ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

Аналіз та синтез лінійних динамічних систем автоматичного управління. Частина перша.

Анотація

Розглядаються основні терміни та визначення систем автоматичного управління. Сигнали, які використовуються в теорії автоматичного управління. Розглянуто методи опису процесів в системах автоматичного управління у вигляді диференційних рівнянь. Розглянуто перетворення Лапласа та його основні властивості. Введено поняття передавальної функції за Лапласом. Розглянуто поняття характеристичного рівняння системи. Введено поняття перетворення Фур'є та поняття частотних характеристик систем автоматичного управління. Розглянуто різновиди частотних характеристик та зв'язок між ними. Введено поняття типових ланок систем автоматичного управління. Розглянуті основні характеристики та параметри типових ланок. Введено поняття структурних схем САУ. Розглянуті правила перетворення структурних схем САУ.

Професор Олександр Петренко

2022 р.

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Теорія автоматичного управління» є базовою для студентів, які навчаються за напрямком підготовки «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Опанування цієї дисципліни дає змогу студентам зрозуміти принципи побудови та роботи систем автоматичного управління, які використовуються у різних технічних галузях промисловості, енергетики, транспорту та зв'язку, оволодіти засобами аналізу та синтезу таких систем.

Даний навчальний посібник є першою частиною та містить основні розділи класичної теорії автоматичного управління. Зокрема, в ньому представлені: класифікація систем автоматичного управління, основні поняття, терміни та визначення.

Велику увагу в посібнику присвячено математичному апарату, який використовується в теорії автоматичного управління. Розглянуто різні форми представлення диференційних рівнянь, які описують фізичні процеси в об'єктах автоматичного управління. Поряд з традиційними формами лінійних диференціальних рівнянь розглянуто операторні форми рівнянь на основі використання перетворень Лапласа та Фурье. Розглянуто основні властивості перетворень Лапласа та Фурье, які широко використовуються в теорії автоматичного управління.

Окремий розділ навчального посібника присвячений типовим ланкам систем автоматичного управління, їх математичному опису, параметрам та характеристикам. В якості типових ланок розглянуто пропорційну, інтегруючу, диференціальну, аперіодичну, коливальну, консервативну, форсуючу ланку, ланку запізнення та деякі інші ланки. Для перелічених ланок наведені диференційні рівняння, передавальні функції, часові та частотні характеристики. Характеристики ланок широко ілюструються відповідними графіками.

Окремо розглянуті питання щодо еквівалентного перетворення структурних схем систем автоматичного управління, отримання передавальних функцій за управляючим та збурюючим сигналами.

Навчальний посібник містить всі необхідні матеріали для розпочатку вивчення основних положень теорії автоматичного управління та отримання необхідних теоретичних знань, містить контрольні питання, які дають змогу студентові перевірити свої знання протягом вивчення курсу.

Вивчення курсу «Теорія автоматичного управління» передбачає поєднання вивчення теоретичних положень теорії, викладених в навчальному посібнику, з виконанням лабораторних робіт з використанням пакету MATLAB, що надає студентам практичні навички щодо аналізу та синтезу систем автоматичного управління.

Для успішного вивчення курсу «Теорія автоматичного управління» студенти мають мати певні знання з дисциплін «Вища математика», «Загальна фізика», «Електроніка та схемотехніка».

Навчальний посібник може бути корисним також студентам і аспірантам, які навчаються за спорідненими напрямками підготовки у вищих технічних навчальних закладах.

1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ, ТЕРМІНИ І ПОНЯТТЯ

Теорія автоматичного управління присвячена вивченню основних принципів аналізу і синтезу *систем автоматичного управління*. Система автоматичного управління зазвичай складається з *об'єкту управління* та певного *керуючого пристрою*.

Під об'єктом управління будемо розуміти технічні засоби або процеси, направлені на досягнення певної мети – заданої траєкторії руху літального апарату або транспортного засобу, виконання технологічних процесів у виробництві, підтримання заданих параметрів в енергетичних системах, вимірювання сигналів у вимірювальних системах і т.п.

Керуючий пристрій забезпечує подачу управляючих сигналів на об'єкт управління за заданими алгоритмами управління.

Схематично систему автоматичного управління можна представити у вигляді, як показано на рис. 1, де введено такі позначки: ОУ – об'єкт управління; КП – керуючий пристрій; *x(t) – задавальний сигнал*; *u(t) – керуючий сигнал*, який подається на об'єкт управління; *y(t) – вихідна координата*, яка характеризує стан об'єкту; *z(t) – випадкові збурення,* які викликають відхилення вихідної координати від заданих значень.

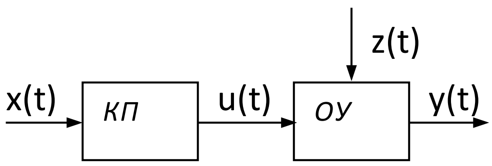


Рис. 1.1 - Схема САУ

Процес управління полягає в формуванні такого керуючого сигналу *u(t),* який би забезпечив бажане значення вихідної координати *y(t),* при максимальній компенсації збурення *z(t).*

Формування керуючого впливу *u(t)* виконується на основі *алгоритму управління* - сукупності вказівок, які визначають характер дії на об'єкт з метою виконання ним алгоритму функціонування. Алгоритм управління залежить від алгоритму функціонування системи, від динамічних властивостей системи та діючих збурень.

Основні задачі автоматичного управління можна визначити таким чином: підтримання постійної величини вихідної координати; зміна вихідної координати за заданою програмою, зміна вихідної координати за деяким випадковим законом.

Відповідно до цих задач можна виділити такі різновиди САУ: системи стабілізації, системи програмного управління, слідкуючі системи. Окрім цього, виділяють системи екстремального управління, оптимальні системи, адаптивні системи.

Системи стабілізації призначені для підтримки постійного значення вихідної величини. Алгоритм функціонування в таких САУ може бути записаний у вигляді: $y(t)=const$. До систем стабілізації належать системи регулювання числа обертів двигуна, стабілізації напруги генератора, стабілізації температури, тощо.

Системи програмного управління - це системи, в яких вихідна величина змінюється за визначеною програмою. Алгоритм функціонування таких систем може бути записаний у вигляді $y(t) = F[x(t)]$, де функція F і дія $x(t)$ наперед визначені. У реальних системах використовуються два види управління: з часовою програмою і з просторовою програмою.

Слідкуючі системи - це системи, в яких вихідна координата змінюється за випадковим, наперед невідомим законом. У таких системах алгоритм функціонування завчасно невідомий; його можна записати у вигляді: $y(t)=F[x(t)]$, де функція F задана, а закон зміни задавального сигналу $x(t)$ невідомий. Власне слідкуюча система має алгоритм функціонування $y(t) = x(t)$, тобто вихідна координата системи повинна із заданою точністю відтворювати величину задавального сигналу. У більш загальному випадку слідкуюча система не тільки слідкує за задавальним сигналом, але й перетворює його за певним законом.

Системи екстремального керування здійснюють пошук екстремуму деякої функції і забезпечують роботу в режимі, близькому до екстремуму. Наприклад, система, що забезпечує настроювання радіоприймача на частоту передавальної станції за найбільшою гучністю прийому або за найбільшою яскравістю свічення індикаторної лампи. Необхідним елементом у такій системі є чутливий елемент, що знаходить екстремум.

Системи оптимального управління. Системи оптимального управління забезпечують функціонування системи при виконанні певного критерію якості, який визначається критерієм оптимальності - максимальна швидкість системи, підтримання максимуму чи мінімуму інтегрального квадратичного критерію якості, тощо.

Адаптивні системи. Адаптивними називаються системи, які автоматично змінюють значення своїх параметрів або структуру при непередбачених змінах зовнішніх умов, щоб зберігати задану якість її роботи.

Питання для самоперевірки:

1. Що таке об’єкт управління, керуючий пристрій?

2. Яка система називається автоматичною, автоматизованою?

3. Що таке алгоритм управління, алгоритм функціонування?

4. Які принципи управління використовуються при побудові САУ?

5. Що таке зворотний зв’язок?

6. Як працюють системи з розімкнутим управлінням? Зі зворотнім зв’язком?

7. Які елементи входять до складу САУ, у чому їх призначення?

8. Як можна класифікувати системи автоматичного управління?

9. Що таке система стабілізації, слідкуюча система, система програмного управління?

10. Які САУ називаються статичними, астатичними?

13.Що таке стаціонарна система?

14.Чим відрізняються лінійні та нелінійні САУ?

15.Які системи називаються дискретними, безперервними?

2. СИГНАЛИ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ПРИ АНАЛІЗІ САУ

Оскільки переважна більшість систем автоматичного управління є динамічними системами, їх вихідні змінні суттєво залежить від величини та характеру вхідних сигналів. Вхідні сигнали можуть бути *детермінованими сигналами*, або *випадковими сигналами*, які можуть розглядатися, як випадкові функції часу.

Однак, розглядаючи конкретні умови роботи САУ, можна вибрати такі сигнали, які для даної системи є найбільш типовим. Обравши такий сигнал і вивчивши викликаний ним перехідний процес, можна зробити висновок щодо динамічних властивостей системи.

Під час аналізу та синтезу САУ розглядають кілька типових (тестових) сигналів: одиничний ступінчастий сигнал, одиничний імпульс, гармонічний сигнал.

2.1 Одиничний ступінчастий сигнал.

Цей сигнал має вигляд одиничного стрибка (рис.2.1). Його називають також одиничною функцією 1(t), яка набуває таких значень:

$$\begin{cases} 1(t) = 0, при\ t < 0, \\ 1(t) = 1, при\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

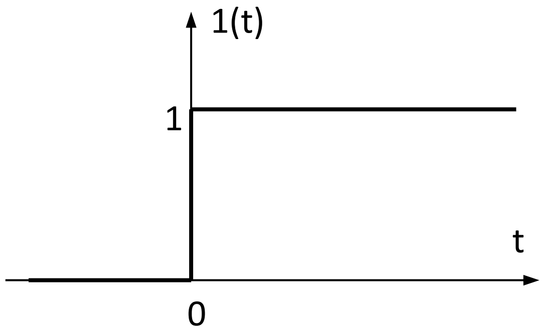


Рис. 2.1 - Одиничний ступінчастий сигнал

Реакція системи на одиничний ступінчастий сигнал за нульових початкових умов називається перехідною функцією h(t) системи; графік цієї функції називається *перехідною характеристикою.* Це дуже важлива характеристика системи: за нею можна судити щодо стійкості системи, її швидкодії.

Якщо відома математична модель системи, що описує САУ, перехідну функцію *h(t)* можна визначити шляхом розв’язання диференційне рівняння системи за нульових початкових умов і прийнявши, що вхідний сигнал *x(t)* = 1(t).

2.2 Одиничний імпульс (δ-функція).

Одиничний імпульс сигнал являє собою дуже вузький імпульс, що обмежує одиничну площу (рис. 2.2). Тобто δ-функція задовольняє умовам:

$$\begin{cases} \delta(t) = \infty, & при\ t = 0, \\ \delta(t) = 0, & при\ t \neq 0. \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (2.2)$$

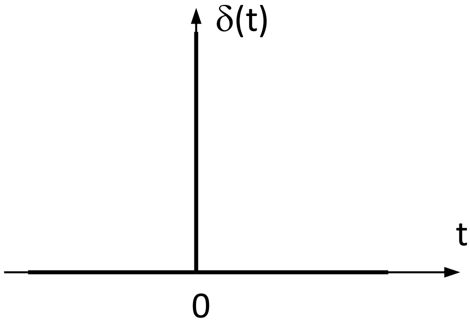


Рис. 2.2 – Сигнал у вигляді δ-функції

В реальних умовах за сигнал у вигляді одиничного імпульсу може бути прийнятий імпульсний сигнал будь-якої форми і малої довжини у порівнянні з очікуваним часом перехідного процесу системи.

Реакція системи на одиничний імпульсний сигнал за нульових початкових умов називається імпульсною перехідною функцією w(t) системи. Графік цієї функції називається *імпульсною перехідною характеристикою.*

Перехідна та імпульсна перехідна функції називаються *часовими функціями*. Між ними існує зв'язок:

$$\frac{dh(t)}{dt} = w(t). \qquad (2.3)$$

Аналогічно пов'язані між собою одинична функція та одиничний імпульс:

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t). \qquad (2.4)$$

2.3 Гармонійний сигнал.

Гармонійний сигнал може бути записаний у вигляді:

$$x(t) = A\sin{(\omega t + \varphi)}, \qquad (2.5)$$

де A - амплітуда коливань; ω - кругова частота.

Використання гармонічного сигналу різної частоти дозволяє отримати математичний опис системи у вигляді частотних характеристик. При аналізі та синтезі САУ використовуються *амплітудно-частотні характеристики* (АЧХ); *фазо-частотні характеристики* (ФЧХ) та *амплітудно-фазові частотні характеристики* (АФЧХ).

3. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

Для здійснення аналізу та синтезу системи автоматичного управління необхідно визначити її математичну модель. Математичну модель системи отримують в процесі структурної та параметричної ідентифікації. Математична модель системи може бути представлена у вигляді диференційних рівнянь (аналітичний опис), графіків, структурних схем, графів (графічний опис), таблиць (табличний опис). Причому, для отримання математичної моделі всієї системи в цілому спочатку необхідно отримати модель її окремих елементів. Так, для отримання рівнянь системи складають рівняння для кожного її елемента. Сукупність цих рівнянь називають *математичною моделлю* САУ.

Математична модель має бути досить простою, щоб не обтяжувати дослідження, але з іншого боку - точною, щоб найбільш повно відображати властивості системи.

3.1 Математичний опис САУ диференційними рівняннями.

Основною формою математичної моделі системи можуть слугувати диференціальні рівняння, які повинні бути складені на основі фізичних законів, що визначають процеси в системі (закон збереження матерії, енергії, другий закон Ньютона, закони Кірхгофа і т.д.).

Розв’язуючи диференційні рівняння системи, можна визначити значення вихідної координати y(t) системи в будь-який момент часу при заданому вхідному сигналі x(t) та дії збурюючих z(t) впливів.

У більшості випадків безперервні САУ описуються нелінійними диференціальними рівняннями n-го порядку, які можуть бути записані у вигляді:

$$F(y, y', y'', \ldots, x, x', x'', \ldots) = 0. \tag{3.1}$$

Це рівняння (для спрощення припустимо, що збурюючий вплив *z(t)* відсутній) описує процеси в системі при будь-яких вхідних сигналах і називається *рівнянням динаміки* системи.

Якщо припустити, що сигнал x(t) не змінюється і має постійне значення x_0, а процес у системі усталився, і вихідна координата набула значення y_0, то рівняння набуде вигляду:

$$F(y_0, 0, 0, \ldots, x_0, 0, 0, \ldots) = 0. \tag{3.2}$$

Це рівняння описує статичний режим роботи системи автоматичного управління і називається *рівнянням статики.*

Статичний режим можна описати графічно за допомогою *статичних характеристик*. Статичною характеристикою називається залежність вихідної величини від вхідної в статичному режимі.

У більшості випадків статичні характеристики реальних елементів задаються у вигляді відповідних графіків (рис. 3.1).

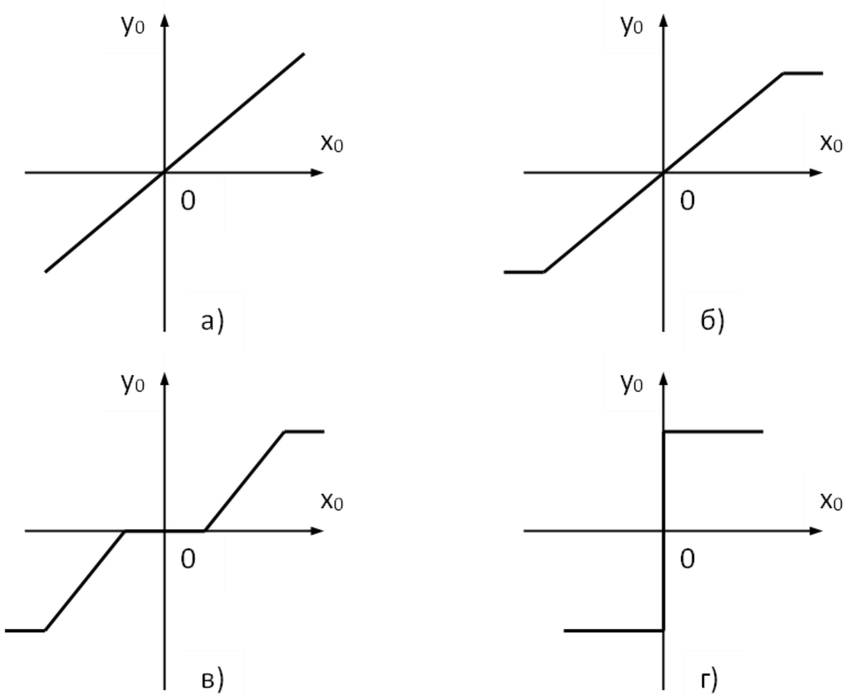


Рис. 3.1 – Типові статичні характеристики систем

В ряді випадків нелінійності елементів САУ є неістотними, або система працює на обмежених ділянках статичних характеристик її елементів, де нелінійність недостатньо виражена. У цих випадках реальну нелінійну характеристику вдається з певним ступенем точності замінити лінійною і здійснити *лінеаризацію* рівнянь, тобто замінити точні нелінійні рівняння наближеними лінійними. Це дозволяє спростити методи аналізу та синтезу САУ.

Якщо нелінійна характеристика системи задана в аналітичній формі $y(t) = \varphi(x)$, то лінеаризацію можна виконати розкладом функції в ряд Тейлора довкола точки $x=x_0$, що відповідає номінальному режиму:

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \phi^{'}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\phi^{''}(x_0)}{2!(x-x_0)^2} + \cdots + \frac{\phi^{n}(x_0)}{n!(x-x_0)^{n}} + \cdots \quad (3.3)$$

Згідно з гіпотезою малих відхилень Вишнеградського відхиленням змінної ($x-x_0$) у другому, третьому і далі ступенях можна знехтувати, тому вираз (3.3) спрощується і формула лінеаризації набуває вигляду:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\cdot(x-x_0), \tag{3.4}$$

що є еквівалентним виразу $y = y_0 + k\cdot(x-x_0)$, де $k = \varphi'(x_0)$.

У результаті лінеаризації математична модель системи зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь, або до одного лінійного диференціального рівняння n-го порядку:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \tag{3.5}$$

Отримавши математичну модель системи автоматичного управління у вигляді (3.5), можна шляхом вирішення диференційного рівняння при довільних вхідних сигналах отримати відповідну реакцію системи.

3.2 Перетворення Лапласа, основні властивості.

Реальні системи автоматичного управління мають математичну модель у вигляді складних диференціальних рівнянь, розв'язок яких у загальному вигляді в більшості випадків неможливий. Для полегшення даної задачі існує кілька методів. Найбільш поширеним є метод *перетворення Лапласа*, побудований на тому, що *функції часу* замінюють їх *зображеннями*.

Перетворенням Лапласа називають співвідношення:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \tag{3.6}$$

Це співвідношення ставить у відповідність функції $x(t)$ дійсної змінної t функцію $X(s)$ комплексної змінної s ($s = \sigma + j\omega$).

При цьому $x(t)$ називають *оригіналом*, а $X(s)$ - *зображенням за Лапласом*. Це записують таким чином: $x(t)\rightarrow X(s)$, або $X(s)\rightarrow x(t)$.

Інколи використовують символічний запис: $X(s) = L\{x(t)\}$,
де L - оператор Лапласа.

Маючи зображення функції, можна отримати його оригінал, використовуючи співвідношення

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_o - j\infty}^{\sigma_o + j\infty} X(s) e^{st} ds \tag{3.7}$$

яке називається *оберненим перетворенням Лапласа*.

Символічно це можна записати так: $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$, де L^{-1} – обернений оператор Лапласа.

Основні властивості перетворення Лапласа:

Властивість лінійності. Для будь-яких постійних α і β справедливо:

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}. \quad (3.8)$$

Диференціювання оригіналу. Цю властивість запишемо з урахуванням нульових початкових умов, тобто $x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = 0$:

$$L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s), \quad L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s). \quad (3.9)$$

Таким чином, за нульових початкових умов диференціюванню оригіналу відповідає множення зображення на s.

Інтегрування оригіналу. Інтегруванню оригіналу відповідає ділення зображення на s:

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{X(s)}{s}. \quad (3.10)$$

Теорема запізнення. Для будь-якого додатного числа τ:

$$L\{x(t-\tau)\} = e^{-s\tau} L\{x(t)\} = e^{-s\tau} X(s). \quad (3.11)$$

Теорема згортки (теорема множення зображень):

$$X_1(s) \cdot X_2(s) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_2(\tau) x_1(t-\tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Інтеграл у правій частині рівняння називають *згорткою* функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ і позначають $x_1(t) * x_2(t)$, тобто

$$L\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s). \quad (3.13)$$

Теореми про граничні значення.

$$x(0) = \lim_{s\to\infty}(sX(s)); \quad x(\infty) = \lim_{s\to 0}(sX(s)). \quad (3.14)$$

Ці теореми дозволяють визначити усталене (кінцеве) або початкове значення функції $x(t)$ за відомим зображенням.

Теорема розкладу. Теорема дозволяє знайти оригінал за відомим зображенням, яке являє собою дробово-раціональну функцію $X(s) = A(s)/B(s)$, причому ступінь полінома чисельника менше ступеня полінома знаменника. Якщо всі корені рівняння $B(s)=0$ прості, то формула розкладу може бути записана у вигляді:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (3.15)$$

де n - ступінь полінома B(s); $B'(s_k) = \frac{dB}{ds}|_{s=s_k}$, S_k - корені рівняння B(s) = 0.

Перетворення Лапласа є дуже цінним методом аналізу і синтезу систем управління, коли необхідно визначити перехідні процеси і точність регулювання в усталеному режимі. Але слід пам'ятати, що це перетворення є справедливим тільки для *лінійних стаціонарних* (з постійними параметрами) систем. У нестаціонарних системах один або декілька параметрів залежать від часу, тому перетворенням Лапласа користуватися не можна. Перетворення Лапласа не можна використовувати також для аналізу нелінійних систем.

У таблиці 3.1 наведені деякі важливі перетворення Лапласа.

Таблиця 3.1 Перетворення Лапласа найпростіших функцій

x(t)	X(s)	x(t)	X(s)	x(t)	X(s)
1(t)	1/s	t^2	$2/s^3$	sin(ωt)	$\omega/(s^2+\omega^2)$
δ(t)	1	t^n	$n!/s^{n+1}$	cos(ωt)	$s/(s^2+\omega^2)$
δ'(t)	s	$e^{-\alpha t}$	1/(s+α)	$e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega t)$	$\omega/[(s+\alpha)^2+\omega^2]$
t	$1/s^2$	$t\cdot e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)^2$	$e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega t)$	$(s+\alpha)/[(s+\alpha)^2+\omega^2]$

3.3 Форми запису лінійних диференційних рівнянь.

При описанні САУ широко використовують символічну форму запису лінійних диференціальних рівнянь. Для цього вводять позначення *p* для операції диференціювання, тобто $d/dt \equiv p$; $d^i/dt^i \equiv p^i$.

З урахуванням цього рівняння (3.5) набуде вигляду:

$$a_n p^n y(t) + a_{n-1} p^{n-1} y(t) + \ldots + a_1 p y(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m p^m x(t) + b_{m-1} p^{m-1} x(t) + \ldots + b_1 p x(t) + b_0 x(t). \quad (3.16)$$

При запису і перетворенні диференціальних рівнянь оператор **p** можна розглядати як алгебраїчний множник, а вираз py(t) - як добуток, що не володіє властивістю комутативності, тобто не можна записати y(t)p.

Винесемо x(t) і y(t) за дужки:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\cdot y(t) =$$
$$= (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)\cdot x(t). \quad (3.17)$$

Введемо позначення:

$Q(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots a_1 p + a_0$ - власний оператор САК (оператор при вихідній величині);

$R(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots b_1 p + b_0$ - оператор впливу (оператор при вхідній величині).

Тоді рівняння (5.2) можна записати у вигляді:

$$Q(p)\cdot y(t) = R(p)\cdot x(t). \qquad (3.18)$$

Уведемо поняття передавальної функції.

Передавальною функцією в операторній формі називається відношення оператора впливу до власного оператора:

$$W(p) = R(p)/Q(p). \qquad (3.19)$$

Тоді рівняння системи може бути записано в більш компактній формі:

$$y(t) = W(p)\cdot x(t) \qquad (3.20)$$

Рівняння (3.18), (3.19), (3.20) називають рівняннями в *символічній* або *операторній* формі запису.

У курсі ТАУ прийнята стандартна форма запису лінійних диференціальних рівнянь, при якій члени, що містять вихідну величину та її похідні, записують у лівій частині рівняння, а решту членів - у правій частині. Коефіцієнт при вихідній величині y(t) роблять рівним одиниці.

Якщо до рівняння (3.5) застосувати перетворення Лапласа, то отримаємо його в *операторній* формі:

$$\begin{aligned} &a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ &= b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \ldots + b_1 s X(s) + b_0 X(s), \end{aligned} \qquad (3.21)$$

або

$$\begin{aligned} &(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) Y(s) = \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) X(s). \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Зовні рівняння (3.17) та (3.22) схожі, але вони принципово відрізняються одне від одного, оскільки в рівнянні (3.17) символ p позначає оператор диференціювання *d/dt*, а змінні *x(t)* та *y(t)* є реальними функціями часу. Тобто рівняння залишається диференційним.

Рівняння (3.22) – алгебраїчне, в ньому символ **s** позначає комплексну змінну, а величини *X(s)* і *Y(s)* є *комплексними зображеннями* фізичних *функцій часу x(t)* та *y(t)*.

