh(1)
Арксинус 0,5 в градусах	asind(0.5)
Арксинус 3	asin(3)
Арктангенс числа 1, в градусах	atand(1)
Тангенс кута вираженого в радіанах	tan(2.5)
Тангенс 45^0	tand(45)

Завдання до практичного заняття

1.Здобути початкові навики користування системою MatLab у командному вікні системи MatLab. Для цього:

– виконати найпростіші арифметичні дії із дійсними числами та матрицями;

– засвоїти математичні дії з комплексними числами: задати п'ять комплексних чисел, записати їх в алгебраїчній та степеневій формах, зобразити числа на комплексній площині, розрахувати їх модулі та аргументи; виконати ряд математичних операцій та пояснити їх рисунками на комплексній площині;

– розв’язати алгебраїчні рівняння і зобразити корені рівнянь на комплексній площині;

2.Самостійно розв’яжіть приведене рівняння та розв’язок запишіть у заготовку звіту. Розрахуйте модуль та аргумент коренів рівняння та зобразіть їх на комплексній площині.

3.Під час підготовки до практичного заняття самостійно виконайте та запишіть розрахунок приведеного інтегралу.

Для закріплення матеріалу розрахуйте самостійно, наприклад такий інтеграл

$$\int_1^2 x^2\,dx.$$

4.Повторіть команди для інших, більш складних функцій.

Контрольні запитання.

1. Як відкрити систему MatLab?
2. Розшифруйте назву системи MatLab?
3. Які переваги надає використання матриць, як основних типів даних у системі MatLab?
4. Як задати просту змінну в системі MatLab?
5. У якій змінній записуються результати розрахунків, якщо її назва явно не вказана?
6. Як задати квадратну матрицю?
7. Що означає крапка з комою в кінці рядка команди?
8. Яке число називають комплексним?
9. Як запишіть комплексне число у системі MatLab?
10. Як Обрахуйте модуль та аргумент комплексного числа?
11. Зобразіть на рисунку суму та різницю двох комплексних чисел.
12. Запишіть формули переходу від алгебраїчної до степеневої форми комплексного числа.
13. Запишіть формули переходу від степеневої форми комплексного числа до алгебраїчної.
14. Запишіть команди обчислення тригонометричних функцій в градусах та радіанах.
15. Якому числу дорівнює логарифм від’ємного числа ?
16. Яке число називають комплексно спряженим?
17. Якою командою описується символьна змінна?
18. Який формат має оператор інтегрування?
19. Який формат має оператор диференціювання?
20. Як розрахувати невизначений та визначений інтеграли?

Практичне заняття № 2
Побудова моделей в пакеті SIMULINK, MatLab

Мета роботи: Набуття початкових навичок імітаційного моделювання систем управління в пакеті MatLab, SIMULINK.

Опис змісту практичного заняття

Імітаційне моделювання – один із основних методів вивчення систем керування під час їх розробки та аналізу ефективності експлуатації, при якому створюються моделі. Імітаційна модель – модель, яка відтворює процеси функціонування реальної системи. Імітаційне моделювання та вивчення роботи системи за допомогою моделі може здійснюватись як за допомогою числових так і аналогових ЕОМ. На числових ЕОМ імітаційні моделі відтворюють процеси в реальних системах на основі числових методів розв'язання рівнянь динаміки та структурних схем.

Структурна схема призначена для математичного опису та аналізу системи керування та подається у вигляді блоків (динамічних ланок), з'єднаних між собою.

Динамічна ланка – це умовно виділена складова частина системи керування, в якій проходять найпростіші перетворення сигналу. Кожній ланці відповідає певне диференційне рівняння, яке описує перетворення сигналу цією ланкою. Динамічна ланка зображується прямокутником в середині якого записують передаточну функцію

Передаточна функція – це відношення зображення вихідного сигналу до зображення вхідного сигналу. Метод розв'язання рівнянь за допомогою перетворення Лапласа носить назву: операційне числення. Зображення за Лапласом – це інтегральне перетворення, яке дозволяє спростити розв'язання диференційних рівнянь, привести їх розв'язок до розв'язку алгебраїчних рівнянь. Вивчається в курсі математики. Передаточна функція може бути задана, як відношення поліномів чисельника та знаменника. Змінна величина в поліні позначається оператором ***p***.

Ступінь полінома знаменника більша ніж степінь чисельника, визначає порядок передаточної функції та відповідає порядку диференційного рівняння. В меню пакету SIMULINK блок передаточної функції (TRANSFER FCN), представленої як відношення поліномів.

В системи MatLad використовується літера s (замість літери p, прийнятої у вітчизняних підручниках). Для введення конкретних значень поліномів чисельника та знаменника служить форма, в якій є вікна: Numerator coefficient та Denominator coefficient (рис.2.1).

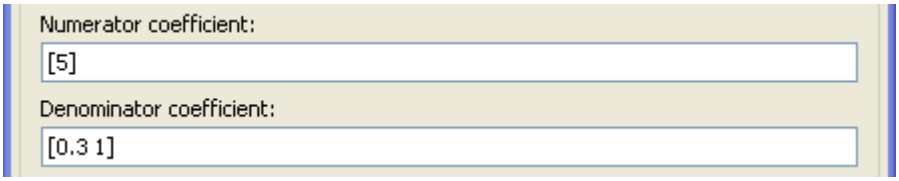


Рис.2.1. Вікно вводу параметрів передаточної функції

Значення коефіцієнтів поліному вводять в квадратних дужках починаючи з коефіцієнта при найвищій степені оператора ***p*** (***s***) послідовно до нульової степені. Якщо якийсь з коефіцієнтів відсутній (дорівнює нулю), то значення 0 (нуль) обов'язково потрібно вводити. Розділовими знаками між коефіцієнтами єінтервал. Ціла і дробова частки числа розділяються крапкою.

Перехідна характеристика – це графік зміни з часом вихідного сигналу при умові, що на вхід подано ступінчатий сигнал.

Ступінчатий сигнал – випробувальний сигнал, який дорівнює 0 до певного моменту часу t_0 і певному значенню U_1, починаючи з цього моменту часу. Якщо $t_0 = 0$, $U_1 = 1$, то такий сигнал називають одиничним сигналом. Як правило для дослідженя перехідних характеристик використовують одиничний сигнал. Графік ступінчатого сигналу має вигляд представлений на рис.2.2.

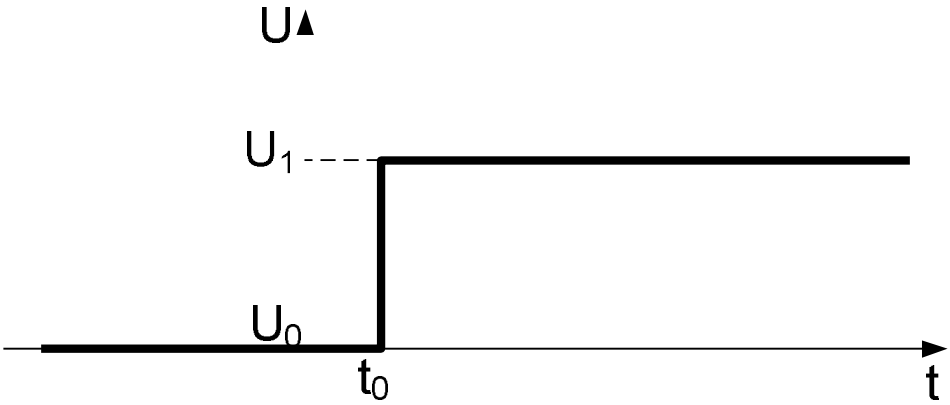


Рис.2.2. Графік ступінчатого сигналу

Ступінчатий сигнал подає, наприклад, звичайний вимикач. До моменту ввімкнення напруга на виході вимикача дорівнює нулю і після ввімкнення – постійній величині. В пакеті SIMULINK, середовища MatLab, ступінчатий сигнал задається блоком ***Step*** розділу вхідних сигналів, параметри якого є: початкове значення сигналу ***(Step time)*** – U_0, момент зміни сигналу ***(Intial value)*** – t_0 та кінцеве значення (***Final value)*** – U_1. А разі $U_1=1$ сигнал називають «одиничним».

Завдання до практичного заняття

1. Створити текстовий файл, вказати номер та вихідні дані варіанту практичного завдання.
2. Завантажити пакет MatLab та систему моделювання SIMULINK і відкрити вікнопобудови моделі.
3. Побудувати модель в пакеті імітаційного моделювання

SIMULINK, в яку входить ступінчатий вхідний сигнал, одна з найпростіших динамічних ланок, наприклад аперіодична, та осцилограф – прилад, який відображає графік сигналу.

4. Задати параметри досліджуваної динамічної ланки, згідно варіанту завдання, та виконати імітаційне моделювання.
5. Вивести графік зміни з часом вихідного сигналу динамічної ланки, її перехідну характеристику.
6. Проаналізуйте сигнал на виході аперіодичної ланки у вікні осцилографа.
7. Перевести сигнал у вікно ***Figures*** відредагувати та скопіювати його у звіті практичної роботи.
8. Вивести одночасно графіки зміни з часом вхідного ступінчатого сигналу та вихідного сигналу аперіодичної ланки (перехідну характеристику) в двох вікнах осцилографа.
9. Вивести перехідну характеристику коливальної ланки. Для цього достатньо в передаточній функції існуючої моделі ввести коефіцієнти коливальної ланки згідно до варіанту завдання.
10. Результати моделювання, а саме створені моделі та одержані перехідні характеристики скопіювати у звіт.

Контрольні запитання

1. Які системи називаються системами керування?
2. Охарактеризуйте головні принципи автоматичного керування.
3. Накресліть загальну схему системи керування та поясніть всі елементи схеми.
4. У чому сутність керування за збуренням?
5. У чому сутність керування за відхиленням?
6. Назвіть основні класи систем керування.
7. Які системи відносять до слідкуючих? Наведіть приклади.
8. Які системи відносять до систем стабілізації? Наведіть приклади.
9. Які системи відносять до систем програмного управління?
10. Які динамічні ланки ви знаєте? Запишіть передатні функції.
11. Як перейти до режиму редагування блока моделі?
12. Як зберегти створену модель системи керування у файлі?
13. Як перейти до режиму імітаційного моделювання?
14. Як вивести результати моделювання у два вікна, в одне повне вікно?
15. Як установити та змінити проміжок часу інтегрування?

Практичне заняття № 3
Визначення часових характеристик системи керування класичним методом

Мета роботи: Дослідити процес отримання часової характеристики системи керування при відомому математичному описі її динаміки. Набути вмінь рішення диференціальних рівнянь за допомогою класичного методу.

Опис змісту практичного заняття

Вихідний сигнал динамічного елемента буде по різному відгукуватися на різні сигнали на вході цього елемента. Зовнішні впливи, які діють на систему керування, є досить різноманітними. Тому при дослідженні систем керування використовують типові вхідні сигнали і вивчають реакцію системи на них. При цьому, типові (стандартні) впливи мають суттєві параметри реальних впливів і збурень. Зазвичай до типових вхідних впливів відносять: східчастий (ступінчастий) вхідний сигнал, імпульсний вхідний сигнал, гармонічний вхідний сигнал, лінійно зростаючий сигнал і інші.

Система керування в ході свого функціонування може випробовати впливи двох виглядів: внутрішні й зовнішні. Внутрішні впливи виникають в результаті взаємодії елементів системи між собою. Зовнішні впливи виникають поза системою керування і можуть передаватися в систему як через об’єкт керування, так і через будь-який інший елемент системи.

Ці впливи являють собою випадкові функції часу, тому функціонування конкретних систем описуються математичними виразами, що дає можливість уніфікувати розрахунки різних систем, а також проводити порівняння їхніх властивостей. Графічне зображення впливів представлено на рис. 3.1.

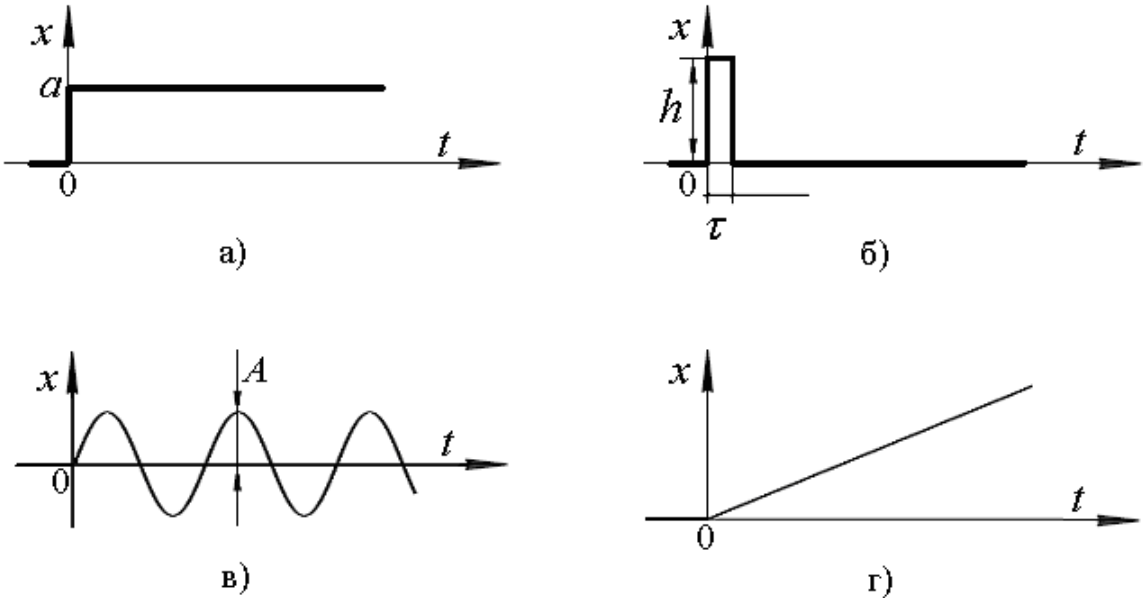


Рис.3.1. Типові впливи на систему керування

Східчастий вплив (рис.3.1, а) – це вплив, що миттєво зростає від нуля до деякого значення і далі залишається постійним, аналітично записується у вигляді:

$$x(t) = \begin{cases} 0, t < 0\,; \\ a, t \geq 0. \end{cases}$$

Найбільш зручно використовувати вплив, у якого $a = 1$. Його називають одиничним східчастим впливом і позначають $1(t)$. Аналітично цей вплив має вигляд:

$$1(t) = \begin{cases} 0, t < 0\,; \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$$

Якщо східчастий вплив виникає в момент часу $t = t_1$, то використовують позначення вигляду $1\ (t - t_1)$.

Імпульсний вплив (рис.3.1, б) – це вплив, що являє собою одиничний імпульс прямокутної форми, що має досить велику висоту h і істотно меншу в порівнянні з інерційністю системи тривалість. Найбільш часто використовують одиничний імпульсний вплив, що описується дельта-функцією:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0; \\ 0, t \neq 0, \end{cases}$$

де $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.$

Тому $\delta(t)$ можна розглядати як імпульс, що має нескінченно велику висоту і нескінченно малу тривалість, площа якого дорівнює 1.

Основна властивість $\delta(t)$ виражається співвідношенням:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta(t - t_1)\, dt = y(t_1),$$

яке означає, що неодинична імпульсна функція $y\ (t)\ \delta(t)\ (t - t_1)$, отримана як добуток довільної функції $y(t)$ на дельта-функцію, існує тільки в момент $t = t_1$ і що площа її дорівнює значенню функції $y(t)$ в точці t_1.

Гармонійний вплив (рис.3.1, в) – це вплив, що описується гармонічною функцією:

$$x(t) = 1(t) \cdot A \cdot \sin(\omega t),$$

де А- амплітуда, ω - частота зміни.

Лінійний вплив (рис.3.1, г) – це вплив, що описується лінійною функцією:

$$x(t) = 1(t) \cdot a \cdot t.$$

Тут коефіцієнт a характеризує швидкість наростання впливу $x(t)$.

Будь-яка система керування у процесі роботи може перебувати в двох якісно відмінних режимах: статичному і динамічному. Статичним режимом називають стан системи, при якому керована величина $y(t)$ не змінюється в часі, тобто $y(t) = \text{const}$. Цей режим може мати місце лише тоді, коли вхідні впливи постійні в часі, а система перебуває в рівноважному стані. Динамічним режимом називають стан системи, при якому величина $y(t)$ змінюється в часі.

Динамічні режими мають місце, коли в системі після нанесення зовнішніх впливів відбуваються процеси встановлення заданого стану, тобто здійснюється керування. Вони, у свою чергу, підрозділяються на несталі й сталі режими. Несталі динамічні режими мають місце відразу після зміни зовнішніх впливів. Процеси, що відбуваються при цьому в системі, називаються перехідними процесами. Сталі динамічні режими роботи наступають після закінчення перехідних процесів і характеризуються тим, що керована величина системи починає змінюватися в часі за таким же законом, як і задаючий вплив.

Найбільшого поширення набули ступінчастий та імпульсний сигнали, що подають на вхід досліджуваного об'єкта. Ступінчастим впливом називають миттєву зміну вхідної величини від одного постійного значення досліджуваної системи до іншого.

Процес керування, що протікає в лінійній (або лінеаризованій) системі, може бути визначений шляхом рішення диференціального рівняння даної системи при відомому вхідному впливі і заданих початкових умовах. Аналітичним виразом перехідної характеристики буде рішення рівняння динаміки, що описує систему.

Перехідна характеристика містить в собі багато інформації. Це інформація про характер перехідного процесу, його швидкодію. Також можна визначити початкове і кінцеве значення перехідного процесу. Порівняння отриманої кривої перехідного процесу з кривими типових ланок дозволить віднести досліджуваний процес до тієї чи іншої елементарної ланки стандартного типу, динамічні властивості якої заздалегідь відомі. Це суттєво спрощує дослідження системи.

Більшість динамічних моделей систем керування, які розглядають, базуються на лінійних або лінеаризованих рівняннях динаміки і являють собою звичайні диференціальні рівняння з правою частиною. Тому для побудови перехідних характеристик вирішують звичайне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, яке в загальному випадку має вид:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_m u(t), \qquad (3.1)$$

де $u\ (t\ )$ і $y(t)$ – відповідно, вхідні і вихідні параметри, що змінюються в часі; a_i , $b_j\,(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ - постійні коефіцієнти; $n, m,$ – відповідно, кількість вхідних і вихідних параметрів.

Для розв'язання рівняння (3.1) необхідно завдання вхідної величини $u(t)$ та n початкових умов, які складаються із значень вихідних параметрів і їх похідних при $t_0 = 0$.

При порівнянні властивостей систем керування і їхніх елементів між собою зручно надавати рівняння в стандартній формі. При цьому використовують наступні правила:

– вихідний параметр і всі його похідні записують у лівій частині рівняння, а всі інші члени – у правій;

– коефіцієнт при вихідному параметрі шляхом тотожних перетворень роблять рівним одиниці;

– якщо в правій частині є похідні, то члени, що містять певний вихідний параметр і його похідні, поєднують в одну групу, а коефіцієнт при цьому параметрі виносять за дужки.

Якщо ж рівняння вигляду (3.1) не містить яких-ось коефіцієнтів, то в стандартній формі одиниці повинен рівнятися коефіцієнт при похідній, що має найменший порядок.

Загальне рішення диференціального рівняння (3.1) представляється у вигляді: $y\ (t) = y_{віл}\ (t) + y_{вим}\ (t)$, (3.2)

де $y_{віл}\ (t)$ – вільна складова рішення;

$j\ _{вим}\ (t)$ – вимушена складова рішення.

Якщо в однорідному диференціальному рівнянні (3.1) права частина дорівнює нулю, що означає відсутність зовнішнього впливу на систему. Тому вирішення однорідного диференціального рівняння буде визначати закон зміни вихідної змінної в часі за відсутності зовнішніх впливів, який визначатиметься тільки параметрами і властивостями самоїсистеми, а також початковим запасом енергії в ній. Це так званий вільний процес зміни досліджуваної змінної. Вільний процес зміни змінних має місцев системі в тому випадку, якщо її вивести із стану рівноваги зовнішніми впливами, потім ці впливи прибрати.

Для визначення загального рішення рівняння (3.1) складається характеристичне рівняння:

$$a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (3.3)$$

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, то вигляд вільної складової рішення $y_{віл}\ (t)$ є сумою експонент:

$$y_{віл}\ (t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{p_i t},$$

де c_i - константи інтегрування; p_i - корені характеристичного рівняння; t – координата поточного часу; n – порядок рівняння динаміки.

Якщо корені характеристичного рівняння рівні між собою, то вільна складова буде мати вигляд:

$$y_{віл}\ (t) = (\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_n t^n) e^{p_i t}.$$

Якщо корені характеристичного рівняння будуть комплексними $p_{1,2} = a \pm ib$, то експоненти вільної складової з комплексними коренями за формулою Ейлера зводяться до гармонік, і вигляд вільної складової рішення наступний:

$$y_{\text{віл}}(t) = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt).$$

Вид частинного рішення визначається видом правої частини рівняння (3.1). Тобто вимушена складова збігається за формою з вхідною функцією (вхідним впливом), і її задають по цій функції з точністю до невизначених коефіцієнтів.

Зокрема, якщо права частина константа, то і частинне рішення шукається у вигляді константи. Якщо права частина є

гармонійною функцією з визначеними частотою, амплітудою і початковою фазою, то і частинне рішення буде гармонічною функцією тієї ж частоти, для якої потрібно визначити амплітуду і фазу.

Необхідно відзначити, що визначення вимушеної складової в разі дії вхідних впливів складнішої форми, ніж згадані вище, є досить складною задачею.

Тому зазвичай класичний метод рішення диференціальних рівнянь застосовується для рішення лінійних диференціальних рівнянь не вище третього порядку (при збільшенні порядку рівняння зростає складність обчислень), а також тоді, коли права частина рівняння виражається простою функцією – постійною величиною або гармонічною функцією.

Для визначення коефіцієнтів вимушеної складової необхідно цю функцію підставити в рівняння динаміки і отримати з нього рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів. З урахуванням знайдених констант інтегрування залежність (3.3) і буде шуканим рішенням рівняння руху системи. Отримане рівняння перехідного процесу є найбільш повною динамічною характеристикою системи.

З розглянутого вище витікає наступна послідовність рішення лінійного диференціального рівняння:

– визначення коренів характеристичного рівняння і відшукання загального рішення (вільної складової);
– відшукання частинного рішення (вимушеної складової);
– визначення коефіцієнтів вимушеної складової;
– визначення констант інтегрування вільної складової шляхом вирішення системи рівнянь, що отримана при підстановці початкових умови в рішення диференціального рівняння і в похідні від нього;
– отримання рівняння перехідного процесу шляхом підстановки знайдених коефіцієнтів в загальне рішення диференціального рівняння (3.3).

Пошук коренів характеристичного рівняння зручно виконувати за допомогою математичного пакету Mathcad.

Можна використовувати функцію Mathcad ***polyroots***. Функція *polyroots* не потребує начального наближення і повертає відразу всі корені, як дійсні, так і комплексні.

Формат:

Polyroots(*v*)

Повертає корені поліному степені ***n***. Коефіцієнти поліному знаходяться в векторі ***v*** , що складається з коефіцієнтів полінома, та має довжину ***n* + 1**.

Завдання до практичного заняття

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання визначити вид перехідної характеристики, що відповідає заданому рівнянню динаміки.
2. Визначити константи інтегрування.
3. Використовуючи отримане рівняння, побудувати шукану перехідну характеристику (наприклад, з використанням MS Excel).
4. Запрограмувати рішення заданого рівняння динаміки в середовищі

Mathcad.

Контрольні запитання

1. Внутрішні та зовнішні впливи на систему керування.
2. Статичний та динамічний режим функціонування системи.
3. Математичний опис динамічних моделей систем керування.
4. Вхідні та вихідні параметри системи керування.
5. Вільна складова рішення диференціального рівняння та її фізичний сенс.
6. Вимушена складова рішення диференціального рівняння та її фізичний сенс.
7. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при різних дійсних коренях характеристичного рівняння.
8. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при кратних дійсних коренях характеристичного рівняння.
9. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при комплексних коренях характеристичного рівняння.
10. Визначення невідомих коефіцієнтів вільної складової рішення диференціального рівняння.
11. Визначення невідомих коефіцієнтів вимушеної складової рішення диференціального рівняння.