Крім того, схожість даних рівнянь можлива, тільки якщо система стаціонарна, тобто коефіцієнти a_i, b_j постійні, а початкові умови для диференціального рівняння нульові.

Операційна форма запису рівнянь проста і зручна, оскільки перетворити та розв'язати алгебраїчне рівняння простіше, ніж диференціальне. Це забезпечило її широке застосування в теорії автоматичного управління.

3.4 Передавальна функція за Лапласом.

Передавальною функцією за Лапласом називається відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини за нульовими початковими умовами.

Із (3.22) отримуємо:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}. \qquad (3.23)$$

Тоді рівняння (3.20) можна записати у вигляді

$$Y(s) = W(s) \cdot X(s). \qquad (3.24)$$

Знаменник передавальної функції (3.23) є *характеристичним поліномом* системи. Якщо його прирівняти до нуля, отримаємо *характеристичне рівняння* системи автоматичного управління, тобто

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0. \qquad (3.25)$$

Корені характеристичного рівняння визначають характер руху системи і називаються *полюсами* передавальної функції, а корені чисельника називаються *нулями* передавальної функції. У полюсах функція W(s) перетворюється на нескінченність, а в нулях вона стає рівною нулю. Розміщення полюсів на комплексній s-площині визначає характер *власного (вільного) руху* системи.

Передавальна функція системи W(s) та її часові функції h(t) і w(t) пов'язані між собою:

L{h(t)} = W(s)/s - зображення перехідної функції;

L{w(t)} = W(s) - зображення імпульсної перехідної функції.

Звідси, відповідно, можна записати:

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}, \quad h(t) = L^{-1}\{W(s)/s\}. \qquad (3.26)$$

Співвідношення (5.11) дозволяють знайти перехідну та імпульсну перехідну функції системи за її відомою передавальною функцією W(s). Для цього можуть бути використані таблиці зображень основних елементарних функцій чи теорема розкладу.

3.5 Перетворення Фур'є. Частотні характеристики систем.

Перетворення Фур'є є окремим випадком перетворення Лапласа за умови: $\sigma=0$, тобто $s = j\omega$.

Тоді відповідно до (4.1) перетворення Фур'є має вигляд:

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad (3.27)$$

або в символічній формі:

$$x(t) \to X(j\omega); \; X(j\omega) = F\{x(t)\}, \qquad (3.28)$$

де F - оператор Фур'є.

Усі теореми та властивості перетворення Лапласа справедливі й для перетворення Фур'є (у частотній області). Потрібно лише змінну s замінити на $j\omega$.

Оскільки $W(s)=Y(s)/X(s)$, то з урахуванням сказаного вище можна записати:

$$W(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega). \qquad (3.29)$$

Цю передавальну функцію називають *частотною* або *комплексною передавальною функцією* (КПФ). Частотна передавальна функція - це відношення Фур'є-зображення вихідної величини до Фур'є-зображення вхідної величини за нульових початкових умов.

Частотна передавальна функція $W(j\omega)$ є комплексною функцією від змінної ω. Її, як і будь-яке комплексне число, можна записати в алгебраїчній та показниковій формі:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (3.30)$$

де $U(\omega) = \mathrm{Re}\{W(j\omega)\}$ - дійсна частина КПФ, яка називається *дійсною частотною функцією;* графік цієї функції називається *дійсною частотною характеристикою* (ДЧХ);

$V(\omega) = \mathrm{Im}\{W(j\omega)\}$ - уявна частина КПФ, яка називається *уявною частотною функцією,* а її графік - *уявною частотною характеристикою* (УЧХ);

$A(\omega) = |W(j\omega)|$ - модуль КПФ - *амплітудна частотна функція*, причому

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}\ . \qquad (3.31)$$

Графік цієї функції називають *амплітудною частотною характеристикою* (АЧХ);

φ(ω) = Arg{W(jω)} - аргумент КПФ, який називають *фазовою частотною функцією:*

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\ V(\omega)/U(\omega). \qquad (3.32)$$

Графік цієї функції називається *фазовою частотною характеристикою* (ФЧХ).

Пояснимо *фізичний зміст* АЧХ і ФЧХ. Якщо на вхід системи подати гармонічний сигнал з частотою ω: $x(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$, то на виході в усталеному режимі отримаємо гармонічний сигнал тієї самої частоти ω: $y(t)= A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$, амплітуда і початкова фаза якого може відрізнятися від амплітуди та початкової фази вхідного сигналу (рис. 3.2).

АЧХ - це залежність зміни відношення амплітуди вихідного сигналу A_2 до амплітуди вхідного сигналу A_1 від частоти ω вхідного сигналу, тобто

$$A(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1}. \qquad (3.33)$$

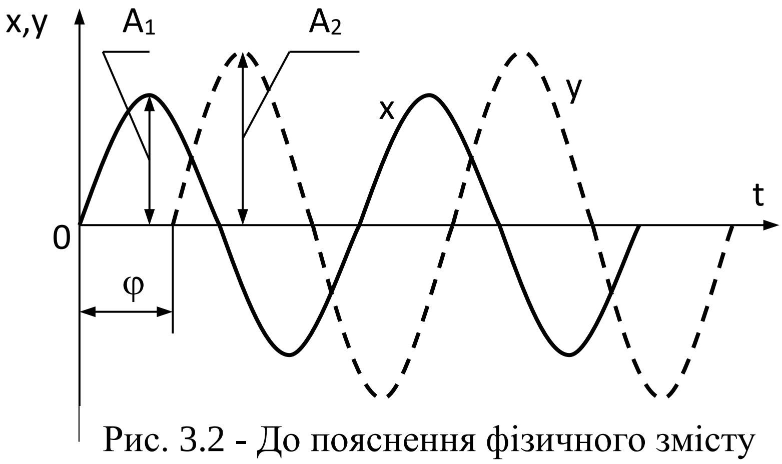


Рис. 3.2 - До пояснення фізичного змісту частотних характеристик

ФЧХ - це залежність зсуву по фазі між вхідним і вихідним сигналами від частоти ω вхідного сигналу, тобто

$$\varphi(\omega)=\varphi_2(\omega)-\varphi_1. \qquad (3.34)$$

Саму частотну передавальну функцію W(jω) називають також *амплітудно-фазовою частотною функцією*, а її графік на комплексній площині - *амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ).*

На комплексній площині (рис. 3.3) комплексну передавальну функцію W(jω) визначає вектор ОС, довжина якого дорівнює A(ω), а аргумент (кут між вектором і дійсною додатною піввіссю) - φ(ω).

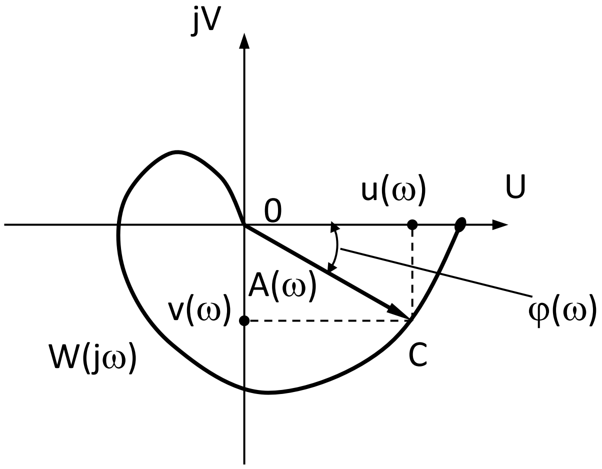


Рис. 3.3 - Амплітудно-фазова частотна характеристика

Крива, яку описує кінець вектору функції W(jω) при зміні частоти ω від 0 до ∞, називається АФЧХ.

Окрім перелічених частотних характеристик (АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ДЧХ, УЧХ), під час аналізу та синтезу САК широко застосовуються також *логарифмічні частотні характеристики* (ЛЧХ):

ЛАЧХ - логарифмічна амплітудна частотна характеристика;

ЛФЧХ - логарифмічна фазова частотна характеристика;

ЛЧХ - це ті самі частотні характеристики системи, але побудовані в іншій системі координат:

- по вісі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі: на поділці, що відповідає значенню lg(ω), пишуть значення ω; одиницею виміру слугує *декада* - інтервал, на якому частота змінюється в десять разів;
- по вісі ординат значення A(ω) відкладають у децибелах (дБ), а значення φ(ω)- у градусах або радіанах.

Логарифмічною амплітудною частотною характеристикою системи називають АЧХ цієї системи, виражену в децибелах і побудовану в логарифмічному масштабі частот.

ЛАЧХ та АЧХ зв’язані співвідношенням:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \qquad (3.35)$$

Логарифмічною фазовою частотною характеристикою САУ називають залежність фази φ, виражену в градусах чи радіанах, від частоти ω в логарифмічному масштабі.

ЛЧХ мають переваги перед звичайними АЧХ та ФЧХ: вони більш наочні та прості в побудові. Системи координат ЛАЧХ та ЛФЧХ показані на рис. 3.4.

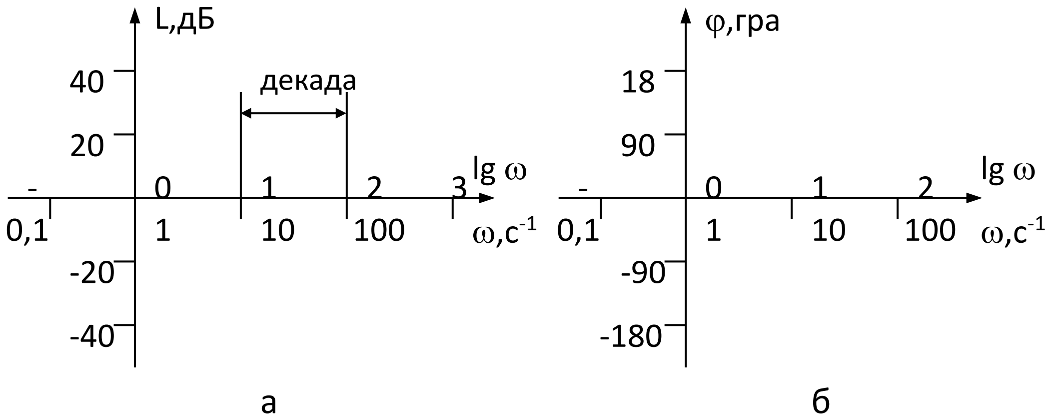


Рис. 3.4 - Системи координат логарифмічних частотних характеристик ЛАЧХ (а) та ЛФЧХ (б)

Висновки.

Класичний метод дослідження лінійних систем автоматичного управління ґрунтується на складанні та подальшому розв’язку диференціальних рівнянь, що зв’язують вихідну координату y(t) з вхідним сигналом x(t). Диференціальні рівняння - це *перша форма математичної моделі САУ*. Через складність реальних систем і впливів складання та розв’язок цих рівнянь є складною задачею, яка потребує застосування обчислювальних засобів.

Мета дослідження спрощується при введенні *другої форми математичної моделі* - передавальної функції за Лапласом, оскільки перетворення Лапласа дозволяє замінити диференціальні рівняння на алгебраїчні.

Третя форма математичної моделі - частотні характеристики - дозволяють розв’язувати алгебраїчні рівняння графічно, що також спрощує задачу. Крім того, частотні характеристики дають ясне фізичне тлумачення властивостей системи.

Контрольні питання:

1. Що собою представляє математична модель системи?

2. Що собою представляє рівняння динаміки, рівняння статики?

3. Чим визначаються власний і вимушений рухи системи?

4. Що таке статична характеристика системи? Наведіть приклади основних статичних характеристик систем.

5. У чому полягає перетворення Лапласа. У чому його сутність?

6. Навести основні властивості перетворення Лапласа.

7. Які форми запису диференціальних рівнянь використовують у ТАУ?

8. Що таке передавальна функція за Лапласом?

9. Що таке характеристичне рівняння системи?

10. Як пов’язані між собою передавальна та перехідна функції?

11. У чому полягає перетворення Фур’є?

12. Що таке комплексна передавальна функція?

13. Які основні частотні характеристики систем?

14. Який фізичний зміст АЧХ, ФЧХ?

15. Як будується АФЧХ системи за відомою передавальною функцією?

16. Що таке логарифмічні частотні характеристики? У якій системі координат вони будуються?

4. ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Реальні САУ - це дуже складні системи, до складу яких входять різноманітні елементи. Це робить задачу аналізу та синтезу САУ дуже складною. Тому в курсі ТАУ вводиться поняття *динамічної ланки* – математичної частини системи (незалежно від фізичної природи та конструкції), що описується рівнянням певного типу. Це дозволяє звести багато різних реальних елементів САУ до обмеженого числа типових ланок, а всі реальні САУ розглядати як системи, що складаються із з'єднаних між собою типових ланок.

У курсі ТАУ виділяють наступні ланки: пропорційну, інтегруючу, диференціальну, аперіодичну, коливальну, консервативну, форсуючу першого та другого порядку, ланку запізнення та деякі інші ланки.

4.1 Пропорційна ланка.

Пропорційною (підсилювальною, безінерційною) називається ланка, яка описується рівнянням:

$$y(t) = k \cdot x(t), \tag{4.1}$$

де k - коефіцієнт пропорційності (підсилення).