Практичне заняття №4
Визначення часових характеристик за допомогою перетворень Лапласа

Мета роботи: Дослідити процес отримання часової характеристики системи керування при відомому математичному описі її динаміки. Набути вмінь рішення диференціальних рівнянь за допомогою операційного методу.

Опис змісту практичного заняття

В основі операційного методу опису лінійних систем керування лежить ідея заміни одних функцій на інші, які одержуються за певними правилами, наприклад, використовуючи перетворення Лапласа або перетворення Фур′є.

Широке застосування знайшов операційний метод опису лінійних систем керування, заснований на використанні інтегрального перетворення Лапласа (L- перетворення).

Це перетворення встановлює відповідність між функцією $f(t)$ дійсної змінної t і функцією $F(s)$ комплексної змінної $s = \alpha + i\beta$ та має наступний вигляд:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt. \qquad (4.1)$$

При цьому $f(t)$ називають оригіналом, а $F(s)$ - зображенням. Достатніми умовами існування (4.1) є наступні вимоги:

- функція $f(t)$ повинна бути однозначною і безперервною при всіх $t \geq 0$,безперервність може бути порушена тільки в окремих точках, що є точками розриву безперервності першого роду;
- функція $f(t) = 0$ для всіх $t < 0$;
- функція $f(t)$ повинна мати обмежений порядок зростання, тобто повинні бути такі два постійних числа $M > 0$ і $c > 0$, при яких $f(t) < M e^{ct}$ при $t > 0$.

Перетворення Лапласа ставить у відповідність операціям над оригіналами деякі певні операції над зображеннями. У табл. 4.1 наведені основні співвідношення, які використовуються при опису лінійних систем керування.

Застосування перетворення Лапласа при математичному опису систем керування обумовлюється тим, що з його допомогою визначають так звану передавальну функцію, що є самою компактною формою опису властивостей системи керування або її складових елементів.

Нехай дане лінійне неоднорідне рівняння системи керування у вигляді:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_m x(t) \ .$$

Застосуємо для цього рівняння перетворення Лапласа при нульових початкових умовах:

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + \cdots + b_m X(s). \qquad (4.2)$$

З (4.2) одержуємо:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s). \quad (4.3)$$

Таблиця 4.1 – Перетворення Лапласа

Найменування властивості	Оригінал	Зображення
Лінійність	$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)$	$\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(s)$
Диференціювання оригіналу при нульових початкових умовах	$\frac{d^{(n)} f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s)$
Інтегрування оригіналу при нульових початкових умовах	$\int_0^{\tau} f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Зміна масштабу	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
Зсув аргумента оригіналу	$f(t-\tau)$	$F(s)e^{-s\tau}$
Згортка функцій	$\int_0^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
Початкове значення оригіналу	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Кінцеве значення оригіналу	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$

З (4.3) видно, що співвідношення $\frac{Y(s)}{X(s)}$ не залежить від вхідного впливу $x(t)$, а характеризує тільки власні властивості системи керування і називається передаточною функцією.

Передаточная функція встановлює зв'язок між вхідною і вихідною величинами як у динамічному, так і у статичному режимах та є функцією комплексної змінної $s = \alpha + i\beta$, яка може при деяких значеннях s обертатися в нуль або в нескінченність. Значення змінної s, при якому $W(s)=0$, називається нулем, а значення, при якому $W(s) = \infty$, називається полюсом передаточної функції. З (4.3) видно, що нулями цієї функції є корені полінома $B(s)$, а полюсами – корені полінома $A(s)$.

Корені поліномів $B(s)$ і $A(s)$ можуть бути комплексно сполученими й дійсними. Якщо ці корені відомі, то відповідно до теореми Безу, вираз (4.3) можна надати у вигляді:

$$W(s) = \frac{b_0(s-\rho_1)(s-\rho_2)\dots(s-\rho_m)}{a_0(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_m)},$$

де ρ_i – нулі, λ_i – полюси $W_i(s)$.

Якщо поліном $A(s)$ має один або кілька нульових коренів, то передаточну функцію можна подати у формі з явним виділенням цих коренів, а саме у вигляді:

$$W(s) = k\frac{W^*(s)}{s^r}, \qquad (4.4)$$

де k – коефіцієнт передачі по відповідному каналу; r –кількість нульових коренів полінома $A(s)$.При цьому $\lim\limits_{s\to 0} W^*(s) = 1$.

Передаточна функція (4.3) має полюси у випадку, коли один або кілька молодших коефіцієнтів полінома $A(s)$ дорівнюють нулю:

$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-r+1} = 0$, тобто $W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-r} s^r}$

Після перетворень одержуємо:

$$W(s) = \frac{k}{s^r}\frac{B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \cdots + 1}{A_0 s^{n-r} + A_1 s^{n-1+r} + \cdots + 1},$$

де $B_i = b_i/b_m$ при $i = \overline{0,m}$; $A_j = a_j/a_{n-r}$при $j = \overline{0,n-r}$; $k = b_m/a_{n-r}$.

Елементи системи керування, в яких r>0, називаються астатичними, тобто не мають статичного режиму, який характеризується однозначною залежністю між вхідним і вихідним параметром. Величину r при цьому прийнято називати порядком астатизму. Якщо r = 0, то елемент називається статичним.

Для перевірки цього твердження скористаємося теоремою про кінцеве значення оригіналу операційного вирахування і формулою (4.4) за умови:

$x(t) = const = x_0$.

Маємо:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sW(s)X(s) = \lim_{s\to 0} s\ k\frac{W^*(s)}{s^r}\frac{x_0}{s} = kx_0\frac{\lim\limits_{s\to 0} W^*(s)}{\lim\limits_{s\to 0} s^r}.$$

Таким чином, тільки при $r = 0$ між величинами x_0 і $y(\infty)$ існує певна однозначна залежність:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = kx_0.$$

При $r > 0$ така залежність відсутня.

Рівняння багатьох реальних елементів і систем керування в цілому тією чи іншою мірою є нелінійними. У цьому разі змінні $x(t)$, $y(t)$ і їхні похідні входять у вираз для функції F у вигляді добутків, часток, ступенів або інших більш складних функцій.

Вирішення диференціального рівняння в цьому випадку складається з наступних етапів:

1. Перетворення диференціального рівняння до операторної форми.
2. Рішення операторного рівняння відносно вихідної величини в області комплексної змінної р.
3. Перехід в область дійсного змінного шляхом зворотного перетвореннЯЛапласа (з використанням таблиці відповідності).

Використання функцій математичного пакета Mathcad при вирішенні диференціального рівняння операторним методом

Пряме перетворення Лапласа здійснюється за допомогою функції **laplace,** а зворотне – функцією **invlaplace**. Ці функції знаходяться на панелі інструментів **Символьные**.

Визначення коренів характеристичного рівняння в математичному

пакеті Mathcad розглянуто в практичному занятті 3.

В Mathcad є спеціальний символьний оператор convert, parfrac, що призначений для розкладання на елементарні дроби виразу, що зазвичай представляє собою відношення поліномів. Уводиться він натисканням кнопки **parfrac** на панелі інструментів **Символьные**. В лівому маркері слід прописати вираз, що підлягає розкладанню, а в правому – змінну, виходячи з якої повинно проводитись розкладання.

Застосування цього оператору дає можливість суттєво спростити процедуру визначення коефіцієнтів розкладання виразу зображення вихідної величини при представленні його у вигляді суми простих дробів.

При використанні функції **invlaplace** для зворотнього перетворення за Лапласом при отриманні аналітичного виразу перехідного процесу краще зворотне перетворення виконувати після представлення виразу вихідної величини у вигляді суми простих дробів. Це дозволить Mathcad представити результат в оптимальній формі.

Завдання до практичного заняття

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати перетворення за Лапласом заданого рівняння динаміки.
2. Отримати зображення вихідної величини.
3. Виконати необхідні перетворення зображення для переходу до функції часу.
4. Визначити вид перехідної характеристики, яка відповідає заданому рівнянню динаміки.
5. Використовуючи отримане рівняння, побудувати шукану перехідну характеристику (наприклад, з використанням MS Excel).
6. Запрограмувати рішення заданого рівняння динаміки в середовищі Mathcad.

Контрольні питання

1. Як в перетворюваннях Лапласа здійснюються зміни масштабу?
2. Як в перетворюваннях Лапласа здійснюється зсув аргумента оригіналу?
3. Як в перетворюваннях Лапласа здійснюється згортка функцій?
4. Як в перетворюваннях Лапласа здійснюється початкове значення оригіналу?
5. Як в перетворюваннях Лапласа здійснюється кінцеве значення оригіналу?
6. Що називається передаточною функцією систем керування?
7. Як визначити вигляд передаточної функції за заданим диференціальним рівнянням?
8. Етапи вирішення диференціального рівняння операторним методом.
9. Перетворення диференціального рівняння до операторної форми при нульових початкових умовах.
10. Перетворення диференціального рівняння до операторної форми

при не нульових початкових умовах.

11. Сенс таблиці відповідності між оригіналами і зображеннями.
12. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння дійсні рівні, при представленні його у вигляді суми простих дробів?
13. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння дійсні ірізні, при представленні його у вигляді суми простих дробів?
14. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені, при представленні його у вигляді суми простих дробів?
15. Який вид має перехідний процес, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні?
16. Який вид має перехідний процес, якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені?

Практичне заняття № 5

Дослідження часових характеристик динамічних ланок першого порядку

Мета роботи: Вивчення перехідних характеристик динамічних ланок першого порядку. Засвоєння методів моделювання та дослідження систем керування в системі MatLab.

Опис змісту практичного заняття

Сімейства часових характеристик зв'язують два параметри, а саме: час та величину сигналу, показують зміну величини сигналу у часі. Незалежними параметрами цих сімейств є один з коефіцієнтів динамічних ланок, наприклад, для одного сімейства – коефіцієнт підсилення К, для іншого - постійна часу Т.

Для підсилюючої та інтегруючої ланок будується тільки одне сімейство, оскільки вона має тільки один параметр К, для інших ланок – залежно від кількості параметрів. В кожне сімейство, як правило, входить три, або більше графіків. Кількість графіків в сімействі визначається умовою достатності, тобто графіків повинно було стільки, щоб можна було чітко визначити, як впливає даний параметр на характеристику ланки.

Основними часовими характеристиками динамічних ланок є перехідна та імпульсна. Перехідна характеристика визначає поведінку системи при подачі на неї ступінчатого сигналу, імпульсна характеристика – реакцію на імпульсний сигнал.

Перехідна характеристика– це графік зміни з часом вихідного сигналу, якщо на вхід системи подати ступінчатий сигнал.

Імпульсна характеристика – це графік зміни з часом вихідного сигналу при імпульсному сигналі на вході.

Ступінчатий сигнал – це сигнал який дорівнює нулю до певного моменту часу t_0, раптово змінюється і дорівнює постійній величині. Такий сигнал створює звичайний вимикач. Якщо кінцева величина дорівнює 1 то сигнал називають одиничним в системі Simu.

Імпульсний сигнал – це сигнал у вигляді короткого імпульсу, який має безконечно велику величину при нескінченно малій тривалості.

Завдання до практичного заняття

1. Побудувати сімейства перехідних та імпульсних характеристикнайпростіших динамічних ланок:
   - підсилюючої,
   - аперіодичної,
   - інтегруючої,
   - реальної диференційної.

2. Дослідити залежність характеристики ланок від їх параметрів. Визначити та розрахувати за графіками початкові та усталені значення характеристик, тривалість перехідних процесів та зробити висновки щодо зміни характеристик ланок при зміні коефіцієнту підсилення К та постійної часу Т.

3. Побудувати табличку з результатами досліджень в якій вказати: тип динамічної ланки, параметри ланки, результати досліджень.

4. Записати у звіті диференційні рівняння динамічних ланок, їх передаточні функції, та рівняння перехідних характеристик.

Контрольні запинання

1. За якими ознаками класифікують системи керування? Назвіть головні класи таких систем.
2. Які типові динамічні ланки систем керування Ви знаєте?
3. Що таке передаточна функція і перехідна характеристика?
4. Що таке імпульсна перехідна характеристика ланки?
5. Які випробувальні сигнали дослідження часових характеристик визнаєте?
6. Запишіть передаточні функції типових динамічних ланок.
7. Який вигляд мають перехідні характеристики динамічнихланок?
8. Як змінюється перехідна характеристика аперіодичної ланки при зміні коефіцієнту підсилення, постійної часу?
9. Як пов’язані між собою перехідна та імпульсна характеристики.
10. Яку функцію називають ваговою? Який зв'язок між ваговою та перехідною функціями?
11. Які перетворення сигналу здійснюють підсилююча, інтегруюча, реальна диференційна ланки?
12. Як за графіком реальної диференційної (коливальної, аперіодичної) ланки записати передаточну функцію.

Практичне заняття № 6
Дослідження часових характеристики динамічних ланок другого порядку

Мета роботи: Дослідження часових характеристик динамічних ланок другого порядку. Закріплення методів моделювання та дослідження систем керування в системі MatLab.

Опис змісту практичного заняття

Ланки другого порядку - це ланки, у яких знаменник передаточної функції має другу степінь. До них відносяться коливальна ланки і аперіодична ланка другого порядку.

Коливальна ланка описується рівнянням:

$T^2y''(t) + 2T\zeta y'(t) + y(t) = kx(t),$

де k - передаточний коефіцієнт, що являє собою відношення вихідної величини до вхідної величини у статичному режимі; $T -$ постійна часу, що характеризує инерційність ланки; $\zeta -$ коефіцієнт демпфірування (загасання), що характеризує коливальність ланки.

В операторній формі при нульових початкових умовах це рівняння має вигляд:

$T^2s^2Y(s) + 2T\zeta sY(s) + Y(s) = kX(s).$

Динамічні властивості розглянутої ланки визначаються значенням коефіцієнта ζ. Коливальною ланкою ζ називається тільки при $0 < \zeta < 1$. При $\zeta = 0$ ланка називається консервативною, а при $\zeta \geq 1$ - аперіодичною другого порядку.

Розглянемо випадок, коли $0 < \zeta < 1$.

Передаточна функція ланки:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}. \quad (6.1)$$

Передаточна функція аперіодичної ланки другого порядку:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Це фактично одна і та ж ланка, якій відповідає передаточна функція (6.1). При різних значеннях постійної затухання |D| < 1 – коливальна ланка, а коли |D| ≥ 1 вона перетворюється в аперіодичну ланку другого порядку. Двома назвами для однієї і тієї ж ланки не завжди користуються, переважно ланку називають коливальною, і тільки у випадку коли треба підкреслити, що система, чи пристрій веде себе так, що в ній коливання не виникають, то користуються поняттям аперіодична ланка другого порядку.

Таке рівняння справедливе для коливальних систем, в яких здійснюється перетворення енергії з одного вигляду в інший, наприклад, з

енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки, або перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. За вказаним законом змінюється напруга на коливальному контурі, коливання маятника, пружного підвішеного тіла.

Передаточна функція коливальної ланки у системі MatLab записується у загальному вигляді:

$$W(s) = \frac{k}{1 + bs + as^2}.$$

Під час виконання практичного заняття, відповідно до варіанту завдання потрібно розрахувати коефіцієнти передаточної функції a та b:

$$a = T^2; \qquad b = 2TD.$$

У ланці при значенні постійної затухання D в границях $0 < D \leq 1$ виникають затухаючі коливання, а якщо $1 < D < \infty$, то ланка коливання відсутня. Якщо D = 0, коливання не затухають.

Крім форми запису передаточної функції у вигляді дробу: поліному чисельника діленому на поліном знаменника, вживається форма запису «нулі – полюси». Передаточну функцію коливальної ланки описують таким чином:

$$W(s) = \frac{k}{(s - S_1)(s - S_2)}.$$

Корені поліному знаменника S_1 та S_2, в загальному випадку комплексні числа. Їх називають полюсами передаточної функції, при $s = S_1$ чи S_2 знаменник дорівнює нулю, а передаточна функція нескінченності, а корені чисельника – нулями. Для аперіодичної ланки другого порядку ці корені дійсні числа.

Завдання до практичного заняття

1. Побудувати модель в яку входять коливальна динамічна ланка.
2. Дослідити перехідні та імпульсні перехідні характеристики коливальної ланки та аперіодичної ланки другого порядку.
3. Побудувати сімейства характеристик при різних значеннях коефіцієнта підсилення К, та постійної часу Т.
4. Для постійної затухання D побудувати декілька сімейств перехідних та імпульсно-перехідних характеристик, а саме при значеннях $0 \leq D < 0{,}5$; $0 < D \leq 1$, $0 < D \leq 10$.

5. Для усіх сімейств розрахувати і записати у звіт параметри перехідних характеристик: період коливань, частоту, усталене значення, амплітуду першого коливання, відношення амплітуд двох послідовних піків перехідної характеристики.

6. Розрахувати корені передаточної функції при значенні постійної затухання $D \leq 10$. Побудувати модель ланки у формі «нулі-полюси» та записатиії перехідну функцію.

7. Представити ланку у вигляді двох аперіодичних ланок першого порядку, побудувати модель при послідовному з’єднанні цих ланок, одержати

перехідну характеристику та порівняти її з характеристикою аперіодичної ланки другого порядку.

8. Побудувати таблицю з результатами досліджень в якій вказати: параметри ланки для кожного графіка сімейства, усталене значення перехідної характеристики, частоту і період коливань, відношення амплітуд двох послідовних максимумів (менше 1).

9. Зробити висновки про поведінку системи при різних значеннях кожного з параметрів.

Контрольні запинання

1. Як визначається порядок ланки?
2. Чим відрізняється коливальна ланка від аперіодичної ланки другого порядку?
3. Як одержати імпульсний сигнал засобами пакету SIMULINK?
4. Чим відрізняється вигляд перехідної характеристики аперіодичних ланок першого та другого порядку.
5. Запишіть математичний вираз ступінчатого (імпульсного) сигналу.
6. Як розрахувати корені знаменника передаточної функції?
7. Що називають коренями і полюсами передаточної функції?
8. Який вигляд має імпульсна характеристика коливальної ланки.
9. Як за перехідною характеристикою визначити параметриколивальної ланки?
10. Як задати параметри ланки у формі «нулі-полюси», коли відомо її диференційне рівняння.
11. При яких значеннях постійної затухання коливальна ланкаперетворюється в аперіодичну другого порядку.
12. Які значення мають полюси коливальної ланки і аперіодичної ланки другого порядку? Чим вони відрізняються?
13. Дайте визначення одиницям вимірювання кута в градусах і радіанах.
14. Як визначити величину кута в радіанах?
15. Як перевести величину кута в радіанах в градуси і навпаки?

Практичне заняття № 7
Дослідження частотних характеристики динамічних ланок першого порядку

Мета роботи: Дослідження частотних характеристик динамічних ланок першого порядку. Аналіз систем керування в системі MatLab за допомогою інструменту Simulink LTI- Viewer.

Опис змісту практичного заняття

Для аналізу електричних, механічних та електромеханічних систем, електричних кіл, ліній передачі інформації, використовуються два методи, які взаємно доповнюють один одного, а саме: часовий та частотний. При часовому методі аналізу розглядають перехідні характеристики, що визначають зміну сигналу протягом певного проміжку часу. Частотний метод аналізу розглядає спектральний склад сигналу й передачу його окремих гармонічних складових.

Якщо на систему подати гармонійний сигнал типу:

$$X(t)=X_0 sin(\omega t), \quad (7.1)$$

то в системі виникнуть вимушені коливання і сигнал на виході лінійної системи матиме цю ж частоту ω, але його амплітуда Y_0 та фаза φ відрізнятимуться:

$$Y(t)=Y_0(\omega)sin(\omega t+\varphi(\omega)). \quad (7.2)$$

Сигнали різних частот викликають коливання з різною амплітудою та фазою. Залежність амплітуди вихідного $Y_0(\omega)$ сигналу від частоти, при незмінній амплітуді вхідного сигналу називають амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ), а зсув фаз між вихідним сигналом $\varphi(\omega)$ та вхідним – фазово-частотною характеристикою (ФЧХ). Ці залежності різні для кожної ланки, чи системи і вони є її характеристикою.

На практиці більш зручним є використання логарифмічної шкали, тому найчастіше системи керування характеризують логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою (ЛАЧХ) і логарифмічною фазово-частотною характеристикою (ЛФЧХ). Об’єднання АЧХ та ФЧХ дозволяє одержати амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ), вона зображується в полярних координатах, причому фаза відповідає куту повороту радіуса вектора, а амплітуда – його модулю.

В іноземній літературі ЛАЧХ та ЛФЧХ прийнято називати характеристиками Боде, а, АФЧХ характеристикою Найквіста, за іменем вчених, які запропонували використовувати ці характеристики для вивчення стійкості та якості систем керування.

Для одержання частотних характеристик використовуються методи спектрального аналізу. У найпростішому випадку на систему подаються сигнали різних частот та вимірюються значення амплітуди та фази вихідних

сигналів. У більш удосконалених методиках вимірювання на вхід системи подається синусоїдальний сигнал змінної в часі частоти. або сигнали білого чи рожевого шуму з наперед визначеною спектральною густиною.

В системі MatLab є спеціальний інструмент Simulink LTI-Viewer, який входить до складу пакету прикладних програм системи управління Toolbox, і призначений для аналізу лінійних стаціонарних систем. За допомогою цього інструменту можна побудувати частотні характеристики досліджуваної системи, отримати її відгуки на одиничний ступінчатий та імпульсний сигнали, знайти нулі та полюси системи і т.

Математично частотні характеристики відповідають перетворенню Фур'є. Для теоретичного аналізу систем управління використовують комплексну передаточну функцію.

Щоб скористатись інструментом Simulink LTI-Viewer необхідно виділити частину моделі, яку досліджують, за допомогою позначок точок входу ***(Input Point)*** та виходу ***(Output Point).*** Для цього встановлюють курсор на лінії зв'язку, вибирають команду ***Lineriazation Point*** та відповідно ***Input Point***. І ***Output Point***. В результаті виконаних дій на моделі з'являться мітки входу та виходу (рис. 7.1).

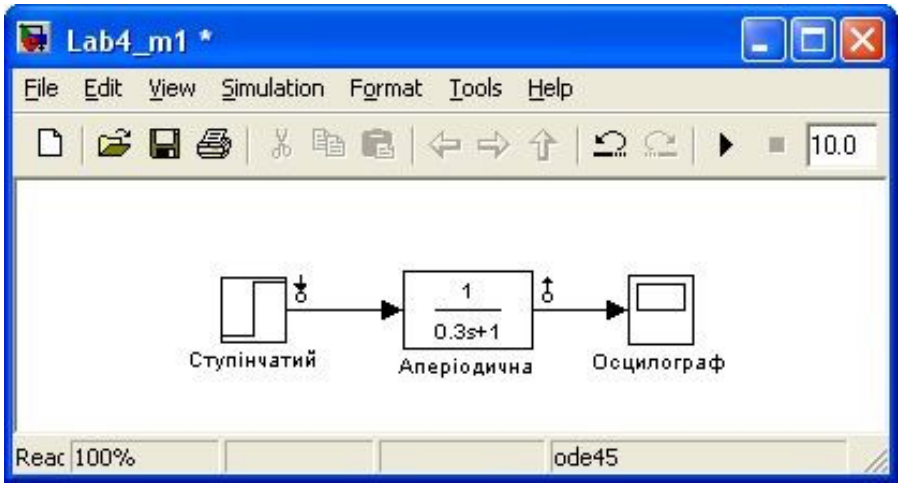


Рис.7.1. Модель з відмітками точок входу та виходу

У меню вікна моделі потрібно вибрати команду Tools > Control Desing > Linear Analysis... і подальший аналіз виконувати, користуючись вікном керування ***Control and Estimation Tools Manadger*** (рис. 7.2).