Використовуючи властивості перетворення Лапласа, маємо операційне рівняння: $Y(s)=k \cdot X(s)$. Звідси передавальна функція ланки за Лапласом:

$$W(s) = Y(s)/X(s) = k.$$

Комплексна передавальна функція та частотні функції ланки мають вигляд:

$$W(j\omega) = k;\ U(\omega) = k;\ V(\omega) = 0;\ A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = k;$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg} V(\omega)/U(\omega) = 0.$$

На рис. 4.1 показані відповідні частотні характеристики.

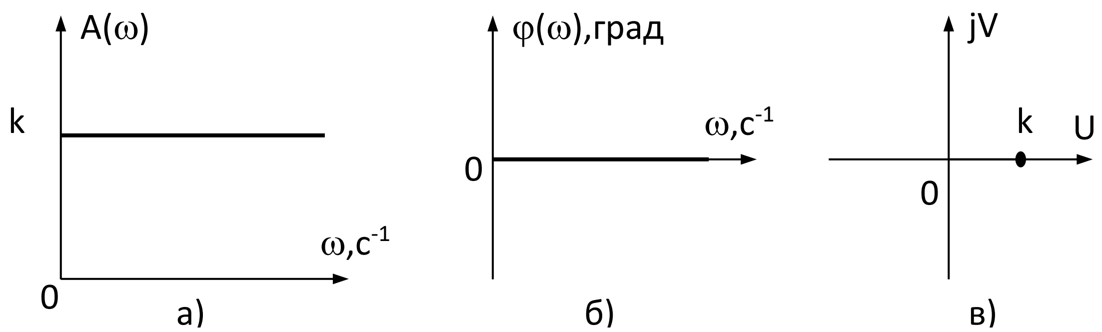


Рис. 4.1 - Частотні характеристики пропорційної ланки: АЧХ(а), ФЧХ (б), АФЧХ (в)

Часові функції та відповідні характеристики (рис. 4.2) мають вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t); \quad w(t) = h'(t) = k \cdot \delta(t) = \delta(t).$$

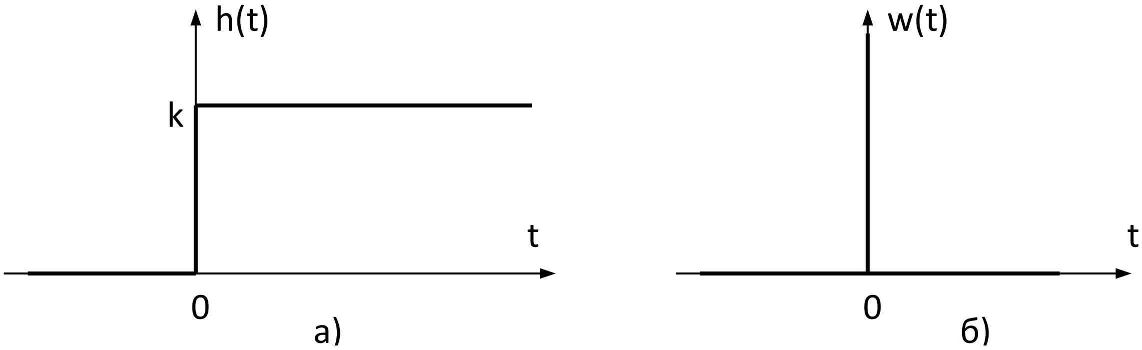


Рис. 4.2 - Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики пропорційної ланки

Для пропорційної ланки характерна відсутність накопичувачів енергії, і тому вона миттєво копіює вхідний сигнал, змінюючи його за величиною в k разів.

Прикладами елементів, які можуть бути описані пропорційною ланкою, є: редуктори, трансформатори, підсилювачі, датчики, тощо.

Ідеальних підсилювальних елементів не існує, але таким можна вважати елемент, інерційність якого не відбивається на поведінці САУ.

4.2 Диференціальна ланка.

Диференціальною називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}. \tag{4.2}$$

тобто вихідний сигнал пропорційний швидкості зміни вхідного сигналу.

Диференційне рівняння в операторній формі та передавальна функція ланки:

$$Y(s) = k \cdot s \cdot X(s); \; W(s) = k \cdot s.$$

Частотні функції мають вигляд (рис. 4.3):

$$W(j\omega) = k \cdot j\omega; \; U(\omega) = 0; \; V(\omega) = k \cdot \omega;$$

$$A(\omega) = k \cdot \omega; \quad \varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,(k \cdot \omega/0) = \mathrm{arctg}\,\infty = +\pi/2.$$

Зсув фази гармонійного сигналу не залежить від частоти і дорівнює $+\pi/2$. АФЧХ ланки співпадає з додатною уявною піввіссю.

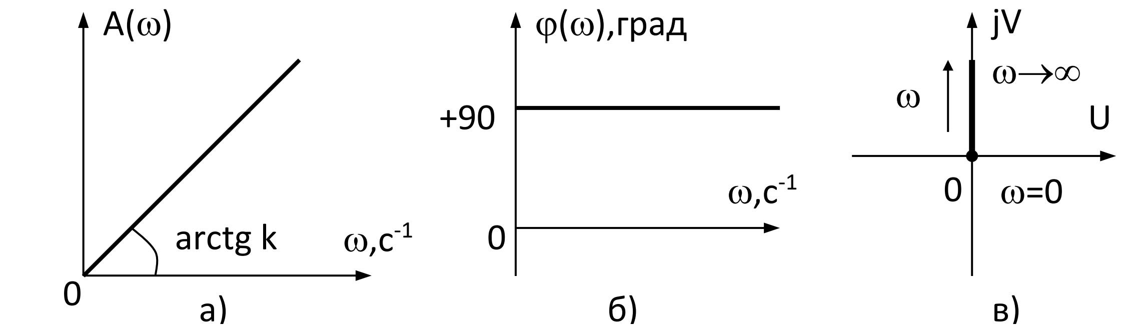


Рис. 4.3 - Частотні характеристики диференціальної ланки: АЧХ(а), ФЧХ (б), АФЧХ (в)

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика ланки:

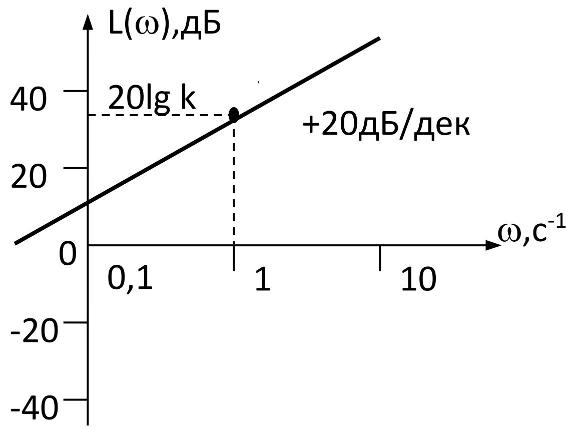


Рис. 4.4 - ЛАЧХ диференціальної ланки

$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k\omega = 20\lg k + {}$ $+20\lg\,\omega$;

при $\omega = 1с^{-1}$ $L(\omega) = 20\lg k$ (дБ);

при $\omega = 10с^{-1}$ $(\omega) = 20\lg k + 20$ (дБ);

при $\omega = 100с^{-1}$ $L(\omega) = 20\lg k + 40$ (дБ);

тобто ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить через точку з координатами ($\omega = 1с^{-1}$; $L(\omega) = 20\lg k$) та має ухил +20дБ/дек (плюс двадцять децибел на декаду). Це вказує на те, що логарифмічна амплітуда збільшується на 20 дБ за одну декаду (рис. 4.4).

Часові функції та характеристики диференціальної ланки (рис. 4.5):

$$h(t) = k\cdot 1(t);\quad w(t) = h'(t) = k\cdot\delta(t) = \delta(t).$$

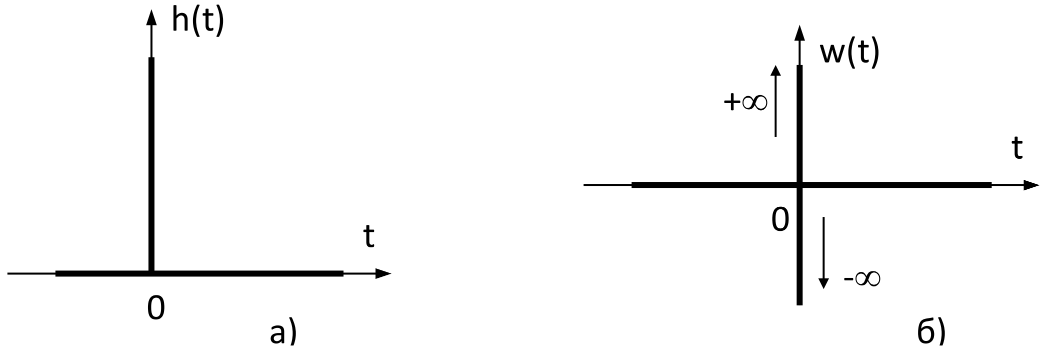


Рис. 4.5 - Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики диференціальної ланки

До диференціальних ланок можна віднести елементи автоматичних систем, у яких вихідна координата в усталеному режимі пропорційна похідній вхідного впливу, що змінюється, і дорівнює нулю, якщо цей вплив є постійним. Прикладами таких елементів можуть бути спідометр, тахогенератор (якщо вхідна величина - кут повороту валу).

В реальних ланках теорії автоматичного управління порядок чисельника не може бути вище порядку знаменника. Тому реальні диференціальні ланки є інерційними і описуються передавальними функціями вигляду:

$$W(s) = ks/(Ts+1),$$

де T – постійна часу, що враховує інерційні властивості реальної диференціальної ланки. Чим менше значення T, тим ближче властивості реальної ланки до властивостей ідеальної диференціальної ланки.

4.3 Інтегруюча ланка.

Інтегруючою називається ланка, яка описується інтегральним рівнянням

$$y(t) = k\int_0^t x(t)dt. \tag{4.3}$$

Рівняння у операторній формі і передавальна функція ланки:

$$Y(s) = k\cdot X(s)/s;\ \ W(s) = k/s.$$

КПФ та частотні функції мають вигляд (рис.4.6):

$$W(j\omega) = k/j\omega = -j\cdot k/\omega;\ U(\omega) = 0;\ V(\omega) = -k/\omega;$$
$$A(\omega) = k/\omega;\ \varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(-\infty) = -\pi/2.$$

Зсув фази гармонійного сигналу не залежить від частоти і дорівнює $-\pi/2$. АФЧХ ланки співпадає з від'ємною уявною піввіссю.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика ланки:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k/\omega = 20\lg k - 20\lg \omega;$$
$$\text{при } \omega = 1c^{-1} \quad L(\omega) = 20\lg k \text{ (дБ)};$$
$$\text{при } \omega = 10\ c^{-1} \quad L(\omega) = 20\lg k - 20 \text{ (дБ)};$$
$$\text{при } \omega = 100\ c^{-1} \quad L(\omega) = 20\lg k - 40 \text{ (дБ)};$$

тобто ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить через точку з координатами ($\omega=1c^{-1}$; $L(\omega)=20\lg k$) та має ухил -20дБ/дек (мінус двадцять децибел на декаду). Вона перетинає вісь частот при $\omega = k$ (рис. 4.6 г).

Часові функції ланки:

$$h(t) = k\int_0^t 1(t)dt = kt; \quad w(t) = \dot{h}(t) = k \cdot 1(t).$$

Відповідні характеристики інтегруючої ланки показані на рис. 4.6.