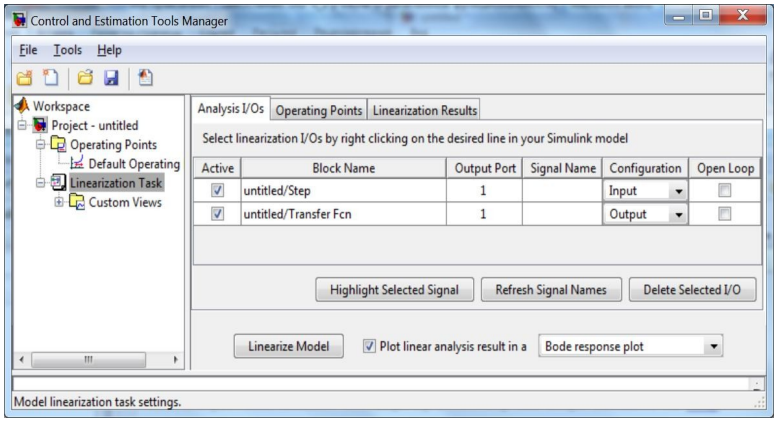


Рис. 7.2. Вікно лінеаризації моделі

Завдання до практичного заняття

1.Побудувати моделі для дослідження частотних характеристик аперіодичної, підсилюючої, інтегруючої, диференційної, реальної диференційної ланок.

2.Одержати сімейства ЛАЧХ та ЛФЧХ (характеристик Бодо) для кожної ланки при зміні параметрів.

3.Побудувати сімейства АФЧХ (характеристик Найквіста).

4.Відмітити, в якому квадранті комплексної площини знаходиться характеристика.

5.За результатами дослідження побудувати таблиці для кожної ланки, в яких вказати тип лани, її параметри у кожному графіку сімейства, значення рівня асимптот, їх нахилу, частотний діапазон дослідження, частоти спряження.

6.Виконати аналіз одержаних результатів і зробити висновок щодо залежності їх від параметрів ланок: коефіцієнта підсилення К та постійної часу.

7.У звіті з лабораторної роботи потрібно привести результати досліджень і одержані висновки, а також описати хід виконання роботи, копії команди, послідовність відкриття вікон, основні формати вікон.

Контрольні запитання

1. Які частотні характеристики ви знаєте?
2. Дайте визначення кожній частотній характеристиці.
2. Що таке резонансна частота? В чому суть резонансу?
3. Дайте визначення і поясні що називають частотою, амплітудою і фазою коливань?
4. Якими одиницями вимірюється частота коливань?
5. Яке співвідношення між величиною частоти в радіанах за секунду і Герцах?
6. Запишіть в загальному вигляді рівняння коливань?
7. Який вигляд має рівняння незатухаючих коливань?
8. Що називають комплексною передаточною функцією?

9. Яке співвідношення існує між комплексною передаточною функцією і частотними характеристиками?
10. Які сигнали та обладнання використовуються для вимірювання частотних характеристик?
11. Як побудувати амплітудно-фазову частотну характеристику завідомими АЧХ та ФЧХ?
12. Що таке децибел і де такі одиниці вимірювання використовуються?
13. В чому перевага використання логарифмічних частотних характеристик?
14. Запишіть передаточну функцію ланки за відомими АЧХ та ФЧХ.
15. Як побудувати логарифмічні частотні характеристики коливальної ланки методом асимптот?
16. Який вигляд мають АЧХ та ФЧХ коливальної ланки.
17. Від чого залежить вигляд ФЧХ коливальної ланки в області резонансної частоти? Поясніть її характер.
18. Який нахил асимптоти ланок різного порядку? Який у них максимальний зсув фаз?

Практичне заняття №8
Дослідження частотних характеристик ланки другого порядку

Мета роботи: Дослідження частотних характеристик ланок другого порядку. Аналіз систем керування в системі MatLab.

Опис змісту практичного заняття

Коливальна ланка – це ланка другого порядку, яка веде себе значно складніше ніж усі розглянуті ланки першого порядку Ланка характеризується трьома параметрами. Зміна їх призводить до зміни процесів, які відбуваються в ланці, що проявляється в частотних характеристиках ланки.

Коливальна ланка описується рівнянням другого порядку, яке має вигляд:

$$T^2y''(t) + 2T\zeta y'(t) + y(t) = kx(t),$$

де k - передаточний коефіцієнт, що являє собою відношення вихідної величини до вхідної величини у статичному режимі; $T -$ постійна часу, що характеризує инерційність ланки; $\zeta -$ коефіцієнт демпфірування (загасання), що характеризує коливальність ланки.

В операторній формі при нульових початкових умовах це рівняння має вигляд:

$$T^2s^2Y(s) + 2T\zeta sY(s) + Y(s) = kX(s).$$

Динамічні властивості розглянутої ланки визначаються значенням коефіцієнта ζ. Коливальною ланкою ζ називається тільки при $0 < \zeta < 1$. При $\zeta = 0$ ланка називається консервативною, а при $\zeta \geq 1$ - аперіодичною другого порядку.

Розглянемо випадок, коли $0 < \zeta < 1$.

Передаточна функція:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}.$$

Частотна передаточна функція ланки має вигляд:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi\omega} = \frac{k}{-T^2\omega^2 + 2\zeta Tj\omega + 1} = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + 2\zeta Tj\omega}.$$

На рис.6.1 подані відповідні графіки.

Вигляд кривої, що точно відповідає функції L(w), істотною мірою залежить від значення коефіцієнта ξ . Взявши похідну від функції L(w) і дорівнявши її нулю, можна одержати значення частоти $\omega_{max} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}/T$, на якій спостерігається резонансний пік ЛАЧХ, величина якого становить:

$$L(\omega_{max}) = 20\, lgA(\omega) = 20\, lgk - 20\, lg2\xi\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Якщо $\zeta \geq \sqrt{2}/2 \approx 0{,}707$ ($\omega_{max} \geq 0$), ЛАЧХ має вигляд монотонно убутної функції. Якщо ж $\zeta \to 0$, то $\omega_{max} \to 1/T$ і $L(\omega_{max}) \to \infty$.

У практичних розрахунках звичайно використовують наближену характеристику, що являє собою ламану, яка складається з двох асимптот.

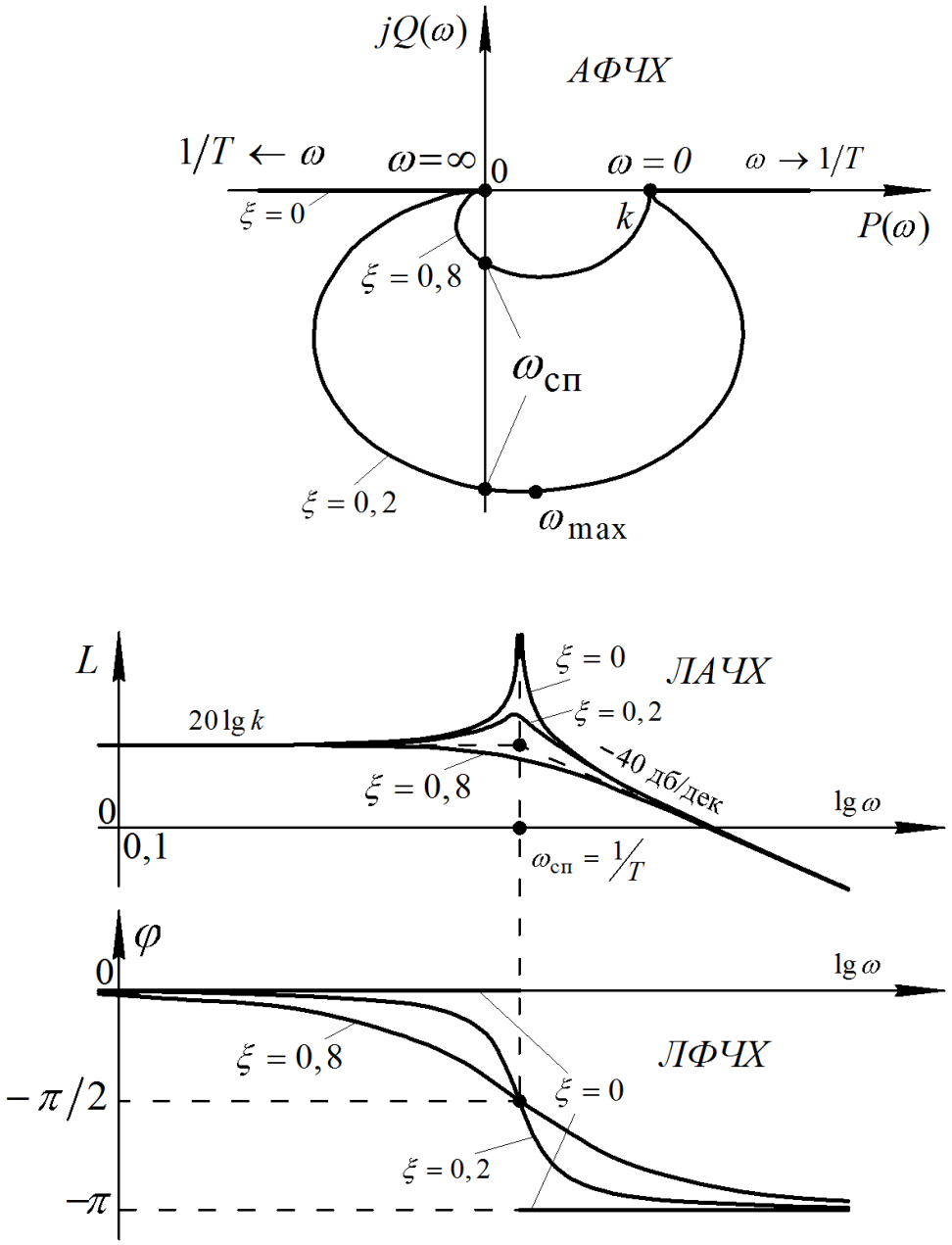


Рис.6.1. Частотні характеристики коливальної ланки

При низьких частотах зневажають величинами $T^2\omega^2$ та $(2\zeta T\omega)^2$, тоді $L(\omega) = L_{нч}(\omega) = 20\,lgk - 20\,lg\sqrt{1} = 20\,lgk$.

При високих частотах зневажають величинами 1 і $(2\zeta T\omega)^2$:

$L(\omega) = L_{вч}(\omega) = 20\,lgk - 20\,lg\sqrt{T^4\omega^4} = 20\,lgk - 40lgT\omega$.

На основі викладеного алгоритм побудови асимптотичної ЛАЧХ можна подати в такий спосіб:

- на рівні $L(\omega) = 20\,lgk$ провести пряму до частоти $\omega_{сп}$;
- з точки [$\omega_{сп}$; 20 lg$k$] провести іншу пряму з нахилом –40 дб/дек .

ЛФЧХ будуємо за точками:

$\omega = 0 \rightarrow \varphi\ (0) = 0;$

$\omega = \frac{1}{T} \rightarrow \varphi\ (\omega_{\text{сп}}) = -\frac{\pi}{2};$

$\omega = \infty \rightarrow \varphi\ (\infty) = -\pi.$

Таким чином, з аналізу ЛАЧХ і ЛФЧХ видно, що зі збільшенням частоти вхідних коливань амплітуда вихідних коливань до частоти $\omega_{сп}$ не змінюється, а при $\omega_{сп} > \omega$ - зменшується, тобто ланка є фільтром високих частот. Зміщення фаз від'ємне і з ростом частоти прагне до значення $\varphi\ (\infty) = -\pi$.

Завдання до практичного заняття

1.Побудувати модель для дослідження частотних характеристик ланки другого порядку.

2.Одержати сімейств ЛАЧХ, ЛФЧХ (характеристик Бодо) для кожного з параметрів ланки.

3.Дослідити, в яких інтервалах значень параметрів відбуваються кількісні зміни характеристик, а в яких - якісні.

4.Дослідити зміни характеристик при зміні постійної затухання в межах $0 < D \leq 1$ та $1 \leq D < \infty$.

5.Для кожного з параметрів ланок побудувати сімейства графіків АФЧХ (характеристики Найквіста). Дослідити їх залежність від параметрів ланок.

6.Одержати діаграму коренів та полюсів передаточної функції.

7.Зробити таблиці, в які занести параметри ланки для кожного графіка, рівні горизонтальної асимптоти та нахилу ділянок ЛАЧХ, значення частот спряження, максимального значення модуля передаточної функції, величину зсуву фаз, значення полюсів передаточної функції. Порівняти їх для різних значень параметрів передаточної функції та зробити висновки.

Контрольні запинання

1. Які частотні характеристики ви знаєте?
2. Яку ланку називають аперіодичною ланкою другого порядку?
3. В чому різниця між поведінкою перехідної характеристики аперіодичної ланки першого порядку і ланки другого порядку.
4. Запишіть комплексну передаточну функцію ланки за відомою передаточною функцією.
5. Запишіть диференційне рівняння ланки, якщо відома її передаточна функція.
6. Які переваги логарифмічних частотних характеристик?
7. Побудуйте амплітудно-фазову характеристику ланки за відомими ФЧХ та ФЧХ.
8. Який нахил асимптот у ланок різного порядку? Який максимальний зсув частот у ланок різного порядку?
9. Як веде себе ЛФЧХ в околі частоти спряження при D=0,5; 0,1; 0,01?
10. Що являють собою модель і аргумент комплексної

передаточної функції?

11. Як обрахувати аргумент комплексної передаточної функції?

12. Як веде себе перехідна характеристика в разі додатних і від'ємних значень постійної затухання?

13. При якій умові в коливальної ланки виникають незатухаючі коливання.

14. Які зміни перехідної характеристики відбуваються при зміні коефіцієнта підсилення, постійної часу, постійної затухання?

15. Які значення мають полюси передаточної функції в разі $D < 1$, $D>1$?

Практичне заняття № 9
Перетворення структурних схем

Мета роботи: Засвоєння методів розрахунку передаточних функцій складних систем керування за їх структурною схемою. Здобуття навичок розрахунку передаточних функцій систем у командному вікні системи MatLab.

Опис змісту практичного заняття

Завданням теорії керування – є виконання аналізу існуючих систем керування та проектування систем зі заданими характеристиками. Основою вирішення цих завдань є структурна схема. Структурна схема – це повний математичний опис системи. Завданням проектування і є розробка структурної схеми системи керування. За відомою структурною схемою можна розраховувати роботу системи керування при будь-яких умовах експлуатації. Порядок розрахунків такий:

- розрахунок передаточної функцію;
- аналіз роботи системи в різних режимах роботи.

Структурна схема системи керування – це умовне зображення системи, яке містить з'єднані між собою динамічні ланки. Кожна динамічна ланка в структурній схемі задається передаточною функцією. Згідно структурної схеми розраховують передаточну функцію системи в цілому.

У структурних схемах ланки з'єднання можуть бути:

– послідовно;
– паралельно;
– зустрічно-паралельно (з'єднання зі зворотнім зв'язком).

Передаточна функція послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку передаточних функцій окремих ланок. Для паралельно з'єднаних ланок передаточна функція дорівнює сумі передаточних функцій ланок. Для зустрічно-паралельно з'єднаних ланок передаточна функція обраховується за формулою:

$$W(s) = \frac{W_{\text{пр}}(\text{s})}{1 \mp W_{\text{рс}}(s)},$$

де $W_{\text{пр}}(s)$ – передаточна функція ланок прямого зв'язку входу з виходом; $W_{\text{рс}}(s)$ – передаточна функція розімкнутої системи, (послідовно з'єднаних ланок, які входять у кільце зворотного зв'язку).

Знак «–» відноситься до додатного зворотного зв'язку, а «+» для від'ємного.

Шляхом послідовної заміни по різному з'єднаних ланок однією ланкою з можна отримати передаточну функцію усієї системи. Якщо у структурній схемі системи керування є перехресне з'єднання, то не можна виділити окремо будь-який з наведених типів з'єднань. У цьому випадку здійснюють перетворення структурної схеми, переносячи деякі з'єднання і додаючи фіктивні ланки прямої чи зворотної дії, так, щоб сигнали біля

реальних ланок залишались незмінними. Робота системи за такою структурною схемою тотожна роботі за схемою до перетворення. Одержану в результаті вказаних перетворень, структурну схему називають еквівалентною. Використовуючи еквівалентну схему просто одержати передаточну функцію, оскільки у ній вже відсутні перехресні зв'язки.

Завдання до практичного заняття

1. Зробити структурну схему системи керування відповідно до варіанту завдання.

2.Виконати перетворення структурної схеми, приводячи її до однієї ланки, та розрахувати передаточну функцію в загальному вигляді (без підстановки конкретних значень передаточних функцій ланок.

3.Записати в командному вікні MatLab значення передаточних функцій. Згідно виконаних перетворень, використовуючи команди ***series(w1, w2), parallel(w1, w2,) feedback(w1, w2, ±1)*** розрахувати передаточну функцію усієї системи керування.

4.Спростити передаточну функцію командою ***minreal()***.

5.Перевірити вірність виконаних розрахунків, для цього знайти перехідну характеристику за допомогою команди ***Step().***

6.В пакеті Simulink побудувати структурну схему системи керування згідно до варіанту завдання, вказавши значення передаточних функцій.

7.Одержати перехідну характеристику і порівняти її з одержаною раніше. В разі, якщо характеристики не співпадають, виправити виконані розрахунки та добитися співпадіння результатів.

8.Побудувати логарифмічні частотні характеристики за допомогою команди >> ***bode*()*.***

9.Побудувати АФЧХ за допомогою команди >> ***nyquist***().

10.Одержати значення полюсів передаточної функції системи оператором ***pole***().

11.Одержати схему розміщення полюсів та нулів передаточної функції системи керування командою >> ***pzmap***().

12.Виконати аналіз роботи системи керування за результатами досліджень. Проаналізувати значення полюсів передаточної функції та зробити висновок щодо стійкості системи.

Контрольні запитання

1. Які типи з'єднань динамічних ланок ви знаєте?
2. Яку ланку називають ланкою направленої дії? Вкажить її характеристики.
3. Дайте визначення структурної схеми.
4. Доведіть правило розрахунку передаточної функції послідовно з'єднаних ланок.
5. Доведіть правило розрахунку передаточної функції паралельно з'єднаних ланок.
6. Доведіть правило розрахунку передаточної функції зустрічно-паралельно з'єднаних ланок.

7. Якими операторами можна одержати передаточні функції з’єднаних ланок?

8. Якими командами можна отримати ЛАЧХ, ЛФЧХ та АФЧХ системи керування?

9. Де розміщені полюси передаточної функції стійкої системи?

10. Як визначити стійкість системи за логарифмічними частотними характеристиками?

11. Яким оператором можна спростити вигляд передаточної функції?

12. Як одержати передаточну функцію оберненого перетворення?

13. Чи може передаточна функція мати непарну кількість комплексних полюсів, дійсних полюсів?

Практичне заняття № 10
Визначення стійкості системи керування

Мета роботи: Дослідити процес визначення стійкості системи керування за допомогою алгебраїчних критеріїв стійкості. Набути вмінь визначення стійкості системи керування з використанням кореневого критерію і критерію Гурвиця.

Опис змісту практичного заняття

В системах керування повинні виконуватись загальні умови стійкості. Стійкість системи – це її властивість повертатись в початковий стан після того, коли будь-яка дія вивела систему з цього стану.

Лінійна система керування може знаходитись в трьох станах: бути стійкою, нестійкою та на межі стійкості. Коли лінійна система знаходиться в одному з двох останніх станів, вона непрацездатна. Важливо також відзначити, що форма перехідного процесу, а також його показники (амплітуда, тривалість) при оцінці стійкості значення не мають, головне – перехідні процеси повинні бути збіжними.

В реальних умовах на систему постійно діють збурення, тому умова стійкості може відповідати вимозі: регульована координата повинна бути обмеженою при дії обмежених за величиною збурень. В задачах аналізу та синтезу проблема стійкості ставить не лише визначення цієї оцінки, а також факторів, від яких залежить стійкість. Враховуючи, що стійкість лінійних систем керування залежить від вільного руху системи, можна записати відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0. \qquad (10.1)$$

Змушена складова руху системи, яка відповідає певному виду зовнішньої дії, на стійкість не впливає. Тоді математичним визначенням стійкості є:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \qquad (10.2)$$

Зрозуміло, що вихідна змінна системи буде наближатись до змушеної складової, яка визначається правою частиною диференціального рівняння, а при виконанні умови (10.2) стійкість називається **асимптотичною**. Тоді для нестійкої системи маємо:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty. \qquad (10.3)$$

На межі стійкості в системі виникає перехідний процес з постійною амплітудою. Вільна (перехідна) складова перехідного процесу, яка визначає стійкість системи, є розв’язком диференціального рівняння (10.1):

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}, \qquad (10.4)$$

де c_i - постійні інтегрування, які залежать від початкових умов; λi - корені характеристичного рівняння:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots a_n = 0. \qquad (10.5)$$

Таким чином Yn(t) має суму складових, кількість яких визначається порядком системи *n*. В загальному випадку в рівнянні (10.5) оператор p замінюється на комплексну змінну λ. Тоді корені рівняння (10.5) є комплексними та утворюють пари спряжених комплексних чисел:

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i. \qquad (10.6)$$

Дійсна частина кореня α_i може бути додатною або від'ємною. Перехідна складова Yn(t) прямує до нуля лише тоді, коли кожна складова $c_i e^{\lambda_i t} \to 0$. Тоді можна визначити залежність стійкості системи від коренів характеристичного полінома:

- корені дійсні: $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$. Якщо $\alpha < 0$, то в системі виникає неколивальний (аперіодичний) перехідний процес, який при $t \to \infty$ прямує до нуля, тобто система стійка. При $\alpha > 0$ перехідний процес розбіжний, тобто система нестійка (рис.10.1, *а*);

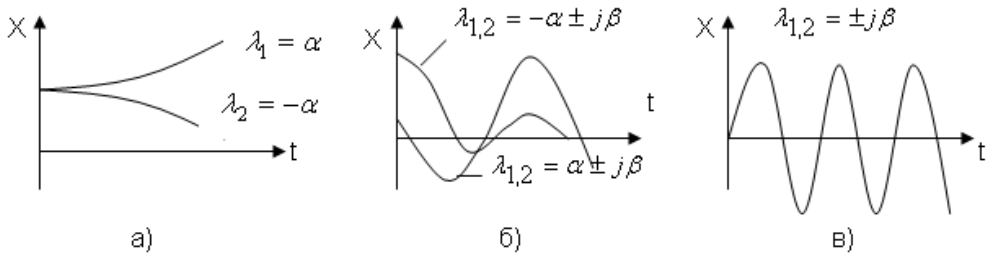


Рис. 10.1. Залежність від коренів характеристичного полінома Yn(t)

- корені комплексні попарно спряжені (рис.10.1, *б*) викликають коливальний перехідний процес, причому при $\alpha < 0$ - збіжний; - корені уявні (рис.10.1, *в*) відповідають перехідному процесу у вигляді синусоїди (система на межі стійкості).

Може бути також нульовий корінь, тоді значення X приймає постійну величину. Таким чином, узагальнимо:

- перехідний процес в системі – сума коливальних та аперіодичних складових, при цьому кожна коливальна складова відповідає парі комплексних спряжених коренів, а кожна аперіодична складова – дійсному кореню;

- загальною умовою загасання всіх складових і перехідного процесу в цілому є від'ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного рівняння системи, тобто полюсів (нулів знаменника) передаточної функції системи;

- якщо є хоча б один корінь з додатною дійсною частиною, то йому відповідає розбіжна складова перехідного процесу, тобто система нестійка;

- при наявності уявних коренів характеристичного рівняння в системі виникають незагасаючі коливання з частотою, яка дорівнює β_i - границі стійкості.

Розташування коренів характеристичного полінома на комплексній площині показано на рис. 10.2.

Для стійкості системи всі корені повинні лежати в лівій напівплощині (бути "лівими"), а уявна вісь є межею стійкості. На межі стійкості може

розташовуватись нульовий корінь або пара чисто уявних коренів. Необхідною, але недостатньою, умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного полінома. Для отримання характеристичного полінома можна використовувати передаточні функції системи.