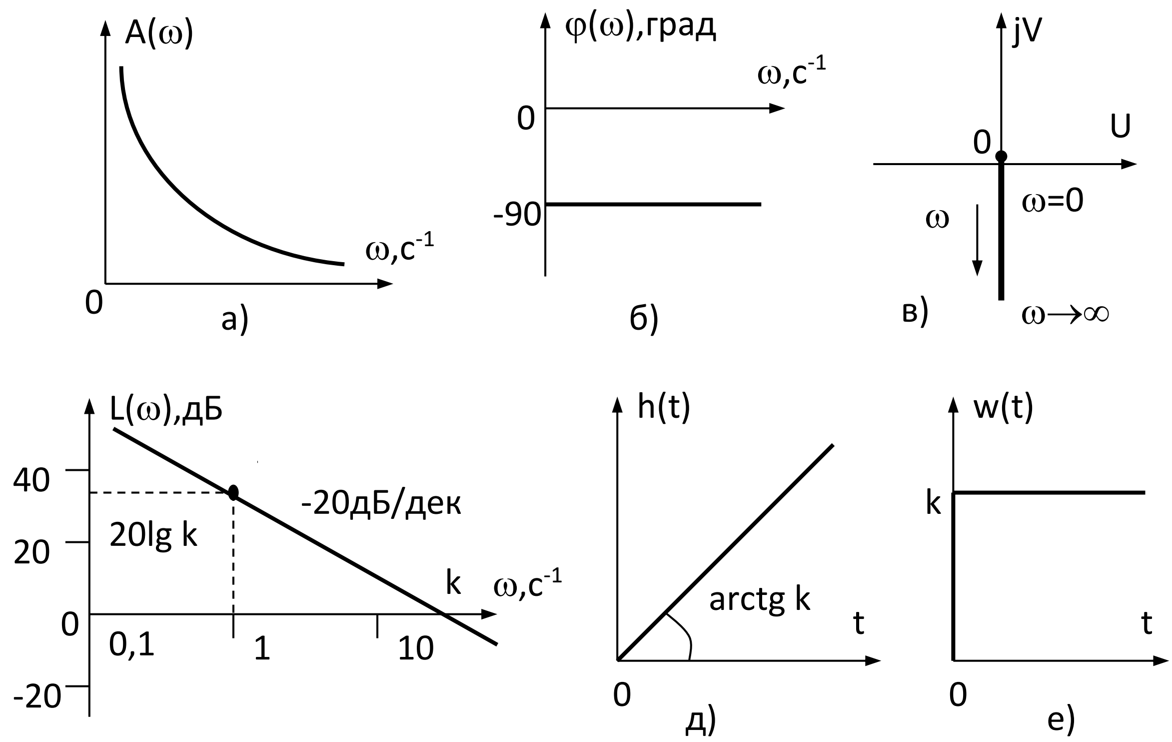


Рис. 4.6 - Частотні та часові характеристики інтегруючої ланки: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г); перехідна (д), імпульсна перехідна (е)

Інтегруючі ланки відповідають елементам, в яких при постійному вхідному сигналі встановлюється постійна швидкість зміни вихідної координати: двигун постійного струму з незалежним збудженням, якщо вихідна величина - кут повороту; редуктор, у якого вхідна величина - кутова швидкість, а вихідна - кут повороту валу.

Поряд з ідеальною інтегруючою ланкою використовуються реальні інтегруючі ланки, які мають передавальну функцію

$$W(s) = k/[s(Ts+1)],$$

де T – постійна часу, що враховує інерційні властивості реальної інтегруючої ланки.

4.4 Аперіодична ланка.

Аперіодичною називається ланка, яка описується диференційним рівнянням першого ступеня:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \qquad (4.4)$$

Цю ланку називають також інерційною. Вона характеризується двома параметрами: постійною часу T (інерційні властивості ланки) та коефіцієнтом передачі k (підсилювальні властивості).

Операційне рівняння має вигляд:

$$TsY(s) + Y(s) = kX(s); \; (Ts + 1)Y(s) = kX(s);$$

звідси передавальна функція ланки:

$$W(s) = k/(Ts + 1).$$

Частотні функції ланки мають вигляд (рис. 4.7):

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + Tj\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \; V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}; \; \phi(\omega) = -arctg(T\omega).$$

При зміні ω від 0 до ∞, φ(ω) змінюється від 0 до - π/2; φ(1/T) = - π/4.

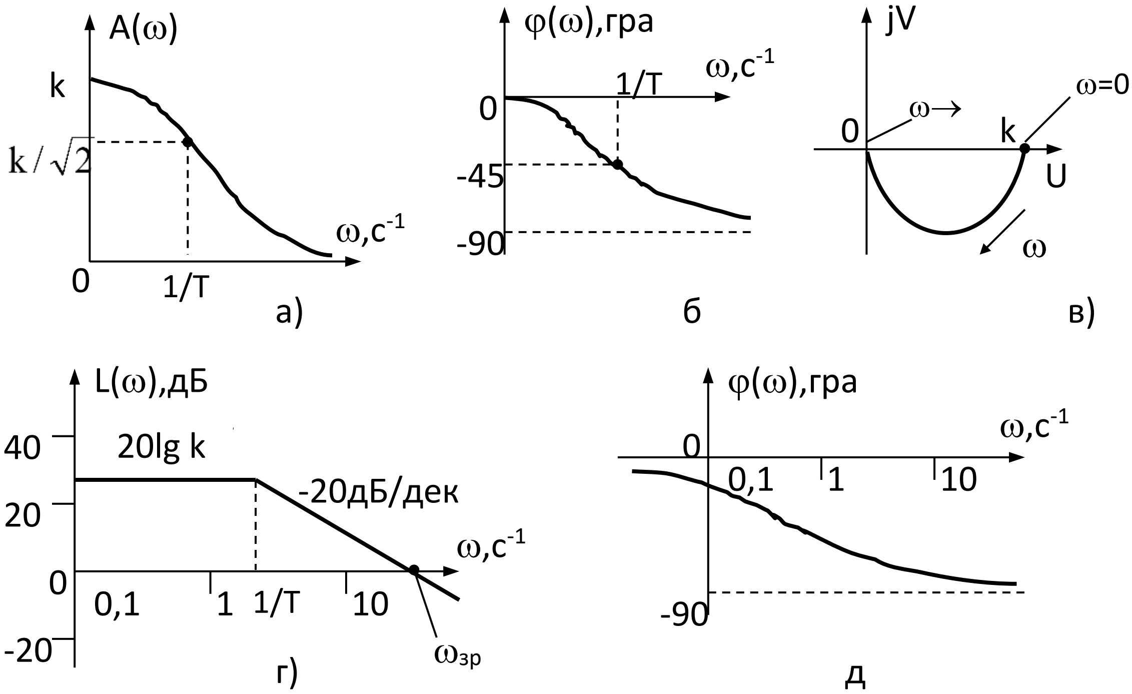


Рис. 4.7 - Частотні характеристики аперіодичної ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г); ЛФЧХ (д)

АФЧХ ланки являє собою півколо діаметра k (рис. 4.7).

Побудуємо ЛАЧХ аперіодичної ланки.

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2};$$

при ω << 1/T (зона низьких частот) під коренем можна знехтувати другим доданком, а при ω >> 1/T (зона високих частот) - першим доданком, тобто

$L_1(\omega) = 20\,lg\,k - 20\,lg\,1 = 20\,lg\,k$- горизонтальна пряма;
$L_2(\omega) = 20\,lg\,k - 20\,lg\,T\,\omega$ - пряма з ухилом -20 дБ/дек.

Обидві прямі перетинаються в точці, яку можна знайти із виразу:

$L_1(\omega) = L_2(\omega)$, тобто $20\,lg\,k = 20\,lg\,k - 20\,lg\,T\,\omega.$
Звідси lgTω = 0; Tω = 1; ω = 1/T.

Частота ω = 1/T, в якій перетинаються дві прямі (асимптоти), називається *частотою спряження*.

Частота, при якій ЛАЧХ перетинає вісь частот (L=0 дБ), називається *частотою зрізу* $\omega_{зр}$. Для цієї частоти маємо:

$$L(\omega_{зр}) = 20\,lg\,A\,(\omega_{зр}) = 20\,lg\frac{A_2(\omega_{зр})}{A_1(\omega_{зр})} = 0.$$

Звідси $A_2/A_1 = 1$, тобто $A_2=A_1$: *на частоті зрізу амплітуди вхідного та вихідного сигналів рівні між собою*.

Побудована за таких припущень ЛАЧХ називається *асимптотичною*. Вона є наближеною. Точна та наближена ЛАЧХ найбільш сильно відрізняються в частоті спряження (відхилення досягає 3 дБ).

Логарифмічна фазова частотна характеристика асимптотично наближається до нуля при $\omega \to 0$ та до $-\pi/2$ при $\omega \to \infty$.

Розв'язуючи рівняння ланки (4.4) при x(t)=1(t) та за нульових початкових умов (y(0) = 0), отримаємо перехідну функцію ланки (імпульсну перехідну функцію визначимо як похідну від перехідної функції):

$$h(t) = k\left(\,1 - e^{-t/T}\right); \quad w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T}e^{-t/T}.$$

Відповідні часові характеристики ланки наведені на рис. 4.8.

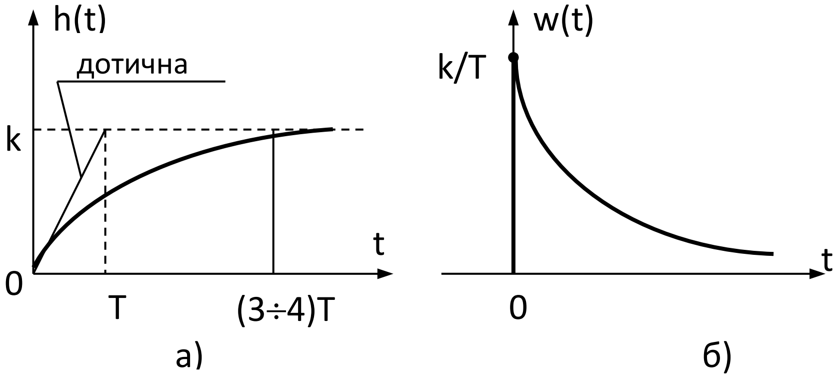


Рис. 4.8 - Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики аперіодичної ланки

Аперіодична ланка відповідає елементам САУ, які містять хоча б один накопичувач енергії (пружина, маса, що рухається, ємність, індуктивність і т.д.). Чим більша величина *T*, тим повільніше розсіюється енергія в аперіодичній ланці.

Прикладами елементів, що описуються аперіодичною ланкою, можуть слугувати RC- ланцюг, LC-ланцюг, двигун постійного струму з незалежним збудженням великої потужності (з великою електромеханічною сталою часу $T_м$), якщо вихідна величина - кутова швидкість валу двигуна.

4.5 Коливальна ланка.

Коливальною називається ланка, яка описується рівнянням другого ступеня

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \tag{4.5}$$

де ξ - коефіцієнт затухання або демпфірування ($0 < \xi < 1$).

Операційне рівняння:

$$Y(s)(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1) = kX(s).$$

Передавальна функція ланки:

$$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1.}$$

Частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + 2\xi Tj\omega};\ A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}.$$

При ω=1/T амплітуда A(ω)=k/(2ξ), тобто для різних значень коефіцієнта затухання ξ на частоті ω=1/T, яку називають *резонансною*, амплітуда набуває значень від k/2 до ∞ (рис. 2.16, а: $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$).

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -arctg\,\dfrac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}, \; при\; \omega \le 1/T, \\ -\pi - arctg\,\dfrac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}, \; при\; \omega > 1/T, \end{cases}$$

тобто при $\omega \to \infty$ $\varphi(\omega) = -\pi$.

Асимптотична ЛАЧХ побудована аналогічно ЛАЧХ аперіодичної ланки:

$L_1(\omega) = 20\,lg\,k$, при ω << 1/T;

$L_2(\omega) = 20\,lg\,k - 40\,lg\,T\,\omega$, при ω>> 1/T - пряма з ухилом -40 дБ/дек.

У частоті спряження ω=1/T при малих значеннях коефіцієнта затухання асимптотична ЛАЧХ дуже відрізняється від точної ЛАЧХ.

Частотні характеристики ланки наведені на рис. 4.9.

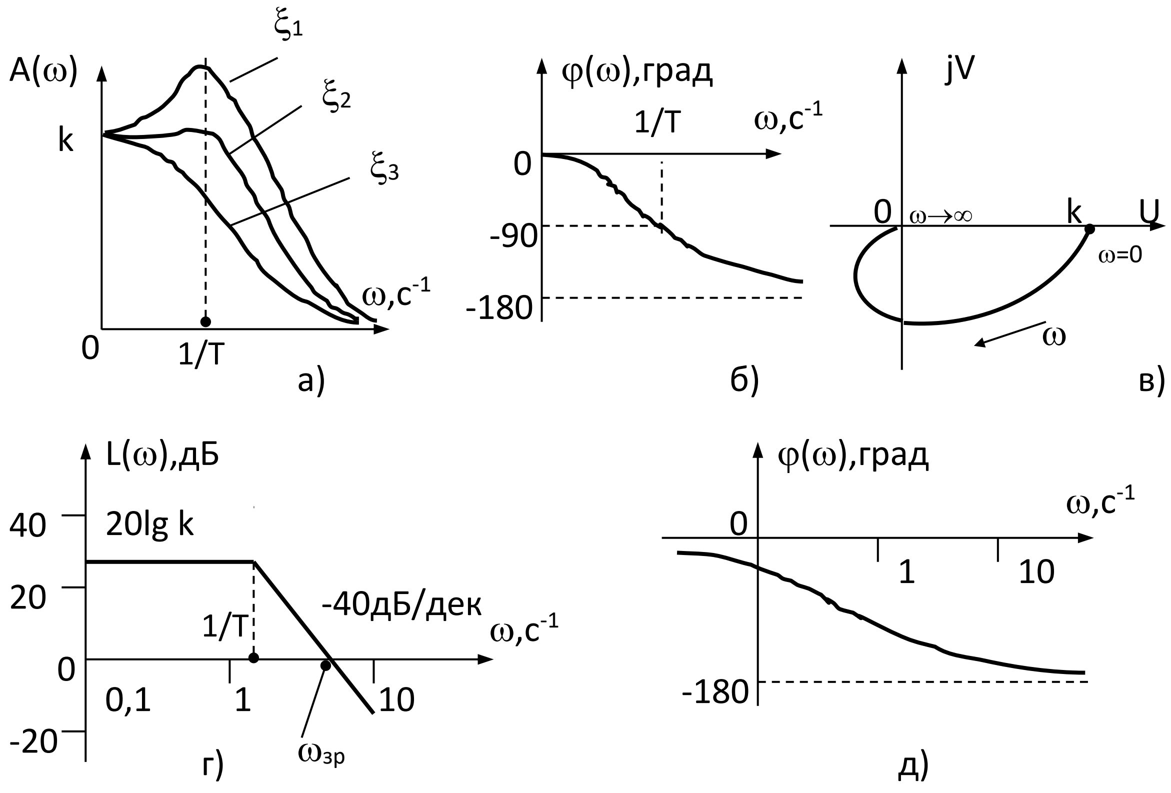


Рис. 4.9 - Частотні характеристики коливальної ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г); ЛФЧХ (д)

Розв’язуючи рівняння (4.5) ланки при x(t)=1(t) та за нульових початкових умов (y(0)=0; y'(0)=0), отримаємо перехідну функцію ланки:

$$h(t) = k\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} sin(\beta t + \phi_0)\right),$$

де $\alpha = \xi/T;\; \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};\; \phi_0 = arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$

Перехідна характеристика має вигляд затухаючих коливань, усталене значення яких дорівнює коефіцієнту k (рис. 4.10, а).

Імпульсна перехідна функція ланки(рис. 4.10, б):

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k(\alpha^2+\beta^2)}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta\, t.$$

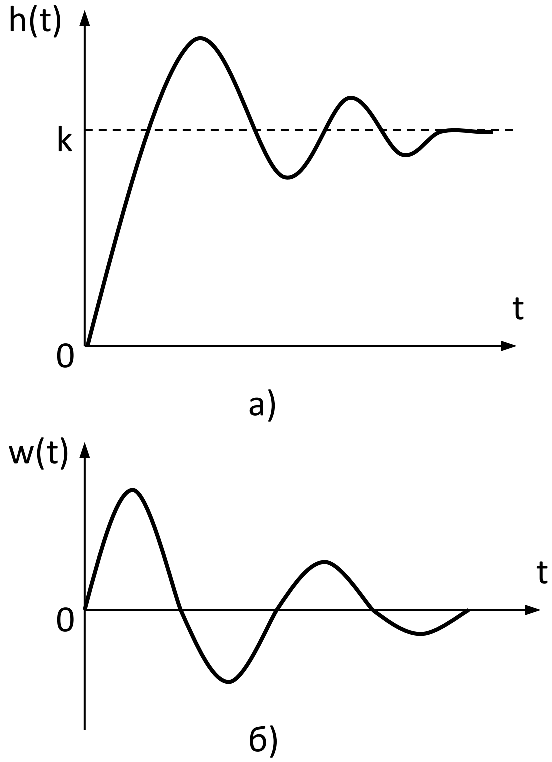


Рис. 4.10 - Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики коливальної ланки

До коливальних ланок належать елементи САУ, що містять два накопичувачі енергії, в одному з яких накопичується потенціальна енергія, а в іншому - кінетична. Окрім того, має бути елемент, що розсіює цю енергію, тобто канал, по якому накопичувачі обмінюються енергією. Мірою витрати енергії в каналі обміну і є коефіцієнт затухання ξ: зі збільшенням витрат збільшується ξ; зі зменшенням ξ збільшується коливальність процесу.

Прикладами пристроїв, що описуються коливальною ланкою, можуть бути: двигун постійного струму з незалежним збудженням малої потужності, в якого електромеханічна постійна часу $T_м$ досить мала порівняно з електромагнітною $T_е$ ($T_м$ < 4 $T_е$); RLC–контур (рис. 2.18) (L - накопичувач кінетичної енергії, C - накопичувач потенціальної енергії, R - елемент, на якому розсіюється теплова енергія); вантаж на пружині (пружина - накопичувач потенціальної енергії; маса, що рухається, - накопичувач кінетичної енергії, розсіювання відбувається в демпфері).

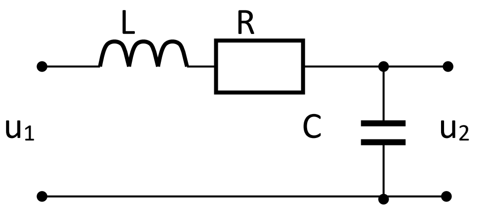


Рис. 4.11 – RLC контур

4.6 Консервативна ланка.

Якщо опір каналу обміну енергії дорівнює нулю, тобто ξ=0, то коливальна ланка вироджується в консервативну (резонансну) ланку, рівняння якої має вигляд:

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+y(t)=k\cdot x(t). \qquad (4.6)$$

Цьому рівнянню відповідає передавальна функція

$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2+1}.$$

Частотні функції ланки:

$$W(j\omega)=\frac{k}{1-T^2\omega^2};\;\; U(\omega)=\frac{k}{1-T^2\omega^2};\; V(\omega)=0;$$

$A(\omega)=\frac{k}{1-T^2\omega^2}$; φ(ω) = 0, при ω ≤ 1/T; $\phi(\omega)=-\pi$, при $\omega>1/T$.

Із цих виразів видно, що АЧХ на частоті $\omega=1/T$ має розрив, а ФЧХ - східчасто змінює своє значення з 0 на -π (рис. 4.12).

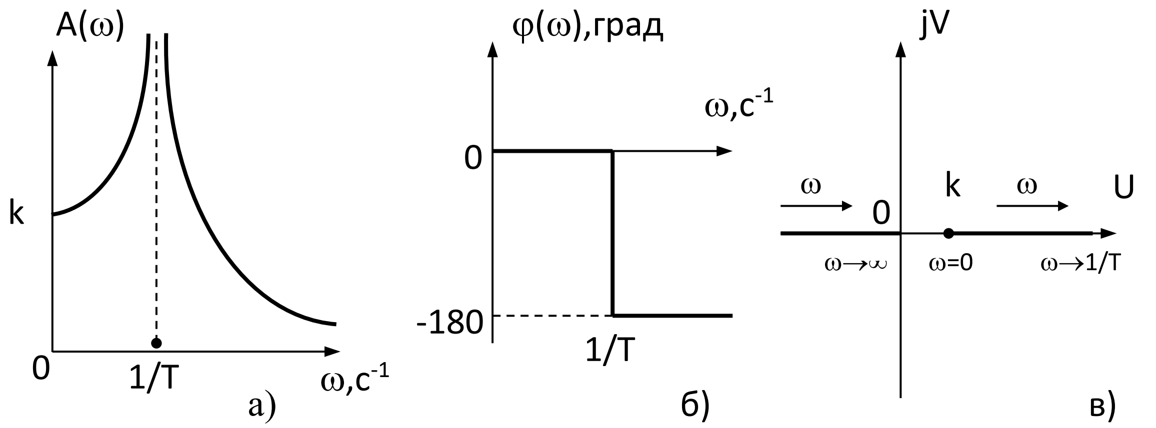


Рис. 4.12 - Частотні характеристики консервативної ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в)

Перехідна функція ланки:

$$h(t)=k(1-\cos\omega_1 t);\;\omega_1=1/T.$$

Перехідна характеристика (рис. 4.13,а) має вигляд незатухаючих гармонічних коливань навколо значення k .

Імпульсна перехідна функція:

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} sin \frac{t}{T}.$$

Відповідна характеристика також має вигляд незатухаючих гармонічних коливань, але навколо нуля (рис. 4.13,б).

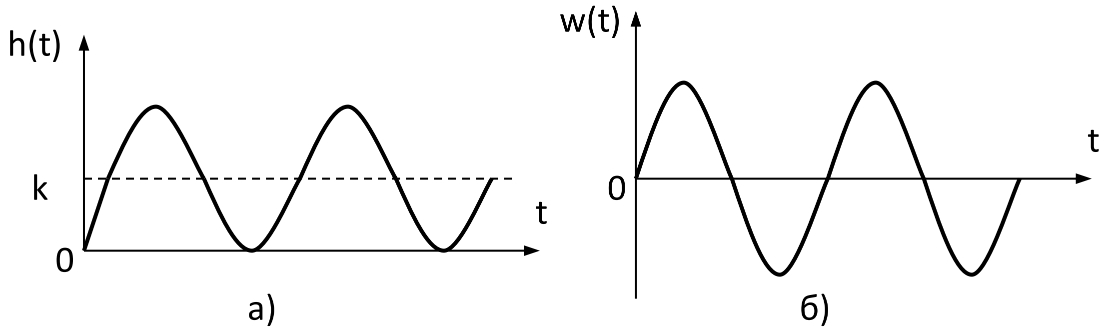


Рис. 4.13 - Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики консервативної ланки

4.7 Аперіодична ланка другого порядку.

Якщо коефіцієнт затухання ξ≥1, то передавальну функцію коливальної ланки можна привести до вигляду:

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}, \quad (4.7)$$

де $T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$.

Цю ланку можна уявити як послідовне з’єднання двох аперіодичних ланок першого порядку.

Відмітимо, що аперіодичною ланкою другого порядку може бути описаний двигун постійного струму з незалежним збудженням середньої потужності, для якого $T_м \geq 4T_е$.

4.8 Форсуюча ланка.

Форсуючою називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k\left(T\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right). \quad (4.8)$$

Операційне рівняння і передавальна функція:

$$Y(s) = k(TsX(s) + X(s)); \;\; W(s) = k(Ts + 1).$$

Частотні функції (рис. 4.14):

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1);\ U(\omega) = k;\ V(\omega) = kT\omega;$$

$$A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2 + 1};$$

$$\phi(\omega) = arctg(T\omega);\ при\ \omega \to \infty\ \phi(\omega) \to \pi/2.$$

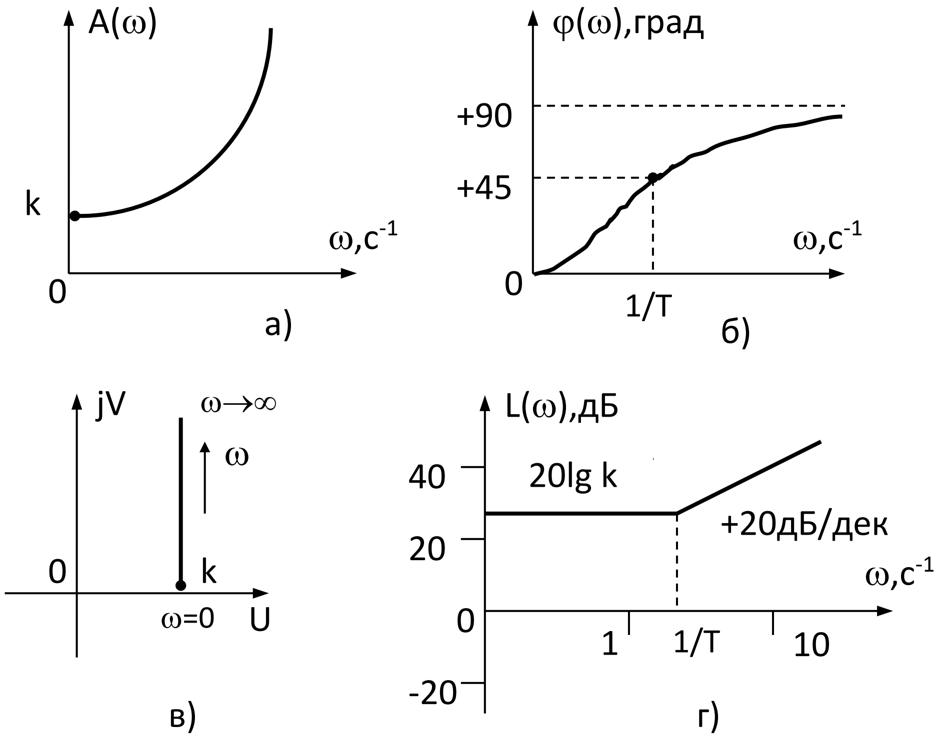


Рис. 4.14 - Частотні характеристики форсуючої ланки: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г)

$$L(\omega) = 20\,lg\,k + 20\,lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}\,;$$

при ω<< 1/T $L_1(\omega) = 20\,lg\,k$;

при ω>> 1/T $L_2(\omega) = 20\,lg\,k + 20\,lg\,T\,\omega$ - пряма з ухилом +20 дБ/дек.

АФЧХ являє собою пряму, що паралельна уявній вісі та перетинає дійсну вісь у точці U = k. Частотні характеристики наведені на рис. 4.14.

Часові функції форсуючої ланки:

$$h(t) = k(T\delta(t) + 1(t));\quad w(t) = k(T\dot{\delta}(t) + \delta(t)).$$

4.9 Форсуюча ланка другого порядку.

Ланка описується рівнянням:

$$y(t) = k\left(T^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right), \tag{4.9}$$

і має передавальну функцію:

$$W(s) = k(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1);\ 0 < \xi < 1.$$

ЛАЧХ та ЛФЧХ ланки наведені на рис. 4.15.