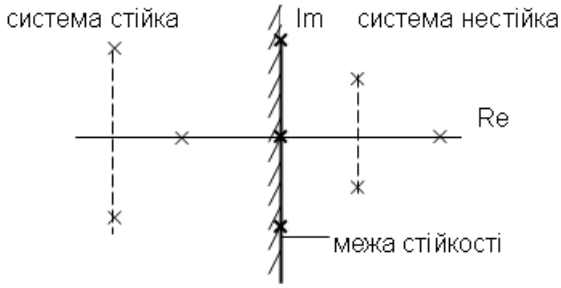


Рис.10.2. Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині

Розв'язуючи проблему стійкості, знаходять відповіді на ряд частинних питань:

- визначають структуру системи, в якій забезпечується стійкість;
- оцінюють межі змінювання параметрів системи, за яких вона зберігає стійкість та їх критичні значення, які виводять систему на межу стійкості (будують область стійкості);
- формують ряд додаткових заходів щодо збереження чи забезпечення стійкості, наприклад введення додаткових елементів чи зв'язків.

Таким чином, стійкість системи визначають на основі аналізу перехідного процесу або коефіцієнтів та коренів характеристичного поліному.

В теорії керування є ще один ефективний метод оцінки стійкості – використання **критеріїв** стійкості – узагальнених показників, які не потребують розв'язувати рівняння системи. Використовуються **алгебраїчні** та **частотні критерії**.

На основі характеристичного полінома:

$$D(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \qquad (10.7)$$

складається визначник:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 \\ & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & & & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots. & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \qquad (10.8)$$

Вираз (10.8) називається визначником Гурвиця і при його складанні виконуються правила:

- визначник має n рядків та n стовпців, в першому рядку розташовуються "непарні" коефіцієнти, після чого рядок доповнюється до числа n нулями;

- другий рядок включає всі “парні” коефіцієнти і також доповнюється нулями до числа n;

- третій та четвертий рядки отримують зсувом вправо відповідно першого та другого рядків на один елемент, а зліва проставляється нуль. Аналогічно отримують і наступні рядки;

- в головній діагоналі визначника розташовуються всі коефіцієнти, крім a_n .

Критерій стійкості Рауса-Гурвиця формулюється так: автоматична система, яка описуються характеристичним поліномом (10.7) стійка, якщо при $a_n > 0$ визначник Δ_n та всі його діагональні мінори **додатні**. Мінором називається визначник, складений з елементів, розташованих на перетині будь-яких k рядків та k стовпців визначника. Останній стовпець визначника Δ_n має лише один елемент a_0>0, тому використовується відома залежність:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}, \tag{10.9}$$

яка розпадається на дві за умови $\Delta_n = 0$: $a_0 = 0$, $\Delta_{n-1} = 0$. Коли $\Delta n = 0$, система знаходиться на **межі стійкості**. При цьому при $a_0 = 0$ існує один нульовий корінь (аперіодична межа стійкості), а при $\Delta_{n-1} = 0$ існує пара уявних коренів (коливальна межа стійкості). Розглянемо використання алгебраїчного критерія для системи різних порядків. Для системи **першого** порядку характеристичний поліном має вигляд:

$$D(\lambda) = a_1\lambda + a_0, \tag{10.10}$$

а умова стійкості:

$$\Delta_1 = a_0, a_1 > 0. \tag{10.11}$$

Для системи другого порядку:

$$D(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \tag{10.12}$$

а умова стійкості:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0, a_0 > 0. \tag{10.13}$$

Таким чином, для системи першого і другого порядків необхідною і достатньою умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Для системи **третього** порядку:

$$D(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \tag{10.14}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \tag{10.15}$$

Умова стійкості:

$$a_3 > 0, \Delta_1 = a_2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0,\ \Delta_3 = a_0 \Delta_2 > 0. \tag{10.16}$$

Рівняння (10.16) за умови $a_3 > 0$ потребує $\Delta_2 > 0$. Таким чином, для системи 3-го порядку забезпечення стійкості вимагає не лишедодатності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, а й певного співвідношення між ними.

Для системи 4-го порядка:

$$D(\lambda) = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad (10.17)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (10.18)$$

$$a_4 > 0, \Delta_1 = a_3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_2a_3 - a_1a_4 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_1\Delta_2 - a_3\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_4 & a_0 \end{vmatrix} = a_1\Delta_2 - a_3^2a_0 > 0,\ \Delta_4 = a_0\Delta_3 > 0. \quad (10.19)$$

Для систем високих порядків (n ≥ 3) використання алгебраїчного критерія Рауса-Гурвиця стає незручним і потребує громіздких виразів. Крім того, цей критерій не дає можливості визначити, які заходи необхідно здійснити для забезпечення стійкості.

Реальні системи повинні бути не лише стійкими, а й забезпечувати **запас стійкості**, тобто зберігати стійкість при змінюваних умовах роботи та параметрів системи. Фактично це означає, що система за своїми властивостями повинна бути на певній відстані від межі стійкості. Запас стійкості встановлюється в зв'язку з тим, що:

- розрахунок системи приводиться з використанням спрощених, ідеалізованих моделей, які не враховують ряд факторів, важливих для роботи системи;
- проводиться лінеаризація математичних залежностей, а саме нелінійності відіграють суттєву роль при роботі системи;
- параметри окремих елементів, особливо об'єкта, можуть значно змінюватись в процесі роботи, наприклад коефіцієнти теплопередачі.

Наведені фактори приводять до того, що стійка системи за розрахунками при практичному використанні може виявитись нестійкою.

Запас стійкості можна оцінювати за розташуванням коренів характеристичного рівняння на комплексній площині: чим далі вліво від уявної осі будуть розташовані корені, тим більшим буде запас стійкості.

При створенні та експлуатації систем часто необхідно визначати вплив змінюваних параметрів системи на стійкість. Область стійкості будується в координатах, якими є змінювані параметри, і виділяє простір, в кожній точці якого система стійка. Лінія або поверхня, які обмежують область стійкості, є межею області.

Для позначення області стійкості лінія (межа стійкості) штрихується, при цьому штриховка направляється всередину області. Межа області може будуватись шляхом багатократного застосування одного з критеріїв стійкості при різних значеннях змінюваних параметрів.

Розглянемо приклад побудови області стійкості для статичної системи третього порядку, передаточна функція якої задана у вигляді:

$$W(p) = \frac{K_1K_2K_3}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}, \quad (10.20)$$

що відповідає трьом послідовно з'єднаним аперіодичним ланкам з

коефіцієнтами передачі K_i та постійними часу T_i, $i = \overline{1,3}$. Характеристичний поліном системи приймає вигляд:

$$D(\lambda) = K_1K_2K_3 + (T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1) \quad (10.21)$$

або:

$$D(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad (10.22)$$

де

$a_3 = T_1T_2T_3;\ a_2 = T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3;\ a_1 = T_1 + T_2 + T_3;\ a_0 = 1 + K_1K_2K_3.$

Введемо позначення:

$$K = K_1K_2K_3, \quad (10.23)$$

де K − коефіцієнт передачі системи.

Для визначення області та межі стійкості можна застосувати алгебраїчний **критерій Рауса-Гурвиця**, тоді умовою стійкості буде:

$$T_1T_2T_3 > 0, \quad (10.24)$$

$$T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3 > 0, \quad (10.25)$$

$$T_1 + T_2 + T_3 > 0, \quad (10.26)$$

$$1 + K > 0. \quad (10.27)$$

Будемо вважати, що змінюваними параметрами є T_1 та K, тоді область стійкості будується в площині цих параметрів (рис.10.3).

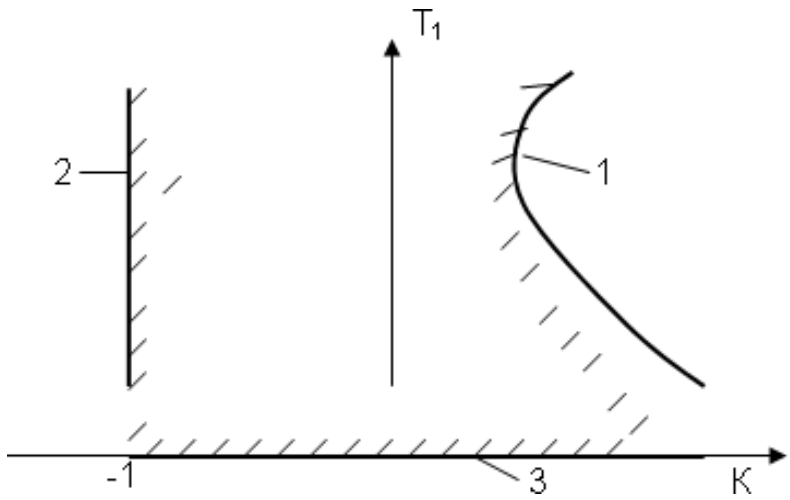


Рис.10.3. Область стійкості системи

Рівняння (10.23-(10.37) не мають особливої цінності, тому що в реальних системах завжди розглядаються додатні значення T_1,T_2,T_3. Рівняння (10.27) показує, що K за абсолютним значенням повинно бути менше одиниці, тобто система втратить стійкість при наявності додатного, а не від'ємного зворотного зв'язку. Коли К зростає, система також виходить на межу стійкості, а потім стає нестійкою, що видно з виразу для визначника Δ_3:

$$a_2a_1 - a_0a_3 = (T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1T_2T_3(1 + K) > 0.$$

З цього виразу можна отримати значення критичного коефіцієнта передачі системи:

$$K_{кр} = (T_1 + T_2 + T_3)\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right) - 1. \quad (10.28)$$

Для стійкої системи $K < K_{кр}$. Межа 1 для області стійкості (рис.10.3) відповідає умові (10.28) для різних значень змінюваного параметра T_1, при

яких $K = K_{кр}$. Межа 2 відповідає умові:

$$1 + K > 0,\ \text{К} = 1\,. \qquad (10.29)$$

Межа 3 відповідає умові $T_1 = 0$. Збільшення коефіцієнта передачі системи підвищує її точність, але може привести до втрати стійкості. Критичне значення коефіцієнта передачі не залежить від абсолютних значень постійних часу, а визначається лише їх відношенням.

При визначенні стійкості системи з використанням кореневого критерію необхідно визначати корені характеристичного рівняння. Визначення коренів характеристичного рівняння в математичному пакеті ***Mathcad*** розглянуто в практичному занятті 3.

При визначенні стійкості системи з використанням критерію Гурвиця необхідно вміти знаходити визначники Гурвиця. У ***Mathcad*** є можливість обчислювати визначник будь-якої матриці і з будь-якою заданою точністю обчислень. Визначник матриці обчислюється за допомогою оператора "|A|", де *A* – задана в завданні матриця. Ці операції знаходяться на панелі інструментів **Матрица**.

Завдання до практичного заняття

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати оцінку стійкості заданих систем автоматичного керування з використаннямнаступних критеріїв стійкості: кореневого критерію і критерію Гурвиця.
2. При використанні кореневого критерію: отримати характеристичне рівняння системи, знайти корені характеристичного рівняння і за ними виконати оцінку стійкості системи.
3. При використанні критерію Гурвиця: отримати характеристичне рівняння системи, записати необхідні визначники Гурвиця, обчислити їх і за отриманими результатами виконати оцінкустійкості системи.
4. Запрограмувати рішення характеристичного рівняння і обчислення визначників Гурвиця в середовищі Mathcad.

Контрольні питання

1.Як по логарифмічних частотних характеристиках досліджувати систему на стійкість?

2.Як можна досліджувати на стійкість систему із запізнюванням?

3.Що таке "критичний час запізнювання"?

4.Як можна визначити критичний час запізнювання по логарифмічних частотних характеристиках?

5.Як можна побудувати область стійкості по деякому параметру характеристичного рівняння?

6.Як зв’язана стійкість з корінням характеристичного рівняння ?

7.Як отримати характеристичне рівняння системи, якщо відома передаточна функція замкнутої системи?

10.Яка умова (по відношенню до виду характеристичного рівняння замкнутої системи) є необхідним для стійкості системи?

11.Як можна отримати рівняння статичного режиму з диференціального рівняння системи?