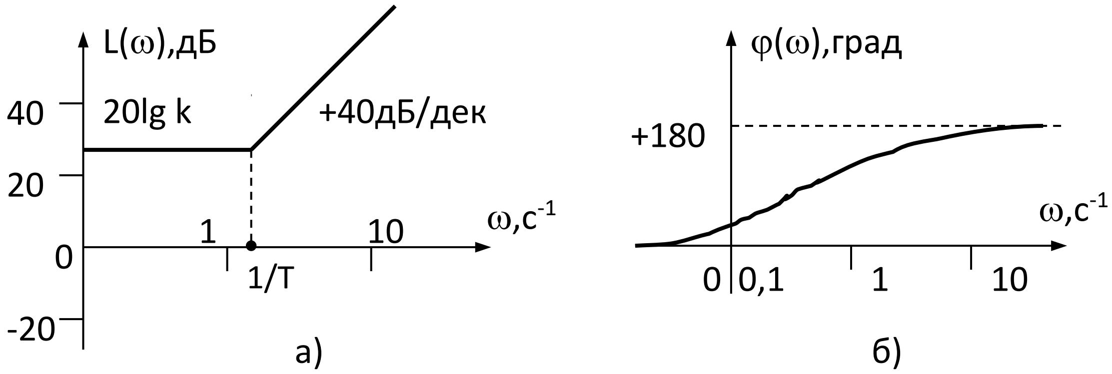


Рис. 4.15 - ЛАЧХ (а) та ЛФЧХ (б) форсуючої ланки другого порядку

Форсуючі ланки першого та другого порядку не можна реалізувати практично, а реальні форсуючі ланки обов'язково містять аперіодичні або коливальні компоненти. Наприклад, ланка, яку називають ланкою *швидкого реагування*, має передавальну функцію

$$W(s) = k\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}.$$

4.10 Ланка запізнення.

Ланка запізнення описується рівнянням

$$y(t) = kx(t - \tau), \qquad (2.45)$$

де k - коефіцієнт передачі, τ - час запізнення.

Використовуючи теорему запізнення (3.11), можна записати передавальну функцію ланки:

$$Y(s) = ke^{-\tau s}X(s); \quad W(s) = ke^{-\tau s}.$$

Частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = ke^{-\tau j\omega};\ A(\omega) = k;\ \varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

АФЧХ ланки являє собою коло з центром у початку координат і радиусом k.

Часові функції мають вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau);\ w(t) = k \cdot \delta(t - \tau) = \delta(t - \tau).$$

Характеристики ланки запізнення наведені на рис. 4.16.

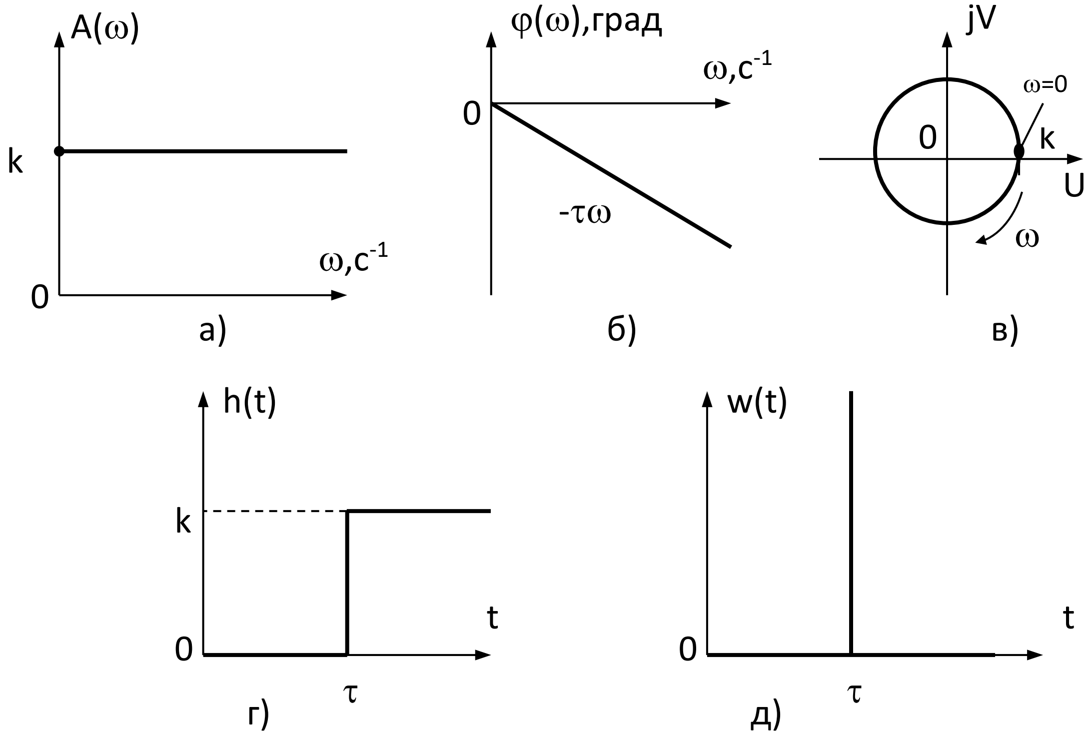


Рис. 4.16 - Характеристики ланки запізнення: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); перехідна (г); імпульсна перехідна (д)

До ланок запізнення можна віднести:

- лінії радіозв’язку (τ - час проходження сигналу);
- довгий трубопровід (τ - час розповсюдження тиску);
- транспортер (τ - час перевезення вантажу).

Контрольні питання:

1. Що таке типова динамічна ланка?
2. Пропорційна ланка, часові та частотні характеристики.
3. Інтегруюча ланка, часові та частотні характеристики.
4. Теоретична диференційна ланка, часові та частотні характеристики.
5. Практична диференційна ланка, часові та частотні характеристики.
6. Аперіодична ланка першого порядку, часові та частотні характеристики.
7. Аперіодична ланка другого порядку, часові та частотні характеристики.
8. Коливальна ланка, часові та частотні характеристики.
9. Консервативна ланка, часові та частотні характеристики.
10. Форсуюча ланка, ч які описуються типовими ланками ТАУ.

5. СТРУКТУРНІ СХЕМИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

Структурною схемою називається графічне зображення математичної моделі САУ у вигляді з’єднання ланок. Структурна схема відображає *динамічні властивості системи*. Її задача - у найбільш наочній формі показати математичну сторону перетворення сигналів окремими елементами та всією системою в цілому.

Структурна схема може бути отримана із функціональної, якщо відомі передавальні функції окремих ланок (або їх диференціальні рівняння) та параметри елементів, що входять до складу системи.

Динамічну ланку зображують у вигляді прямокутника з наведенням вхідних і вихідних величин, а також передавальної функції всередині його. Причому вхідну та вихідну величини записують у вигляді зображень, якщо передавальні функції задають у формі зображень, чи у вигляді оригіналу, якщо передавальна функція задається в операторній формі диференційного рівняння (рис. 5.1).

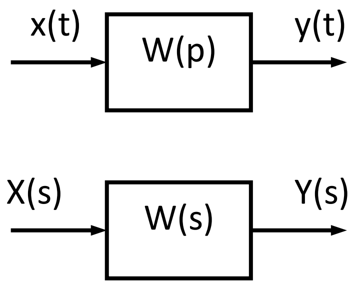


Рис. 5.1 - Зображення ланки на структурній схемі

5.1 Правила перетворення структурних схем.

При визначенні передавальної функції системи використовують ряд правил перетворення структурних схем. Розглянемо основні з них.

Послідовне з’єднання ланок. При послідовному з’єднанні вихідна величина кожної попередньої ланки є вхідною величиною подальшої ланки (рис. 5.2).

Рівняння ланок в операційній формі:

$$X_1 = W_1 \cdot X_0;\ X_2 = W_2 \cdot X_1;\ \ X_3 = W_3 \cdot X_2.$$

Виключивши із цих рівнянь проміжні змінні X_1, X_2, отримаємо:

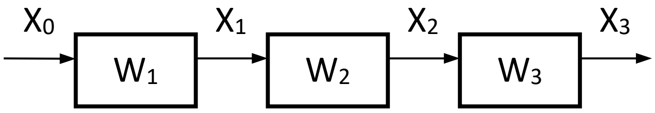


Рис. 5.2 - Послідовне з’єднання ланок

$$X_3 = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot X_0.$$

Передавальна функція системи послідовно з’єднаних ланок дорівнює добутку передавальних функцій усіх ланок, що входять до складу з’єднання.

Таким чином, маємо

$$W = W_1 W_2 W_3 = \prod_{i=1}^{n} W_i. \quad (5.1)$$

Паралельне з’єднання ланок. При паралельному з’єднанні ланок на вхід усіх ланок подається один і той самий сигнал, а вихідні величини додаються (рис. 5.2).

Рівняння паралельно з’єднаних ланок мають вигляд:

$$X_1 = W_1 \cdot X_0; \quad X_2 = W_2 \cdot X_0; \quad X_3 = W_3 \cdot X_0;$$

звідси отримуємо:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = X_0(W_1 + W_2 + W_3);$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \sum_{i=1}^{n} W_i. \quad (5.2)$$

Передавальна функція паралельно з'єднаних ланок дорівнює алгебраїчній сумі передавальних функцій усіх ланок, що входять до з'єднання.

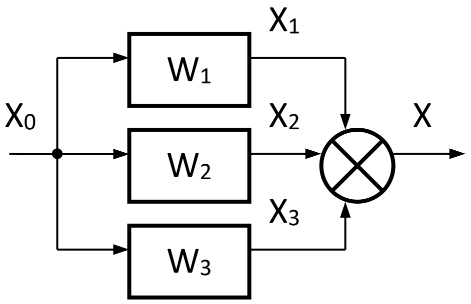


Рис. 5.3 - Паралельне з'єднання ланок

Ланка, охоплена зворотним зв'язком. Якщо вихідний сигнал ланки через будь-яку іншу ланку подається на його вхід, то вважають, що ланка охоплена зворотним зв'язком. При цьому, якщо сигнал зворотного зв'язку x_1 віднімається від вхідного сигналу x_0, то зворотний зв'язок називається *від'ємним.* Якщо сигнали x_0 і x_1 додаються, то зворотний зв'язок називається *додатним*.

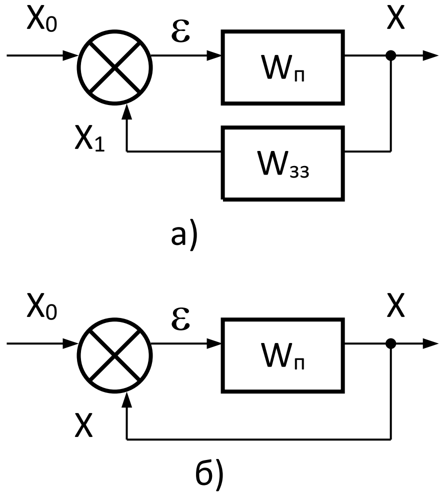


Рис. 5.4 - а) Ланка, охоплена зворотним зв'язком; б) ланка, охоплена одиничним зворотним зв'язком

Якщо зворотний зв'язок від'ємний, то $X = W_п \cdot \varepsilon$; $X_1 = W_{зз} \cdot X$; $\varepsilon = X_0 - X_1$,

де $W_п$ - передавальна функція прямого ланцюга;

$W_{з.з.}$- передавальна функція зворотного зв'язку (рис. 5.4 а).

Звідси маємо:

$$X = W_п(X_0 - X_1) = W_п X_o - W_п W_{зз} X;$$

$$X\,(1 + W_п W_{зз}) = W_п X_o.$$

Таким чином, передавальна функція $W_з$ замкнутого ланцюга дорівнює:

$$W_з = \frac{W_п}{1 + W_п W_{зз}}. \qquad (5.3)$$

Передавальна функція ланки, охопленої від'ємним зворотним зв'язком, дорівнює дробу, в чисельнику якого записується передавальна функція прямого ланцюга (ланки, що охоплюється), а в знаменнику - сума одиниці та добутку передавальних функцій прямого ланцюга та ланки зворотного зв'язку.

Якщо зворотний зв'язок додатний, то аналогічно можна записати:

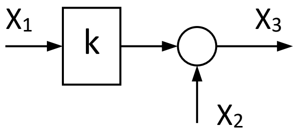
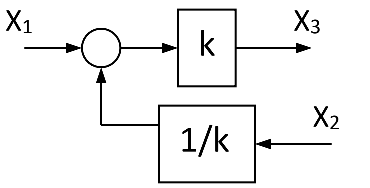
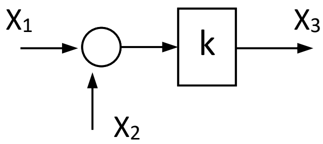
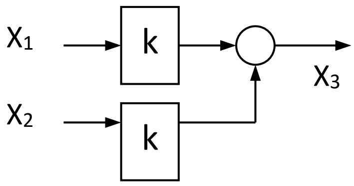
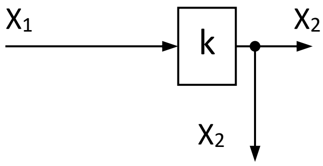
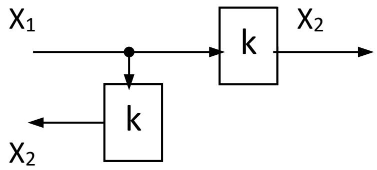
$$W_з = \frac{W_п}{1 - W_п W_{зз}}. \qquad (5.4)$$

Якщо передавальна функція зворотного зв'язку $W_{зз} = 1$, то зворотний зв'язок називається *одиничним* (рис. 5.4 б). Тоді формули (5.3) та (5.4) можна записати:

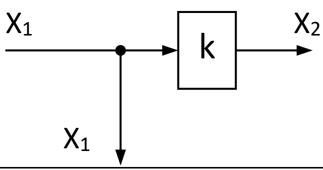
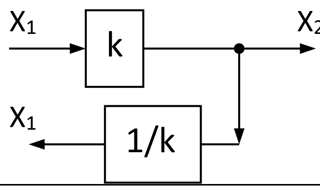
$$W_з = \frac{W_п}{1 \pm W_п}. \qquad (5.5)$$

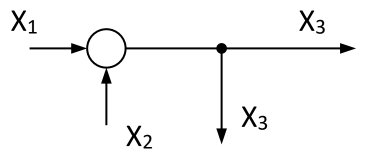
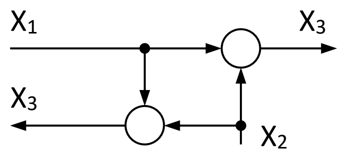
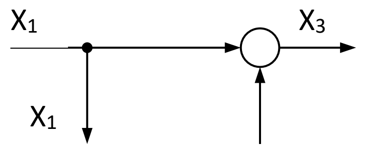
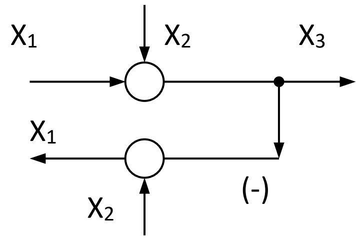
Існує ще ряд правил перетворення структурних схем, які дозволяють у багатоконтурних системах позбавитись зворотних зв'язків, що перехрещуються. Наприклад, перенесення суматора через ланку назад і вперед, перенесення вузла через ланку, перестановка вузлів і суматорів. Деякі з цих правил наведені в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 - Основні правила перетворення структурних схем

Вид перетворення	Початкова схема	Еквівалентна схема
Перенесення суматора через ланку назад		
Перенесення суматора через ланку вперед		
Перенесення вузла через ланку назад		

Продовження таблиці 2.2

Перенесення вузла через ланку вперед		

Перенесення вузла через суматор назад		
Перенесення вузла через суматор уперед		

5.2 Обчислення передавальної функції одноконтурної системи.

Розглянемо одноконтурну систему (рис. 5.5). Ділянку за ходом сигналу від точки прикладення вхідного сигналу X до точки знімання вихідного сигналу називають *прямим ланцюгом* (рис. 5.5 а).

Позначимо її передавальну функцію $W_п$:

$$W_п = W_0 \cdot W_1 \cdot W_2 .$$

Ланцюг із послідовно з’єднаних ланок, що входять у замкнутий контур, називають *розімкнутим ланцюгом* (рис. 5.5 б). Його передавальна функція:

$$W = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 .$$

При визначенні передавальної функції замкнутої системи за керуючим впливом X збурення *f* дорівнюємо нулю: *f* = 0. Тоді отримуємо:

$$W_{yx} = \frac{Y}{X} = W_0 \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_3} = \frac{W_n}{1 + W}. \tag{5.6}$$

Передавальна функція замкнутої системи з від'ємним зворотним зв'язком дорівнює передавальній функції прямого ланцюга, поділеній на одиницю плюс передавальна функція розімкнутого ланцюга.

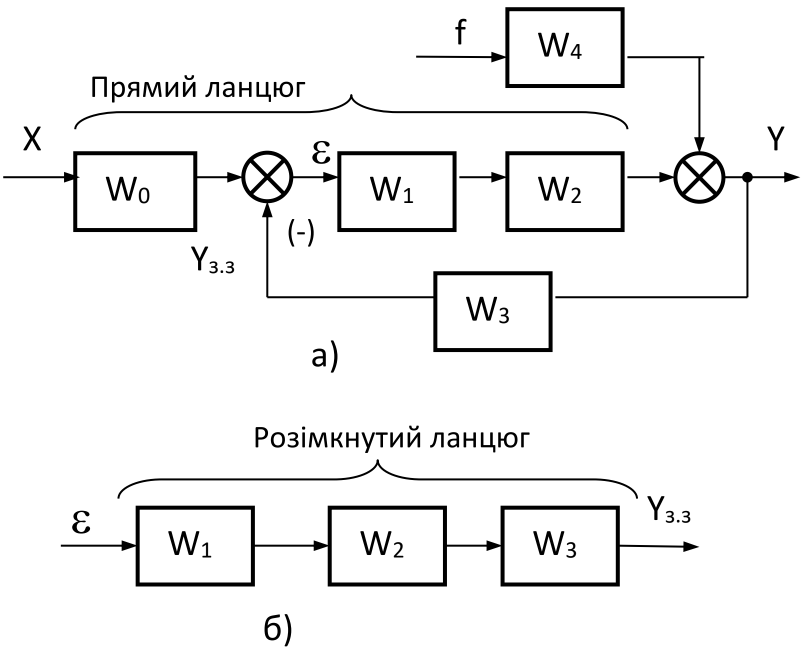


Рис. 5.6 - Структурна схема одноконтурної системи

За цим правилом можна також визначити передавальну функцію замкнутої системи за збуренням *f* (керуючий сигнал X дорівнює нулю). Структурну схему для цього випадку наведено на рис. 5.7. Відповідно до цієї схеми можна записати:

$$W_{yf} = \frac{Y}{f} = W_4 \frac{1}{1 + W_1 W_2 W_3} = \frac{W_4}{1 + W}. \tag{5.7}$$

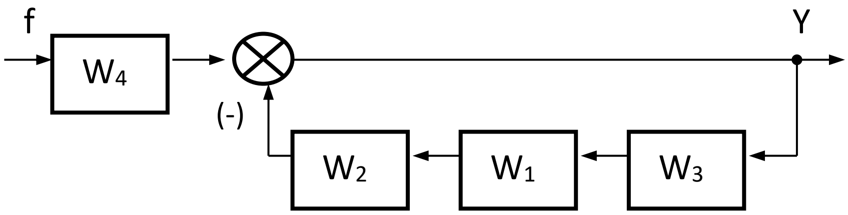


Рис. 5.7 - Перетворена структурна схема САУ до визначення передавальної функції за збуренням

Для замкнутої системи можна також записати передавальні функції помилки за керуючим впливом $W_{\varepsilon x}$ і за збуренням $W_{\varepsilon f}$. При цьому вихідною величиною є помилка керування ε, а вхідною - керуючий сигнал X чи збурення *f* відповідно (рис. 5.8):

$$W_{\varepsilon x} = \varepsilon/X = W_0/(1+W); \quad W_{\varepsilon f} = \varepsilon/f = W_4 W_3/(1+W) \tag{5.8}$$

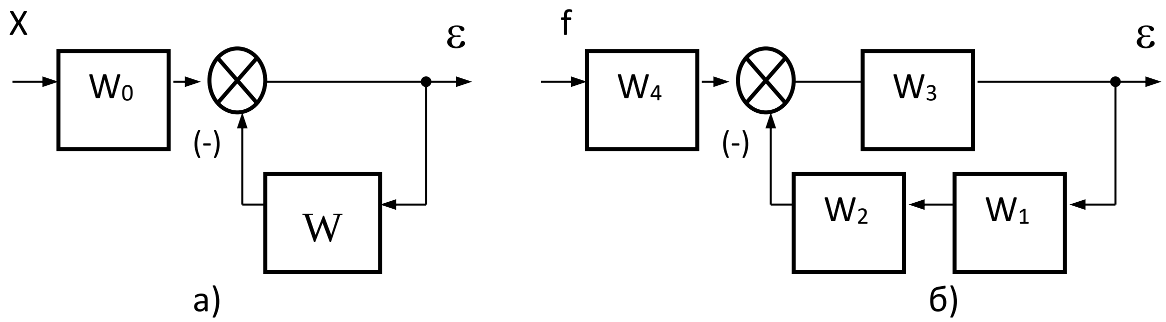


Рис. 5.8 - Перетворені структурні схеми САУ до визначення передавальної функції помилки: за керуючим впливом а), за збуренням б)

5.3 Частотні характеристики систем

При дослідженні та проектуванні САУ звичайно використовують АФЧХ, ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутої системи.

Передавальні функції розімкнутих САУ можна перетворити до вигляду:

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s), \tag{5.9}$$

де $W_i(s)$ - передавальні функції елементарних ланок.

Тоді модулі та аргументи частотних передавальних функцій системи і ланок відповідно до правила модулів та аргументів комплексних чисел зв'язані між собою співвідношеннями:

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega), \tag{5.10}$$

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\omega). \tag{5.11}$$

За цими співвідношеннями можна побудувати АФЧХ розімкнутої САУ: розрахувати АЧХ і ФЧХ окремих ланок за відомими формулами, АЧХ системи обчислити як добуток АЧХ ланок, а ФЧХ системи обчислити як суму ФЧХ окремих ланок.

Із (5.10) випливає, що

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\omega), \qquad (2.57)$$

де $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$, $L_i(\omega) = 20\lg A_i(\omega)$ - логарифмічні амплітудні частотні функції системи та окремих ланок.

Звідси випливає *правило побудови асимптотичної ЛАЧХ розімкнутої САУ*:

– обчислити частоти спряження $\omega_i = 1/T_i$, де T_i - сталі часу окремих ланок; обчислені частоти спряження ω_i відмітити вертикальними пунктирними лініями;

– обчислити коефіцієнт підсилення розімкнутої САУ у дБ: 20lg k, де k - коефіцієнт підсилення системи; відкласти величину 20lg k на частоті $\omega = 1c^{-1}$;

– через точку з координатами ($\omega=1c^{-1}$; L=20lgk) провести першу асимптоту з нахилом $-\nu\cdot 20$ дБ/дек (ν - ступінь астатизму САК, що визначається як різниця між числом інтегруючих та диференціальних ланок); її проводять до першої частоти спряження ω_1;

– побудувати другу асимптоту від кінця першої асимптоти до частоти спряження ω_2, причому її нахил змінюється на +20; -20; +40; -40 дБ/дек залежно від того, є ω_1 частотою спряження форсуючої, аперіодичної, форсуючої другого порядку чи коливальної ланки відповідно;

– кожну подальшу асимптоту побудувати аналогічно другій.

Якщо будь-яка частота спряження є кратною, а її кратність дорівнює q, тобто є q однакових елементарних ланок, то зміна нахилу на цій частоті в q разів більше, ніж на відповідній простій частоті.

Приклад 5.1 Побудувати ЛАЧХ розімкнутої САУ, передавальна функція якої має вигляд:

$$W(s) = \frac{100 \cdot (s+1)}{s(10s+1)\cdot(0.01s^2+0.1s+1)},$$

k=100; T_1=10с (аперіодична ланка); T_2=1с (форсуюча ланка); $T_3 = \sqrt{0,01} = 0,1$с (коливальна ланка).

Обчислюємо 20lg k = 20lg100=40 дБ і відмічаємо цю точку на частоті ω=1$с^{-1}$.

Оскільки в знаменнику s в першому ступені, тобто є одна інтегруюча ланка, то система астатична першого ступеня і перша асимптота має нахил -20 дБ/дек (-1).

У першій частоті спряження $\omega_1=1/T_1$ = 0,1 $с^{-1}$ нахил змінюється на -20 дБ/дек і стає рівним -40 дБ/дек (-2). У другій частоті спряження $\omega_2=1/T_2$ = 1 $с^{-1}$ нахил змінюється на +20 дБ/дек і стає рівним -20 дБ/дек (-1). У третій частоті спряження $\omega_3=1/T_3$ = 10 $с^{-1}$ нахил ЛАЧХ змінюється на -40 дБ/дек і стає рівним -60 дБ/дек (-3).

Асимптотична ЛАЧХ розімкнутої САК наведена на рис.2.35.

Приклад 5.2 Побудувати логарифмічні частотні характеристики ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкнутої системи, передавальна функція якої визначена в прикладі 2.6:

$$W_p(s)=k/[(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)s].$$

Значення коефіцієнта k і сталих часу T_i: k=100 $с^{-1}$; T_1= 0,003с; T_2=0,02с; T_3=0,833с. Задачу розв'язати за допомогою пакета програм MATLAB.

Контрольні питання:

1. Що таке структурна схема системи, які основні елементи структурної схеми?
2. Правила перетворення структурних схем.
3. Яким чином записується передавальна функція ланки, яка охоплена зворотнім зв'язком?
4. Правила визначення передавальної функції одноконтурної системи.
5. Визначення частотних характеристик систем.
6. Передавальна функція системи за управляючим впливом.
7. Передавальна функція системи за збуренням.

Література