Практичне заняття № 11
Частотний критерій стійкості системи керування

Мета роботи: Дослідити процес визначення стійкості системи керування за допомогою частотного критерію стійкості. Набути вмінь визначення стійкості системи керування з використанням частотного критерію стійкості Михайлова.

Опис змісту практичного заняття

Частотні критерії стійкості в більшості випадків застосовуються в якості графоаналітичних критеріїв і забезпечують наочність інженерних розрахунків. Ці критерії досить поширені. Вони дозволяють виносити судження про стійкість систем керування за виглядом їх частотних характеристик. Частотні критерії зручні для практичного застосування і дозволяють досить легко досліджувати стійкість систем високих порядків. При цьому, вони мають досить просту геометричну інтерпретацію.

Критерій стійкості Михайлова заснований на розгляді характеристичного рівняння системи і базується на принципі аргументу функції комплексної змінної.

Нехай характеристичне рівняння досліджуваної системи має вид:

$$a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (11.1)$$

Частотний **критерій стійкості А.В.Михайлова** заснований на аналізі характеристичного полінома системи:

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 j\omega + a_0. \qquad (11.12)$$

Вираз (11.12) можна подати у вигляді суми дійсної та уявної частини:

$$D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega), \qquad (11.13)$$

де $U_D(\omega)$ - дійсна частина, складена з членів з парними степенями ω; $V_D(\omega)$ – уявна частина, яка утримує члени з непарними степенями ω .

Кожному фіксованому значенню ω відповідає комплексне число, яке можна зобразити вектором на комплексній площині. При змінюванні ω від 0 до ∞ цей вектор описує криву, яка називається годограф Михайлова. За видом годографа можна оцінювати стійкість системи. При ω=0 функція $D(j\omega) = a_0$, що випливає з виразу (11.12), а при $\omega \to \infty$ функція $D(j\omega)$ необмежено зростає, але проходить різну кількість квадрантів в залежностівід порядку системи.

Критерій стійкості Михайлова формується таким чином:

- система керування, якій відповідає рівняння (11.12), стійка, якщо при змінюванні ω від 0 до ∞ годограф $D(j\omega)$ огинає проти годинникової стрілки початок координат та проходить n квадрантів (n – порядок системи). Якщо система знаходиться на межі стійкості, то годограф проходить через початок координат (це відповідає наявності пари спряжених коренів).

На рис.11.1 годограф 1 відповідає стійкій системі ($n = 4$), 2 – на межі стійкості, 3 – нестійкій. При практичному використанні годографа Михайлова

спочатку знаходять точки перетину його з координатними осями: при $U_D(\omega) = 0$ знаходять частоту, коли $D(j\omega)$ перетинається з уявною віссю і підставляють її значення у вираз для $V_D(\omega)$.

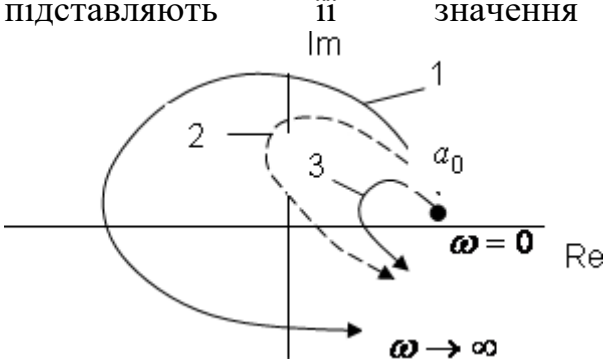
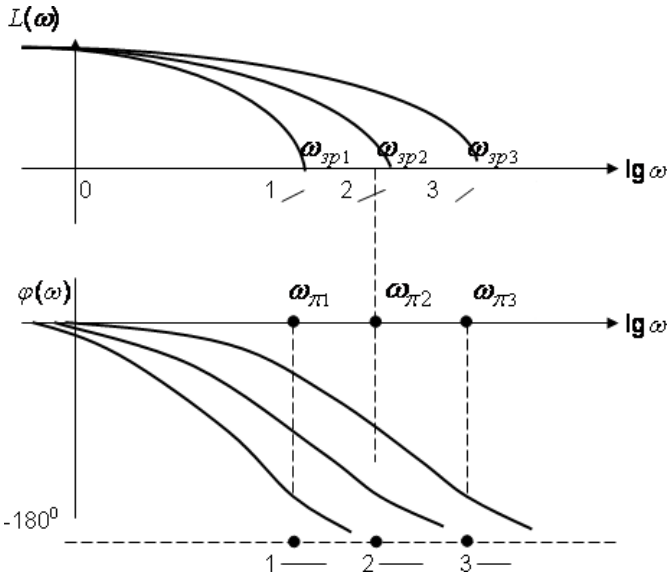


Рис. 11.1. Годограф Михайлова

Коли знайдено умови, за яких $D(j\omega)$ перетинає осі координат, тобто знайдено нулі функцій $U_D(\omega)$ і $V_D(\omega)$, то повністю годограф будувати не потрібно: стійкість має місце, якщо нулі $U_D(\omega)$ та $V_D(\omega)$ чергуються з ростом ω , починаючи з $\omega = 0$, тобто $V_D(\omega)$=0, а $U_D(\omega) > 0$.

Якщо систему можна розбити на ланки, то годограф $D(j\omega)$ можна отримати за правилами перемноження векторів. Для оцінки стійкості системи можна використовувати також **логарифмічні частотні характеристики**. Це засновано на висновках, які випливають з критерія стійкості Найквіста: система буде стійкою тоді,коли при досягненні фазовою частотною характеристикою значення -180° логарифмічна частотна



характеристика буде від’ємною (криві 1, рис. 11.2).

Рис.11.2. Логарифмічні частотні характеристики статичної системи

Це значить, що АФХ розімкненої системи не охоплює точку (-1; j_0). Кривим 3 рис.11.2 відповідає нестійка система, 2 – на межі стійкості

Реальні системи повинні бути не лише стійкими, а й забезпечувати **запас стійкості**, тобто зберігати стійкість при змінюваних умовах роботи та параметрів системи. Фактично це означає, що система за своїми властивостями повинна бути на певній відстані від межі стійкості. Запас стійкості встановлюється в зв'язку з тим, що:

- розрахунок системи приводиться з використанням спрощених, ідеалізованих моделей, які не враховують ряд факторів, важливих для роботи системи;
- проводиться лінеаризація математичних залежностей, а саме нелінійності відіграють суттєву роль при роботі системи;
- параметри окремих елементів, особливо об'єкта, можуть значно змінюватись в процесі роботи, наприклад коефіцієнти теплопередачі.

Наведені фактори приводять до того, що стійка системи за розрахунками при практичному використанні може виявитись нестійкою.

Запас стійкості можна оцінювати за розташуванням коренів характеристичного рівняння на комплексній площині: чим далі вліво від уявної осі будуть розташовані корені, тим більшим буде запас стійкості. Для оцінки запасу стійкості можна використовувати і частотний **критерій Найквіста**, а саме – за віддаленням АФХ розімкненої системи $W_{\text{роз}}(j\omega)$ від "небезпечної" точки (-1; j_0) на комплексній площині. Кількісно оцінюють запас стійкості системи за амплітудою (модулем) та фазою. Запас стійкості за амплітудою (модулем) показує, на скільки можна збільшити коефіцієнт передачі системи, щоб вона вийшла на межу стійкості. При розрахунках цей запас береться подвійним. Запас стійкості по фазі показує, на скільки повинно зрости запізнювання на частоті зрізу $\omega_{\text{зр}}$, щоб система вийшла на межу стійкості. При розрахунках приймається запас по фазі $\geq 30°$.

Засоби математичного пакета Mathcad також мають всі можливості для зручної побудови годографа Михайлова. Але в математичному пакеті Mathcad є функції, що дозволяють без самостійних розрахунків автоматично виділити дійсну і уявну складові комплексного числа – функції Михайлова (функція Михайлова є комплексним числом).

Це функції **Im(z)** і **Re(z)**. Перша повертає уявну частину комплексного числа, вектора або матриці z, а друга повертає дійсну частину комплексного числа, вектора або матриці z. Аналіз стійкості системи керування зручно проводити і з використанням наслідку з критерію стійкості Михайлова. Для користуванняним необхідно визначити корені уявної і дійсної частин функції Михайлова і перевірити умову їх чергуємості. Визначення коренів характеристичного рівняння в математичному пакеті Mathcad розглянуто в практичному занятті 3.

Завдання до практичного заняття

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати оцінку стійкості заданої систем керування з використанням частотного критерію стійкості Михайлова.
2. При використанні критерію Михайлова: отримати характеристичне рівняння системи і функцію Михайлова, побудувати годограф функції Михайлова (наприклад, з використанням MS Excel).
3. За характером проходження годографа функції Михайлова на комплексній площині оцінити стійкість системи.
4. Запрограмувати побудову годографа функції Михайлова в середовищі Mathcad.
5. При використанні наслідку критерію Михайлова: знайти дійсну і уявну частини функції Михайлова, визначити корені цих частин і перевірити чергуємість коренів уявної і дійсної функцій.
6. Запрограмувати перевірку чергуємості коренів уявної і дійсної функцій в середовищі Mathcad.

Контрольні питання

1. . Як за критерієм Михайлова визначається стійкість системи?
2. Яку функцію називають функцією Михайлова?
3. Яким буде приріст аргументу функції Михайлова, якщо корінь характеристичного рівняння лежить зліва від уявної осі?
4. Яким буде приріст аргументу функції Михайлова, якщо корінь характеристичного рівняння лежить праворуч від уявної осі?
5. Скільки квадрантів комплексної координатної площини повинен пройти годограф Михайлова стійкої системи?
6. В якому квадранті і в якій точці починається годограф Михайлова стійкої системи?
7. Як співвідносяться між собою корені уявної і дійсної частин функції Михайлова?
8. Які ознаки нестійкості системи за критерієм Михайлова?
9. Якою буде система, якщо годограф Михайлова виходить з початку координат?
10. Якою буде система, якщо годограф Михайлова проходить через початок координат?

Список рекомендованої літератури

1. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник / К. О. Сорока – Харків : ХНАМГ, 2006. – 187 с.
2. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування і комп'ютерне моделювання (неперервні лінійні системи). Частина перша. Основи теорії систем автоматичного керування : навч. посібник / К. О. Сорока – Харків : ФОПТімченко, 2010. – 218 с.
3. Сорока К. О. Теорія автоматичного керування і комп'ютерне моделювання (неперервні лінійні системи). Частина друга. Аналіз систем автоматичного керування засобами комп'ютерного моделювання: навч. посібник. / К. О. Сорока – Харків : ФОП Тімченко, 2010. – 156 с.
4. Личов Д. О. Дистанційний курс «Теорія автоматичного керування» /Д. О. Личов., К. О. Сорока [Електронний ресурс] Режим доступу: http://cdo.kname.edu.ua/course/view.php?id=575a
5. https://lfirmal.com/primery-resheniya-zadach-po-teorii-avtomaticheskogoupravleniya/ [Електронний ресурс].
6. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. – Київ: Либідь, 2007. – 655 с.
7. Маркіна О.М., Маркін М.О Теорія автоматичного керування. Конспект лекцій. – Київ: НТУУ "КПІ", 2009. – 137 с.
8. Кваско М.З. Числові методи комп'ютерного моделювання автоматичних систем: Алгоритми і програми / М.З. Кваско, А.І. Кубрак, А.І. Жученко. – К. : Політехніка, 2003. – 360 с.
9. Крак Ю.В. Теорія керування : навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна математика» / Ю.В. Крак, О.Л. Левошич. – К. : КНУ ім. Т. Шевченка, 2001.
10. Кубрак А.І. Комп'ютерне моделювання та ідентифікація автоматичних систем / А.І. Кубрак, А.І. Жученко, М.З. Кваско. – К. : Політехніка, 2004. – 424 с.
11. Іванов А. О. Теорія автоматичного керування. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2003. 250 с.
12. Лисенко В. М. та ін. Теорія польоту. Суми : Вид-во СумДУ, 2006. 203 с.
13. Харченко В. П., Барабанов Ю. М., Міхалочкін М. А. Системи зв'язку та навігації. Київ : Вид-во Нац. авіац. ун-ту "НАУ-друк", 2009. 216 с.